Tạp chí Cơ học T.V, 1983, Số 2 (trang 7-15)

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN NGẪU NHIÊN XTRATONOVICH VÀ ỨNG DỤNG TRONG LÝ THUYẾT DAO ĐỘNG NGẪU NHIÊN

NGUYỄN TIẾN KHIÊM

Hiện nay, phương trình vi phân ngẫu nhiên dạng ITO đã và đang trở thành một công cụ có hiệu quả trong việc nghiên cứu dao động của các hệ cơ học dưới kích động ồn trắng. Ưu điểm nổi bật của công cụ này là ở chỗ nó cho phép ta kết hợp được các phương pháp của cơ học phi tuyến (phương pháp trung bình hóa), với lý thuyết các quá trình Marcốp. Tuy nhiên việc ứng dụng phương trình ITO còn có những hạn chế sau đây:

– Nó không cho phép mở rộng nghiên cứu các hệ cơ học với kích động khác ngoài ồn trắng và các dạng khác nhau của phương trình chuyển động.

– Khi sử dụng phương trình ITO việc biến đổi phương trình chuyển động phải tuân theo quy tắc vi phân đặc biệt phức tạp hơn nhiều quy tắc vi phân thông thường trong giải tích.

Nếu sử dụng phương trình vi phân ngẫu nhiên Xtratônôvich, không làm mất tính chặt chẽ của toán học chúng ta khắc phục được những nhược điểm trên hơn nữa trong rất nhiều trường hợp hai công cụ cho cùng một kết quả. Trong phần §1 của bài báo này giới thiệu hai cách xây dựng phương trình vi phân ngẫu nhiên ITO và Xtratônôvich, mối liên hệ giữa chúng (Kết quả này đã được trình bày trong [1]) tiếp đó chúng ta sẽ chứng minh rằng quy tắc vi phân theo Xtratônôvich hoàn toàn trùng với quy tắc vi phân thông thường. Phần §2 ứng dụng trực tiếp phương trình Xtratônôvich vào các hệ cơ học, kết hợp với phương pháp trung bình nhận các phương trình rút gọn cho biên độ và pha. Phần cuối nghiên cứu một số hệ cụ thể.

§1. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN XTRATONOVICH VÀ LIÊN HỆ VỚI PHƯƠNG TRÌNH ITO

Quá trình ngẫu nhiên vec tơ $x(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}^T$ được gọi là quá trình khuếch tán nếu tồn tại:

$$a_i(x, t) = \lim_{\Delta t \to 0} E\left\{\frac{1}{\Delta t}\left[x_i(t + \Delta t) - x_i(t)\right]\Big|_{x(t) = x}\right\} \qquad (1.1)$$

$$b_{ij}(x, t) = \lim_{\Delta t \to 0} E\left\{\frac{1}{\Delta t}\left[x_i(t + \Delta t) - x_i(t)\right]\left[x_j(t + \Delta t) - x_j(t)\right]\Big|_{x(t)=x}\right\}$$

và
$$\lim_{\Delta t \to 0} P\left\{ \left| x(t + \Delta t) - x(t) \right| > \delta\big|_{x(t)=x} \right\} = 0, \ \delta > 0, \qquad (1.2)$$

trong đó E là toán tử trung bình xác suất (Kỳ vọng), P là hàm xác suất. Đối với quá trình x(t) hàm mật độ xác suất thỏa mãn phương trình:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \{a_i(x, t) P\} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \{b_{ij}(x, t) P\}. \quad (1.3)$$

Giả sử $W_1, \ldots, W_m$ là các quá trình Viner không tương quan với cường độ: $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$; $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ là các hàm khả vi liên tục trên $R^n \times T$

Tích phân ITO, ký hiệu: $(I) \int d^*x(t)$ được định nghĩa như sau:

$$(I) \int_S^u \sum_\alpha \Phi_\alpha[x(t), t]\, d^*W_\alpha(t) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i, \alpha} \Phi_\alpha[x(t_i), t_i]\, [W_\alpha(t_{i+1}) - W_\alpha(t_i)] \quad (1.4)$$

trong đó $S = t_1 < t_2 < \ldots < t_N = u$ là một phép chia đoạn $[S, u]$ với độ dài cực đại bằng Δ. Toán tử ngược với việc lấy tích phân là phép lấy vi phân ITO, ký hiệu d^* là phép tính thỏa mãn:

$$d^* \int_S^t \sum_\alpha \Phi_\alpha[x(u), u]\, d^*W_\alpha(u) = \sum_\alpha \Phi_\alpha [x(t), t]\, d^*W_\alpha \quad (1.5)$$

