TẠP CHÍ KHOA HỌC TÍNH TOÁN VÀ ĐIỀU KHIỂN, SỐ 1, TẬP I (1985), 9–15

VỀ HAI BÀI TOÁN TRÊN TẬP LỒI ĐA DIỆN

TRẦN VŨ THIỆU
Viện Toán học

1. Bài này đề cập đến hai bài toán sau đây thường gặp khi nghiên cứu các thuật toán giải qui hoạch lõm (xem [1–3]).

Bài toán 1. Cho tập lồi đa diện $M \subset R^n$ xác định bởi các ràng buộc tuyến tính có dạng

$$h_i(x) = \langle a^i, x \rangle - b_i \leqslant 0, \; i = 1, \ldots, m, \qquad (1)$$

trong đó a^i là vectơ n chiều, b_i là một số, $m \geqslant n$. Giả sử ta đã biết U – tập đỉnh của M, V – tập phương (không kể sai khác một hệ số tỉ lệ dương) các cạnh vô hạn của M, nghĩa là ta có biểu diễn

$$M = \text{co}U + \text{cone } V.$$

Ta giả thiết $U \neq \phi$ (tập lồi M có đỉnh), còn V có thể rỗng (khi M là đa diện lồi). Cho hàm afin

$$h_o(x) = \langle a^o, x \rangle - b_o$$

với a^o là vectơ n chiều khác không, b_o là một số thực.

Đặt

$$N = M \cap \{x \in R^n : \; h_o(x) \leqslant 0\} \qquad (2)$$

Rõ ràng N cũng là một tập lồi đa diện. Bài toán đặt ra là: hãy xác định tập đỉnh P và tập các cạnh vô hạn Q của N?

Bài toán 2. Cũng với các ký hiệu như trên. Trong số các ràng buộc xác định N: $h_i(x) \leqslant 0$, $i = 0, 1, \ldots, m$, hãy tìm những ràng buộc « thừa » đối với N, theo nghĩa những ràng buộc mà khi bỏ chúng đi thì N vẫn không thay đổi?

Hai bài toán tương tự cũng đã được đặt ra và giải quyết trong trường hợp đa diện (xem [3, 4]). Bài này nêu các kết quả mở rộng cho trường hợp tập lồi đa diện không nhất thiết bị chặn.

2. Để giải quyết vấn đề đặt ra, ta ký hiệu

$$U^- = \{u \in u : h_o(u) < 0\}, \; U^+ = \{u \in u : h_o(u) > 0\}, \qquad (3)$$

$$V^- = \{v \in V : \langle a^o, v \rangle < 0, \; V^+ = \{ v \in V : \langle a^o, v \rangle > 0\}, \qquad (4)$$

$$H = \{x \in R^n : \; h_o(x) = 0\}.$$

Các mệnh đề sau đây tạo cơ sở lý luận cho việc giải quyết bài toán 1

Mệnh đề 1. Giả sử $U^+ = V^+ = \phi$. Khi đó $N = M$, nghĩa là $P = U$ và $Q = V$.

Chứng minh. Theo giả thiết $h_o(u) \leqslant 0$ với mọi $u \in U$ và $\langle a^o, v \rangle \leqslant 0$ với mọi $v \in V$. Với mỗi $x \in M$ ta có biểu diễn

$$x = \sum_{u \in U} \alpha_u u + \sum_{v \in V} \beta_v v$$

với $\alpha_u \geqslant 0$, $\beta_v \geqslant 0$ và $\Sigma\alpha_u = 1$. Từ đó suy ra

$$h_o(x) = \Sigma\, \alpha_u h_o(u) + \Sigma\beta_v < a^o, v > \leqslant 0,$$

nghĩa là $x \in N$. Do đó $M \subset N$. Bất đẳng thức ngược lại là hiển nhiên. Vậy $N = M$

Mệnh đề 2. *Giả sử* $U^- = V^- = \phi$. *Khi đó:*

a) Nếu $U^+ = U$ thì $N = \phi$, nghĩa là $P = Q = \phi$.

b) Nếu $U^+ \neq U$ thì $P = U \setminus U^+$ và $Q = V \setminus V^+$.