Nếu quá trình x(t) thỏa mãn:

$$x_\alpha(t) - x_\alpha(S) = \int_S^t g_\alpha[x(\tau), \tau] d\tau + (I) \int_S^t \sum_\beta \sigma_{\alpha\beta} [x(\tau), \tau]\, d^*W_\beta(\tau),$$

trong đó tích phân thứ nhất hiểu theo nghĩa tích phân thường, tích phân sau là tích phân ITO, ta nói x(t) là nghiệm phương trình vi phân ngẫu nhiên ITO:

$$d^*x_\alpha(t) = g_\alpha [x(t), t]\, dt + \sum_\beta \sigma_{\alpha\beta} [x(t), t]\, d^*W_\beta(t). \quad (1.6)$$

Quá trình nghiệm phương trình (1.6), theo ITO là quá trình khuếch tán với các hệ số (1.1) là:

$$a_i(x, t) = g_i(x, t)\,;\; b_{ij}(x, t) = \sum_k \sigma_k^2\, \sigma_{ik}(x, t)\, \sigma_{jk}(x, t) \quad (1.7)$$

và nếu G là hàm khả vi liên tục trên $R^n \times T$ thì quá trình

$$z(t) = G[x(t), t]$$

thỏa mãn phương trình:

$$d^*z(t) = \Big[\frac{\partial G}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial G}{\partial x_i} a_i(x, t) + \frac{1}{2} \sum_{i, j} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} b_{ij}(x, t) \Big] dt +$$

$$+ \sum_{i, k} \frac{\partial G}{\partial x_i} \sigma_{ik}(x, t)\, d^*W_k. \quad (1.8)$$

Đây chính là nội dung công thức ITO. Điều đặc biệt ở đây là ở hệ số di chuyển xuất hiện đạo hàm bậc hai của G và b_{ij} nên (1.8) không phải là phép vi phân hàm kép thông thường.

Tích phân Xtratônôvich được định nghĩa như sau :

$$(S)\int_S^u \sum_\alpha \Phi_\alpha[x(t), t]\, dW_\alpha(t) =$$

$$\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i,\alpha}\Phi_\alpha\left[\frac{x(t_{i+1}) + x(t_i)}{2}, \frac{t_{i+1}+t_i}{2}\right][W_\alpha(t_{i+1}) - W_\alpha(t_i)], \tag{1.9}$$

tương tự ta có phép vi phân Xtratônôvich, ký hiệu như vi phân thường d. Xtratônôvich đã chứng minh mối liên hệ sau đây giữa tích phân (1.9) và (1.4):

$$(S)\int_S^u \sum_\alpha \Phi_\alpha[x(t), t]\, dW_\alpha(t) = (I)\int_S^u \sum_\alpha \Phi_\alpha[x(t), t]\, d^*W_\alpha(t) +$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,\alpha}\frac{\partial\Phi_\alpha}{\partial x_i}\sigma_{i\alpha}\,\sigma_\alpha^2. \tag{1.10}$$

Ta nói x(t) là nghiệm của phương trình Xtratônôvich :

$$dx_\alpha(t) = m_\alpha\,[x(t), t]\, dt + \sum_\beta \sigma_{\alpha\beta}\,[x(t), t]\, dW_\beta(t) \tag{1.11}$$

nếu :

$$x_\alpha(t) - x_\alpha(S) = \int_S^t m_\alpha\,[x(\tau), \tau]\, d\tau + (S)\int_S^u \sum_\beta \sigma_{\alpha\beta}\,[x(\tau), \tau]\, dW_\beta(\tau). \tag{1.12}$$