Chứng minh. a) $U^+ = U$ và $V^- = \phi$ có nghĩa là $h_o(u) > 0$ với mọi $u \in U$ và $< a^o, v > \geqslant 0$ với mọi $v \in V$. Từ đó, cũng như trên, với mỗi $x \in M$ ta có

$$h_o(x) = \sum_{u \in V} \alpha_u h_o(u) + \sum_{v \in V} \beta_v < a^o, v > > 0$$

(để ý rằng có ít nhất một $\alpha_u > 0$). Vậy $N = \phi$.

b) $U^- = V^- = \phi$ có nghĩa là $h_o(u) \geqslant 0$ với mọi $u \in U$ và $< a^o, v > \geqslant 0$ với mọi $v \in V$. Vì thế $h_o(x) \geqslant 0$ với mọi $x \in M$, nghĩa là $M \subset \{x : h_o(x) \geqslant 0\}$. Từ đó suy ra

$$N = M \cap \{x : h_o(x) = 0\} = M \cap H \neq \phi$$

(do $U \setminus (U^+ \cup U^-) = U \setminus U^+ \neq \phi$). Chứng tỏ trong trường hợp này N là một diện của M, cho nên mỗi đỉnh và cạnh vô hạn của N cũng đồng thời là đỉnh và cạnh vô hạn của M. Vậy ta có

$$P = U \setminus U^+, \ Q = V \setminus V^+.$$

Mệnh đề 3. *Giả sử* $U^+ \cup V^+ \neq \phi$ và $U^- \cup V^- \neq \phi$. *Khi đó:*

a) $P \cap U = U \setminus U^+$

b) mỗi đỉnh $w \in P \setminus U$ *là giao điểm của siêu phẳng H với một cạnh hữu hạn của M (nối liền một đỉnh thuộc* U^- *và một đỉnh thuộc* U^+*) hoặc với một cạnh vô hạn của M xuất phát từ một* đỉnh U^- (U^+) và đi theo một phương thuộc V^+ (V^-).

Chứng minh. a) Mọi $u \in U^+$ sẽ không thuộc N (do $h_o(u) > 0$), nên càng không thuộc P. Trái lại, mọi $u \in U \setminus U^+$ sẽ thuộc N (do thỏa mãn $h_o(u) \leqslant 0$), nên sẽ vẫn còn là đỉnh của N. Vậy

$$U \setminus U^+ = P \cap U$$

(đẳng thức này vẫn còn đúng ngay cả khi $U \setminus U^+ = \phi$).

b) Giả sử $w \in P \setminus U$. Khi đó w thỏa mãn chặt n ràng buộc xác định N độc lập tuyến tính. Vì $w \overline{\in} U$ nên trong số n ràng buộc này phải có $h_o(w) = 0$, nghĩa là $w \in H$. Ký hiệu I là tập chỉ số của $n - 1$ ràng buộc còn lại: $I \subset \{1, \ldots, m\}$, $|I| = n - 1$. Khi đó

$$F(w) = \{x \in M : h_i(x) = 0, \ i \in I\}$$

là diện nhỏ nhất của M chứa w. Vì $w \overline{\in} U$ nên $F(w) \neq \{w\}$. Vì thế $\dim F(w) = 1$ và $F(w)$ là một cạnh của M. Xét hai khả năng:

— $F(w)$ là một cạnh hữu hạn của M. Chẳng hạn, $F(w) = [u, u']$ với $u, u' \in U$. Khi đó $w = tu + (1-t)u'$ với một t nào đó $0 < t < 1$. Từ đây suy ra $h_o(u) \neq 0$ $h_o(u') \neq 0$ và từ hệ thức $h_o(w) = th_o(u) + (1-t)\, h_o(u') = 0$ suy ra $h_o(u) . h_o(u') < 0$.

— $F(w)$ là một cạnh vô hạn của M. Chẳng hạn, $F(w) = \{u + tv : t \geqslant 0\}$ với $u \in U$, $v \in V$. Khi đó $w = u + tv$ với $t > 0$ nào đó.