Từ (1.12) sử dụng (1.10) dễ dàng chứng minh được phương trình (1.11) tương đương với phương trình ITO :

$$d^*x_\alpha(t) = [m_\alpha\,[x, t] + \frac{1}{2}\sum_{i,\beta}\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\sigma_{i\beta}\,\sigma_\beta^2]\, dt + \sum_\beta \sigma_{\alpha\beta}\,[x, t]\, d^*W_\beta(t).$$

Điều này chứng tỏ rằng nghiệm của (1.11) cũng là quá trình khuếch tán có các hệ số di chuyển và khuếch tán sau đây :

$$a_j(x, t) = m_i(x, t) + \frac{1}{2}\sum_{i,\beta}\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_i}\sigma_{i\beta}\,\sigma_\beta^2;$$

$$b_{ij}(x, t) = \sum_k \sigma_k^2\,\sigma_{ik}\,\sigma_{jk}. \tag{1.13}$$

Giả sử x (t) là quá trình nghiệm của (1.11) chúng ta sẽ chứng minh rằng quá trình z(t) = G [x(t), t] thỏa mãn phương trình :

$$dz(t) = \left[\frac{\partial G}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial G}{\partial x_i} m_i(x, t)\right] dt + \sum_{i,j}\frac{\partial G}{\partial x_i}\sigma_{ij} dW_j = \frac{\partial G}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial G}{\partial x_i} dx_i. \tag{1.14}$$

(1.14) cho ta công thức vi phân quá trình khuếch tán, hoàn toàn trùng với công thức vi phân thông thường. Ta chứng minh (1.14).

Trước hết ta có:

$$(I)\int d^*z(t) = (S)\int dz(t) \tag{1.15}$$

Theo công thức ITO (1.8) vế trái của (1.15) có dạng:

$$(I)\int d^*z(t) = (I)\int d^*G[x(t), t] = \tag{1.16}$$

$$= \int\left[\frac{\partial G}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial G}{\partial x_i} a_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} b_{ij}\right]dt + (I)\int \sum_{i,k}\frac{\partial G}{\partial x_i}\sigma_{ik} d^*W_k(t).$$

Sử dụng (1.10) biến đổi tích phân cuối ta được:

$$(I)\int d^*z(t) = \int\left[\frac{\partial G}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial G}{\partial x_i} a_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} b_{ij}\right]dt +$$

$$+ (S)\int \sum_i \frac{\partial G}{\partial x_i}\sigma_{ik} dW_k - \frac{1}{2}\int \sum \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial G}{\partial x_i}\sigma_{ik}\right)\sigma_{j\beta}\sigma_\beta^2 dt =$$

$$= \int\left[\frac{\partial G}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial G}{\partial x_i} m_i\right]dt + (S)\int \sum_{i,k}\frac{\partial G}{\partial x_i}\sigma_{ik} dW_k.$$

So sánh với vế phải trong (1.15) ta có:

$$(S)\int dz(t) = \int\left[\frac{\partial G}{\partial t} + \sum \frac{\partial G}{\partial x_i} m_i(x, t)\right]dt + (S)\int \sum_{i,k}\frac{\partial G}{\partial x_i}\sigma_{ik} dW_k(t).$$

Từ đây, bỏ dấu tích phân ta sẽ nhận được (1.14).

§ 2. PHƯƠNG PHÁP TRUNG BÌNH HÓA TRONG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DẠNG XTRATONOVICH

Nói chung phương trình chuyển động của hệ cơ học dưới kích động ngẫu nhiên có thể đưa về dạng:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \varepsilon f[x(t), \dot{x}(t), t] + \sqrt{\varepsilon}\, g[x(t), \dot{x}(t), t]\,\xi(t) \tag{2.1}$$

$\xi(t)$ — ồn trắng cường độ σ, nó là đạo hàm suy rộng của quá trình Viner $W(t)$. Ta coi (2.1) tương đương với hệ phương trình Xtratônôvich sau:

$$dx(t) = y(t)\,dt\,;$$
$$dy(t) = [-\omega^2 x(t) + \varepsilon f(x, y, t)]\,dt + \sqrt{\varepsilon}\, g(x, y, t)\,dW. \tag{2.2}$$