Từ đây suy ra $h_o(u) \neq 0$, $< a^o, v > \neq 0$ và từ hệ thức $h_o(w) = h_o(u) + t < a^o, v > = 0$ suy ra $h_o(u). < a^o, v > < 0$.

Mệnh đề 4. *Với giả thiết như trong mệnh đề 3 ta có:*

a) $Q \cap V = V \setminus V^+$.

b) *mỗi* $v \in Q \setminus V$ *thỏa mãn* $< a^o, v > = 0$ *và đều có dạng*

$v = \lambda x + \mu y$ *với* $\lambda, \mu > 0$ và $x \in V^-$, $y \in V^+$,

Chứng minh. a) Ký hiệu K, T lần lượt là nón các phương vô tận của M, N. Từ (1), (2) suy ra

$$K = \text{cone } V = \{x \in R^n : \langle a^i, x\rangle \leqslant 0,\ i = 1, \dots, m\},$$

$$T = \text{cone } Q = K \cap \{x \in K^n : \langle a^o, x\rangle \leqslant 0\}.$$

Từ đây cho thấy $Q \cap V = V \setminus V^+$.

b) Bây giờ giả sử $v \in Q \setminus V$. Khi đó v thỏa mãn chặt $n-1$ ràng buộc xác định T độc lập tuyến tính. Vì $v \overline{\in} V$ nên trong số $n-1$ ràng buộc này phải có $\langle a^o, v\rangle = 0$. Ký hiệu J là tập chỉ số $n-2$ ràng buộc còn lại: $J \subset \{1, \dots, m\}$, $|J| = n-2$. Khi đó

$$Z(v) = \{x \in K : \langle a^j, x\rangle = 0,\ j \in J\}$$

là diện nhỏ nhất của K chứa tia $\{tv : t \geqslant 0\}$. Vì $v \overline{\in} V$ nên $Z(v) \neq \{tv : t \geqslant 0\}$. Vì thế $\dim Z(v) = 2$ và $Z(v)$ là nón sinh bởi hai vectơ, chẳng hạn x và y với $x, y \in V$. Khi đó $v = \lambda x + \mu y$ với $\lambda, \mu > 0$. Từ đây suy ra $\langle a^o, x\rangle \neq 0$, $\langle a^o, y\rangle \neq 0$ và từ hệ thức $\langle a^o, v\rangle = \lambda \langle a^o, x\rangle + \mu \langle a^o, y\rangle = 0$ suy ra $\langle a^o, x\rangle . \langle a^o, y\rangle < 0$.

Dựa trên các Mệnh đề 3, 4 ta có thể tìm các đỉnh mới (thuộc $P \setminus U$) và cạnh vô hạn mới (thuộc $Q \setminus V$) của N trong trường hợp $U^+ \cup V^+ \neq \phi$ và $U^- \cup V^- \neq \phi$ như sau:

a) Với mỗi cặp $(u, u') \in U^- \times U^+$ ta tính điểm

$$w = tu + (1-t)u' \qquad \text{với } t = h_o(u')/(h_o(u') - h_o(u)).$$

b) Với mỗi cặp $(u, v) \in \{U^- \times V^+\} \cup \{U^+ \times V^-\}$ ta tính điểm

$w = u + tv$ với $t = -h_o(u)/\langle a^o, v\rangle$.

Với mỗi w xác định theo a) hoặc b) ký hiệu $J(w)$ là tập chỉ số các ràng buộc xác định M và w thỏa mãn với dấu bằng:

$$J(w) = \{j : h_j(w) = 0,\ j = 1, \dots, m\}.$$

Có thể thấy rằng trong trường hợp a)

$$J(w) = \{j : h_j(u) = h_j(u') = 0,\ j = 1, \dots, m\}$$

còn trong trường hợp b)

$$J(w) = \{j : h_j(u) = \langle a^j, v\rangle = 0,\ j = 1, \dots, m\}.$$

Dễ kiểm tra lại rằng

$$F(w) = \{x \in M : h_j(x) = 0,\ j \in J(w)\}$$

là diện nhỏ nhất của M chứa w. Vì thế nếu $|J(w)| < n-1$ hoặc nếu tìm được một $z \in U \setminus \{u, u'\}$ (trường hợp a) hay $z \in U \setminus \{u\}$ (trường hợp b) sao cho $h_j(z)=0$ với mọi $j \in J(w)$ (nghĩa là $z \in U \cap F(w)$) thì $\dim F(w) > 1$, do đó theo mệnh đề 3 w không phải là đỉnh của N: $w \overline{\in} P$. Nếu trái lại, $\dim F(w)=1$ và w là đỉnh của N: $w \in P$.