Đối với hệ (2.2) các hệ số (1.13) có dạng:

$$a_1 = a_x = y,\ a_2 = a_y = -\omega^2 x + \varepsilon f(x, y, t) + \varepsilon\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial g}{\partial y} g(x, y, t),$$
$$b_{11} = b_{xx} = b_{12} = b_{21} = b_{xy} = 0,\ b_{22} = b_{yy} = \varepsilon\sigma^2 g^2(x, y, t). \tag{2.3}$$

Phương trình FPK (1.3) là:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + y\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\left[-\omega^2 x + \varepsilon f(x, y, t) + \frac{\varepsilon\sigma^2}{2}\frac{\partial g}{\partial y} g\right]P\right\} =$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\{g^2(x, y, t)\,P\}. \tag{2.4}$$

Nói chung phương trình này rất khó giải vì vậy chúng ta phải tìm đến các phương pháp gần đúng. Phương pháp được sử dụng sau đây là phương pháp trung bình trong cơ học phi tuyến. Để sử dụng phương pháp này, thực hiện phép biến đổi:

$$x(t) = a(t)\cos\Phi(t)\ ;\ \dot{x}(t) = y(t) = -a(t)\omega\sin\Phi(t)\ ;\ \Phi(t) = \omega t + \theta \tag{2.5}$$

sử dụng công thức (1.14) chúng ta đưa hệ (2.2) về dạng:

$$\begin{aligned} da(t) &= -\frac{\varepsilon}{\omega} f[a\cos\Phi,\ -a\omega\sin\Phi,\ t]\sin\Phi dt - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\omega} g[\quad]\sin\Phi dW(t), \\ d\theta(t) &= -\frac{\varepsilon}{\omega} f[\quad]\cos\Phi dt - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\omega} g[\quad]\cos\Phi dW(t). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Hệ (2.6) gọi là hệ có dạng chuẩn. Đối với hệ này ta tính được các hệ số (1.13) như sau

$$\begin{aligned} a_1 &= K_a = -\frac{\varepsilon}{\omega}\left\{f[\quad] + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} g\right\}\sin\Phi + \frac{\varepsilon\sigma^2}{2a\omega^2} g^2[\quad]\cos^2\Phi, \\ a_2 &= K_\theta = -\frac{\varepsilon}{\omega}\left\{f[\quad] + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial \dot{x}} g\right\}\cos\Phi - \frac{\varepsilon\sigma^2}{a^2\omega^2} g^2[\quad]\cos\Phi\sin\Phi, \\ b_{11} &= D_a = \frac{\varepsilon\sigma^2}{\omega^2} g^2[\quad]\sin^2\Phi,\quad b_{22} = D_\theta = \frac{\varepsilon\sigma^2}{a^2\omega^2} g^2[\quad]\cos^2\Phi, \\ b_{21} &= b_{12} = D_{a\theta} = \frac{\varepsilon\sigma^2}{a\omega^2} g^2[\quad]\cos\Phi\sin\Phi \end{aligned} \tag{2.7}$$

(trên đây $[\quad] = [a\cos\Phi,\ -a\omega\sin\Phi,\ t]$)

và phương trình cho hàm mật độ xác suất của a, θ là $P(a, \theta, t)$ có dạng:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}(K_a P) + \frac{\partial}{\partial \theta}(K_\theta P) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}(D_a P) + \frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta}(D_{a\theta} P) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(D_\theta P). \tag{2.8}$$

Lý do ta gọi (2.6) có dạng chuẩn chính là vì các hệ số (2.7) trong phương trình (2.8) tỷ lệ với ε, ứng dụng nguyên lý trung bình hóa theo Khasminski [2] đối với (2.8) ta được:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}(\overline{K}_a P) + \frac{\partial}{\partial \theta}(\overline{K}_\theta P) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}(\overline{D}_a P) + \frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta}(\overline{D}_{a\theta} P) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(\overline{D}_\theta P), \tag{2.9}$$

trong đó:

$$\begin{aligned} &\overline{K}_a = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T K_a dt = \overline{K}(a, \theta)\ ;\ \overline{K}_\theta = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T K_\theta dt = \overline{K}_\theta(a, \theta)\ ; \\ &\overline{D}_a = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T D_a dt = \overline{D}_a(a, \theta)\ ;\ \overline{D}_\theta = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T D_\theta dt = \overline{D}_\theta(a, \theta)\ ; \\ &\overline{D}_{a\theta} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T D_{a\theta} dt = \overline{D}_{a\theta}(a, \theta). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Rõ ràng (2.9) là phương trình FPK tương ứng của một hệ phương trình vi phân ngẫu nhiên Xtratônôvich nào đó, ta gọi nó là hệ phương trình rút gọn của (2.6). Ta tìm hệ rút gọn như sau. Giả sử nó có dạng:

$$\begin{aligned} da(t) &= M(a, \theta)dt + N_1(a, \theta)dW_1 + N_2(a, \theta)dW_2, \\ d\theta(t) &= P(a, \theta)dt + Q_1(a, \theta)dW_1 + Q_2(a, \theta)dW_2, \end{aligned} \tag{2.11}$$

trong đó W_1, W_2 là các quá trình Viner không tương quan có cường độ σ_1, σ_2. Theo công thức (1.13) các hàm : M, N_1, N_2, P, Q_1, Q_2 thỏa mãn hệ :

$$M + \frac{1}{2}\left\{\sigma_1^2 \frac{\partial N_1}{\partial a} N_1 + \sigma_1^2 \frac{\partial N_1}{\partial \theta} Q_1 + \sigma_2^2 \frac{\partial N_2}{\partial a} N_2 + \sigma_2^2 \frac{\partial N_2}{\partial \theta} Q_2\right\} = \overline{K}_a ;$$

$$P + \frac{1}{2}\left\{\sigma_1^2 \frac{\partial Q_1}{\partial a} N_1 + \sigma_1^2 \frac{\partial Q_1}{\partial \theta} Q_1 + \sigma_2^2 \frac{\partial Q_2}{\partial a} N_2 + \sigma_2^2 \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} Q_2\right\} = \overline{K}_\theta ; \qquad (2.12)$$

$$\sigma_1^2 N_1^2 + \sigma_2^2 N_2^2 = \overline{D}_a ; \sigma_1^2 Q_1^2 + \sigma_2^2 Q_2^2 = \overline{D}_\theta ; \quad \sigma_1^2 N_1 Q_1 + \sigma_2^2 N_2 Q_2 = \overline{D}_{a\theta}.$$

Hệ (2.12) gồm 5 phương trình của 6 ẩn vì vậy có thể đặt thêm điều kiện, ví dụ : $N_2 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, lúc đó (2.12) cho nghiệm :

$$N_1^2 = \frac{1}{\sigma^2}\overline{D}_a ; Q_1^2 = \frac{1}{\sigma^2}\frac{\overline{D}_{a\theta}^2}{\overline{D}_a} ; Q_2^2 = \frac{1}{\sigma^2}\frac{\overline{D}_a\overline{D}_\theta - \overline{D}_{a\theta}^2}{\overline{D}_a} ; \qquad (2.13)$$

$$M = \overline{K}_a - \frac{1}{4}\frac{\partial \overline{D}_a}{\partial a} - \frac{1}{4}\frac{\overline{D}_{a\theta}}{\overline{D}_a}\cdot\frac{\partial \overline{D}_a}{\partial \theta} ;$$

$$P = \overline{K}_\theta + \frac{1}{4}\frac{\overline{D}_{a\theta}}{\overline{D}_a}\frac{\partial \overline{D}_a}{\partial a} - \frac{1}{2}\frac{\partial \overline{D}_{a\theta}}{\partial a} - \frac{1}{4}\frac{\partial \overline{D}_\theta}{\partial \theta} .$$

Nếu $\overline{D}_{a\theta} = 0$ ta có :

$$N_1^2 = \frac{1}{\sigma^2}\overline{D}_a ; \quad Q_1 = 0 ; \; Q_2^2 = \frac{1}{\sigma^2}\overline{D}_\theta ;$$

$$M = \overline{K}_a - \frac{1}{4}\frac{\partial \overline{D}_a}{\partial a} ; \quad P = \overline{K}_\theta - \frac{1}{4}\frac{\partial \overline{D}_\theta}{\partial \theta}$$

và (2.11) có dạng :

$$da(t) = \left(\overline{K}_a - \frac{1}{4}\frac{\partial \overline{D}_a}{\partial a}\right)dt + \frac{1}{\sigma}\sqrt{\overline{D}_a}\, dW_1 ,$$

$$d\theta(t) = \left(\overline{K}_\theta - \frac{1}{4}\frac{\partial \overline{D}_\theta}{\partial \theta}\right)dt + \frac{1}{\sigma}\sqrt{\overline{D}_\theta}\, dW_2 . \qquad (2.14)$$