Để tìm cạnh vô hạn mới của N, với mỗi cặp $x \in V^-$, $y \in V^+$ ta tính $v = \langle a^o, y\rangle x - \langle a^o, x\rangle y$. Dễ kiểm tra lại rằng $v \in K$ và $\langle a^o, v\rangle = 0$. Ký hiệu

$$J(v) = \{j : \langle a^j, v\rangle = 0,\ j = 1, \dots, m\}$$

Dễ dàng thấy rằng

$$F(v) = \{x \in K : \langle a^j, x\rangle = 0,\ j \in J(v)\}$$

là diện nhỏ nhất của K chứa $\{tv : t \geqslant 0\}$. Nếu $|J(v)| \leq u-2$ hoặc nếu tìm được một $z \in V \setminus \{x, y\}$ sao cho $\langle a^j, z\rangle = 0$ với mọi $j \in J(v)$ thì $v \overline{\in} Q$. Trái lại, $v \in Q$.

Đến đây ta đã giải quyết trọn vẹn bài toán 1 đặt ra ở trên và chuyển qua xét một trường hợp riêng khi thay (2) bởi

$$N = M \cap \{x \in R^n : h_o(x) = \langle a^o, x\rangle - b_o = 0\} \tag{5}$$

nghĩa là N nhận được từ M bằng cách thêm vào một ràng buộc đẳng thức tuyến tính. Vì một ràng buộc đẳng thức tương đương với hai ràng buộc bất đẳng thức, nên để tìm tập đỉnh P và tập phương các cạnh vô hạn Q của N xác định theo (5) ta có thể áp dụng liên tiếp hai lần cách giải quyết bài toán 1 như đã nêu ở trên. Kết quả ta có:

Hệ quả 1. *Cho tập lồi đa diện M với tập đỉnh U và tập phương các cạnh vô hạn* V. *Giả sử tập lồi đa diện N nhận được từ M theo (5). Ký hiệu P là tập đỉnh và Q là tập phương các cạnh vô hạn của N. Khi đó với các ký hiệu* U^-, U^+, V^-, V^+ *như trước đây xem* (3), (4) *ta có:*

a) *Giả sử* $U^+=V^+=\phi$. *Khi đó* $N=\phi$, *nghĩa là* $P=Q=\phi$, nếu $U^-=U$ *và* $P=U\setminus U^-$, $Q=V\setminus V^-$ *nếu* $U^-\neq U$.

b) Giả sử $U^-=V^-=\phi$. Khi đó $N=\phi$, nghĩa là $P=Q=\phi$, nếu $U^-=U$ và $P=U\setminus U^-$, $Q=V\setminus V^-$ nếu $U^-\neq U$.

c) *Giả sử* $U^+\cup V^+\neq\phi$ và $U^-\cup V^-\neq 0$. *Khi đó* $P\cap U=U\setminus\{U^+\cup U^-\}$, $Q\cap V==V\setminus\{V^+\cup V^-\}$, *đồng thời là mỗi* $w\in P\setminus U$ *là giao điểm của siêu phẳng* $H=\{x\in R^n : h_0(x)=0\}$ *với một cạnh hữu hạn của M nối liền một đỉnh thuộc* U^- *và một đỉnh thuộc* U^+ *hoặc với một cạnh vô hạn của M xuất phát từ một đỉnh thuộc* U^- (U^+) *và đi theo một phương thuộc* V^+ (V^-)*; còn mỗi* $v\in Q\setminus V$ *thỏa mãn* $\langle a^0, v\rangle=0$ *và đều có dạng*

$$v=\lambda x+\mu y \text{ với } \lambda,\ \mu > 0 \text{ và } x\in V^-,\ y\in V^+.$$

Cách tìm những đỉnh mới thuộc $P\setminus U$ và các cạnh vô hạn mới có phương thuộc $Q\setminus V$ của N trong trường hợp c) hoàn toàn tương tự như trước đây.