Nếu $\overline{D}_{a\theta}^2 = \overline{D}_a \cdot \overline{D}_\theta$ thì :

$$N_1^2 = \overline{D}_a/\sigma^2 ; \quad Q_1^2 = \overline{D}_\theta/\sigma^2 ; \quad Q_2 = 0 ;$$

$$M = \overline{K}_a - \frac{1}{4}\frac{\partial \overline{D}_a}{\partial a} - \frac{1}{4}\sqrt{\overline{D}_\theta / \overline{D}_a}\,\frac{\partial \overline{D}_a}{\partial \theta} ;$$

$$P = \overline{K}_\theta - \frac{1}{4}\sqrt{\overline{D}_a/\overline{D}_\theta}\,\frac{\partial \overline{D}_\theta}{\partial a} - \frac{1}{4}\frac{\partial \overline{D}_\theta}{\partial \theta}$$

và :

$$da = \left(\overline{K}_a - \frac{1}{4}\sqrt{\overline{D}_\theta/\overline{D}_a}\,\frac{\partial \overline{D}_a}{\partial \theta} - \frac{1}{4}\frac{\partial \overline{D}_a}{\partial a}\right)dt + \frac{1}{\sigma}\sqrt{\overline{D}_a}\, dW_1 ,$$

$$d\theta = \left(\overline{K}_\theta - \frac{1}{4}\sqrt{\overline{D}_a/\overline{D}_\theta}\,\frac{\partial \overline{D}_\theta}{\partial a} - \frac{1}{4}\frac{\partial \overline{D}_\theta}{\partial \theta}\right)dt + \frac{1}{\sigma}\sqrt{\overline{D}_\theta}\, dW_1 . \qquad (2.15)$$

Trong trường hợp f, g không phụ thuộc thời gian t, các hệ số (2.10) chỉ là hàm của a, việc nghiên cứu sẽ thuận tiện hơn nhiều. Ta sẽ xét kỹ trường hợp này trong phần tiếp theo.

Ở đây cần lưu ý rằng việc tìm hệ phương trình rút gọn là cần thiết bởi vì trong nhiều trường hợp, khi (2.9) không giải được thì (2.11) cho phép nghiên cứu bằng các phương pháp khác như : phương pháp phổ, phương pháp phân bố chuẩn hay trực tiếp giải bằng phương pháp số.

§3. VỀ BIÊN ĐỘ DAO ĐỘNG DỪNG CỦA MỘT SỐ HỆ CƠ HỌC VỚI KÍCH ĐỘNG ỒN TRẮNG

Xét trường hợp đặc biệt của hệ (2.1) :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) + \sqrt{\varepsilon}\, g(x, \dot{x})\xi(t) \tag{3.1}$$

trong trường hợp này, dễ dàng nhận thấy, các hệ số tính theo (2.10) cho ta các hàm chỉ phụ thuộc vào a, lúc đó (2.13) cho ta :

$$N_1(a) = \frac{1}{\sigma}\sqrt{\overline{D}_a}\ ; \quad N_2 = 0\ ; \quad M(a) = \overline{K}_a - \frac{1}{4}\frac{\partial \overline{D}_a}{\partial a}.$$

vì vậy quá trình a(t) thỏa mãn :

$$da(t) = M(a)dt + N_1(a)dW_1(t) \tag{3.2}$$

Điều này chứng tỏ rằng biên độ a sau khi tiến hành như trên đã được tách ra khỏi pha, vì vậy có thể nghiên cứu biên độ một cách riêng biệt. Đối với biên độ a hàm mật độ xác suất thỏa mãn phương trình :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}(\overline{K}aP) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}(\overline{D}_a P) \tag{3.3}$$

và phương trình cho mật độ dừng :

$$\frac{\partial}{\partial a}(\overline{K}_a P) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial a^2}(\overline{D}_a P) \tag{3.4}$$

Phương trình cuối cho nghiệm :

$$P(a) = \frac{C}{\overline{D}_a}\exp\left\{2\int_0^a \frac{\overline{K}_a(a)}{\overline{D}_a(a)}\,da\right\} \tag{3.5}$$

hằng số C xác định từ điều kiện :

$$\frac{1}{C} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\overline{D}_a(a)}\exp\left\{2\int_0^a \frac{\overline{K}_a(a)}{\overline{D}_a(a)}\,da\right\}da. \tag{3.6}$$

Sự hội tụ của tích phân (3.6) chính là điều kiện cần để tồn tại mật độ dừng (3.5). Ở đây chúng ta quan tâm đến biên độ a_o của chế độ dừng xảy ra với xác suất lớn nhất, theo ý nghĩa thực tế chế độ này là chế độ dừng ổn định của hệ đang xét. Từ (3.5) a_o thỏa mãn phương trình :

$$\frac{1}{2}\frac{d\overline{D}_a}{da} = \overline{K}_a(a). \tag{3.7}$$

Thay các biểu thức cụ thể của $\overline{K}_a$ và $\overline{D}_a$ vào (3.7) sau một số tính toán ta được :

$$h(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f[a\cos\Phi, -a\omega\sin\Phi]\sin\Phi\, d\Phi =$$

$$= \frac{\sigma^2}{4a\omega}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g^2(a\cos\Phi, -a\omega\sin\Phi]d\Phi - \frac{a}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial g}{\partial a}g[a\cos\Phi, -a\omega\sin\Phi]\sin^2\Phi\, d\Phi\right\} \tag{3.8}$$

Khi $g = 1$ tức kích động ngẫu nhiên là kích động ngoài ta có: phương trình để tìm biên độ dừng:

$$h(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f[a\cos\Phi, \ -a\omega\sin\Phi]\sin\Phi \, d\Phi = \frac{\sigma^2}{4a\omega} \tag{3.9}$$

Nếu $\sigma = 0$ ta được phương trình biên độ dừng quen thuộc trong cơ học phi tuyến. Ta nghiên cứu một số hệ cụ thể.

A – DAO ĐỘNG DỪNG VỚI KÍCH ĐỘNG NGOÀI NGẪU NHIÊN

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}) + \sqrt{\varepsilon}\, \xi(t) \tag{3.10}$$

Biên độ dừng thỏa mãn (3.9). Xét một số dạng cụ thể của f:

a) $f = f(x)$ ta có: $\sigma^2/4a\omega = 0$
điều này chứng tỏ $a_o \to \infty$, hoàn toàn hợp lý bởi vì khi có kích động dạng ồn trắng, là quá trình có phổ kéo dài từ $-\infty$ đến $+\infty$ luôn luôn xảy ra cộng hưởng và nếu không có ma sát thì biên độ sẽ lớn vô cùng.

b) $f = 2k\dot{x}$, lúc này $h(a) = k\omega a$, phương trình (3.9) cho nghiệm:

$$a_o^2 = \sigma^2/4\omega^2 k$$

Nếu ta gọi tỷ số: $\lambda = a_o^2\omega^2/\sigma^2 = 1/4k$ là hệ số động lực của hệ, so với hệ cưỡng bức tiền định:

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega^2 x = Q\sin(\nu t + \alpha)$$

trong trường hợp cộng hưởng $\nu = \omega$, hệ số động lực của nó bằng

$$\lambda_o = 1/4k^2$$

ta thấy: $\lambda/\lambda_o = k$. Từ đây có thể rút ra kết luật sau: Nếu $k > 1$ ảnh hưởng của kích động ngẫu nhiên mạnh hơn kích động điều hòa và ngược lại khi $k < 1$.