Trường hợp M là đa diện lồi ($V=\phi$) thì dĩ nhiên N cũng là đa diện lồi và việc tìm tập đỉnh P của N được đơn giản hơn nhiều. Cụ thể là ta có:

Hệ quả 2 *(Trường hợp bất đẳng thức). Cho M là một đa diện lồi với tập đỉnh* U *và N nhận được từ M theo* (2) *với tập đỉnh P. Khi đó, với* U^-, U^+ *xác định theo* (3) *ta có:*

a) *Nếu* $U^+=\phi$ *thì* $N=M$, *nghĩa là* $P=U$.

b) *Nếu* $U^-=\phi$ *thì* $N=\phi$, *nghĩa là* $P=\phi$, *khi* $U^+=U$ *và* $P=U\setminus U^+$ khi $U^+\neq U$.

c) Nếu $U^+\neq\phi$, $U^-\neq\phi$ thì $P\cap U=U\setminus U^+$ và mỗi $w\in P\setminus U$ *là giao điểm của siêu phẳng* $h_0(x)=0$ *với một cạnh của M nối liền một đỉnh thuộc* U^- *và một đỉnh thuộc* U^+.

Hệ quả này bao gồm kết quả đã được xét tới trong [3, 4].

Hệ quả 3 *(Trường hợp đẳng thức). Cho M là một đa diện lồi với tập đỉnh* U *và* N *nhận được từ M theo* (5) *với tập đỉnh P. Khi đó, với* U^-, U^+ *xác định theo* (3) *ta có:*

a) Giả sử $U^+=\phi$. Nếu $U^-=U$ thì $N=\phi$ và $P=\phi$, *còn nếu* $U^-\neq U$ *thì* $P=U\setminus U^-$.

b) *Giả sử* $U^-=\phi$. *Nếu* $U^+=U$ *thì* $N=\phi$ *và* $P=\phi$. *còn nếu* $U^+\neq U$ *thì* $P=U\setminus U^+$.

c) *Giả sử* $U^+\neq\phi$, $U^-\neq\phi$. *Khi đó* $P\cap U=U\setminus\{U^+\cup U^-\}$ và mỗi $w\in P\setminus U$ *là giao điểm của siêu phẳng* $h_0(x)=0$ *với một cạnh của M nối liền một đỉnh thuộc* U^- *và một đỉnh thuộc* U^+.

Trong trường hợp c) của Hệ quả 2 và 3, để tìm các đỉnh mới của N thuộc $P\setminus U$ ta cũng làm như trước đây, nhưng chỉ cần xét

$$w=tu+(1-t)v \text{ với } u\in U^-,\ v\in U^+.$$

Chú ý 1. Dễ dàng kiểm tra lại rằng những điều trình bày ở trên vẫn còn đúng cho cả khi M được cho bởi một hệ hữu hạn các đẳng thức và bất đẳng thức tuyến tính.

Chú ý 2. Trong trường M là một đơn hình, để tìm các đỉnh mới của N ta chỉ việc tìm giao điểm của siêu phẳng $h_0(x)=0$ với mỗi cạnh của M nối liền một đỉnh thuộc U^- và một đỉnh thuộc U^+ (dễ dàng kiểm tra lại rằng mỗi giao điểm này đều là một đỉnh của N).

Chú ý 3. Bằng cách áp dụng nhiều lần cách làm trên đây ta có thể tìm được tất cả các đỉnh và cạnh vô hạn của một tập lồi đa diện có dạng

$$D=\{x\in R^n_+ = \langle a^i, x\rangle - b_i \quad R_i\ 0,\ i=1,\ldots,m\}$$

với R_i là một trong ba hệ thức $=$; $\geqslant$; $\leqslant$; , nhờ xuất phát từ $S=R^n_+$ chứa D. Rõ ràng S_0 có một đỉnh duy nhất là gốc tọa độ O và có các phương cực biên vô hạn là e^j – vectơ đơn vị thứ j trong R^n ($j=1,\ldots,n$).