Điều đáng chú ý nữa ở đây là $a_o^2 = \sigma^2/4k\omega^2$ chính là phương sai của quá trình x(t) tính bằng phương pháp đúng.

c) $f = (1 - x^2)\dot{x}$ phương trình (3.9) có dạng:

$$\frac{\omega a}{2}\left(\frac{a^2}{4} - 1\right) = \sigma^2/4a\omega,$$

nó cho nghiệm:

$$a_o = \sqrt{2 + 2\sqrt{1 + \sigma^2/2\omega^2}}$$

Kích động ngẫu nhiên làm tăng biên độ dao động. (Xem [4])

B – ẢNH HƯỞNG CỦA CÁC KÍCH ĐỘNG THAM SỐ ĐẾN BIÊN ĐỘ DAO ĐỘNG

a) Xét hệ:

$$\ddot{x} + \varepsilon A \,\mathrm{Sign}\,\dot{x} + (\omega^2 + \sqrt{\varepsilon}\, \xi(t))x = 0. \tag{3.11}$$

Lúc này $h(a) = 2A/\pi$, và phương trình (3.8) cho ta nghiệm:

$$a_o = 32A\omega/\pi\sigma^2$$

Biểu thức cuối cho thấy biên độ dao động tỷ lệ thuận với hệ số ma sát khô và tỷ lệ nghịch với cường độ kích động ngẫu nhiên. Hiện tượng này ngược hẳn với trường hợp kích động ngoài ngẫu nhiên. Như vậy trong hệ có ma sát khô cường độ kích động tham số ngẫu nhiên càng tăng thì biên độ dao động dừng càng nhỏ.

b) Ta nghiên cứu hệ:

$$\ddot{x} + 2\alpha\sqrt{\varepsilon}\, \xi(t)\dot{x} + (\omega^2 + \beta\sqrt{\varepsilon}\, \xi(t)x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} \tag{3.12}$$

Trong trường hợp này $h(a) = \frac{\omega a}{2}\left(\frac{a^2}{4} - 1\right)$ và (3.8) có dạng :

$$\frac{\omega a}{2}\left(\frac{a^2}{4} - 1\right) = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{4\omega} a\,; \quad \sigma_1^2 = \alpha^2\sigma^2/4; \quad \sigma_2^2 = \beta^2\sigma^2/4$$

Dễ dàng nhận thấy phương trình cuối cho nghiệm :

$$a_o = 0 \text{ và } a_* = 2\sqrt{1 + \frac{1}{2\omega^2}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2)}$$

Rõ ràng, kích động tham số ngẫu nhiên ở x làm tăng biên độ dao động còn kích động dạng ma sát nhớt ngẫu nhiên làm giảm biên độ; nếu cường độ của chúng bằng nhau thì chúng tự khử nhau biên độ dao động vẫn bằng 2. Hoặc nếu tăng (hoặc giảm) cường độ của hai loại kích động sao cho $\sigma_1^2 - \sigma_2^2 = \text{const}$ thì biên độ dao động luôn luôn không đổi

Tóm lại phan này chỉ phân tích ảnh hưởng của các dạng kích động ngẫu nhiên đến biên độ dừng. Ở đây chưa quan tâm đến điều kiện (3.6)

Địa chỉ:
Viện Cơ học, Viện KHVN.

Nhận ngày 22-11-1982

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. СТРАТОНОВИЧ Р. Л. Условные марковские процессы. МГУ, 1968.
2. ХАСЬМИНСКИЙ Р. З. О принципе усреднения для параболических и эллиптических дифференциальных уравнений и марковских процессов с малой диффузией. Теория вероятностей и её применения. Т. 8. № 1, 1963.
3. ДИМЕНБЕРГ М. Ф. Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. Москва, 1980.
4. КОЛОМИЕЦ В. Г. Случайные колебания в некоторых нелинейных автономных стохастических системах. Сб. Асимптотические методы в нелинейной механике. Киев, 1974.

РЕЗЮМЕ

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СТРАТОНОВИЧА И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

В работе рассмотрено стохастическое дифференциальное уравнение типа Стратоновича; показано, что с помощью этого аппарата дифференцирование диффузионных процессов польностью совпадает с обычным дифференцированием. Применением уравнения этого типа, сочетая с методом усреднения рассмотрена колебательная система с малым шумом более общего вида. При этом указано общее правило нахождения наибольшего вероятностного значения амплитуды, установивщегося режима большого класса механических систем и дан интересный анализ влияния малого шума на различные колебательные системы.