3. Bây giờ ta chuyển sang xét bài toán 2 đặt ra ở trên. Như đã biết, tập lồi đa diện N được xác định bởi các ràng buộc tuyến tính có dạng

$$h_i(x) = \langle a^i, x \rangle - b_i \leqslant 0, \ i = 0, 1, \dots, m.$$

Một ràng buộc trong số các ràng buộc xác định N gọi là thừa đối với N nếu bỏ ràng buộc đó đi thì tập N vẫn không thay đổi. Nói chính xác hơn, ràng buộc $h_k(x) \leqslant 0$ gọi là thừa đối với N nếu

$$N = \{x ; h_i(x) \leqslant 0, \ i = 0, 1, \dots, m\}$$
$$= \{x ; h_i(x) \leqslant 0, \ i = 0, 1, \dots, m, \ i \neq k\}.$$

Một ràng buộc không phải là thừa đối với N thì gọi là ràng buộc *cốt yếu*. Các khái niệm tương tự cũng được định nghĩa đối với M. Dĩ nhiên, một ràng buộc đã là thừa đối với M thì cũng sẽ là thừa đối với N.

Mệnh đề sau đây cho một điều kiện đủ để nhận biết một ràng buộc là thừa đối với N.

Mệnh đề 5. Nếu $h_k(u) < 0$ với mọi $u \in P$ và $\langle a^k, v \rangle \leqslant 0$ với mọi $v \in Q$ thì ràng buộc $h_k(x) \leqslant 0$ là thừa đối với N.

Chứng minh. Mỗi $x \in N$ có thể biểu diễn dưới dạng

$$x = \sum_{u^i \in P} t_i u^i + \sum_{v^j \in Q} s_j v^j$$

với $t_i \geqslant 0$, $s_j \geqslant 0$ và $\Sigma t_i = 1$. Từ đó suy ra

$$h_k(x) = \Sigma t_i h_k(u^i) + \Sigma s_j \langle a^k, v^j \rangle < 0$$

với mọi $x \in N$. Điều này chứng tỏ $h_k(x) \leqslant 0$ là ràng buộc thừa đối với N.

Hệ quả 4 (xem [3, 4]). *Giả sử N là một đa diện lồi với tập đỉnh* P. *Khi đó với mọi* $u \in P$ *thì ràng buộc* $h_k(x) \leqslant 0$ *là thừa đối với* N.

Mệnh đề 6. *Giả sử* $U^- \cup V^- \neq \phi$ và $h_k(x) \leqslant 0$ *là ràng buộc cốt yếu đối với* M. *Khi đó ràng buộc* $h_k(x) \leqslant 0$ *là thừa đối với N khi và chỉ khi* $h_k(u) < 0$ *với mọi* $u \in U^-$ và $\langle a^k, v \rangle < 0$ với mọi $v \in V^-$.

Chứng minh. Phần «khi». Trước hết ta nhận xét rằng mọi $x \in N \setminus H$ sẽ có $h_k(x) < 0$. Thật vậy, một x như thế có thể biểu diễn dưới dạng

$$x = \sum_{u^i \in P} t_i u^i + \sum_{u^j \in Q} s_j v^j$$

với $t_i \geqslant 0$, $s_j \geqslant 0$ và $\Sigma t_i = 1$ đồng thời do $x \overline{\in} H$ nên phải có ít nhất một i với $t_i > 0$ $u^i \in U^-$, hoặc một j với $s_j > 0$, $v^j \in V^-$. Do đó

$$h_k(x) = \Sigma t_i h_k(u^i) + \Sigma s_j \langle a^k, v^j \rangle < 0$$

Từ nhận xét trên cho thấy

$$x \in N \text{ và } h_k(x) = 0 \text{ kéo theo } h_o(x) = 0. \tag{6}$$

Bây giờ đặt $N' = \{x : h_j(x) \leqslant 0, \ i = 0, 1, \dots, m, \ i \neq k\}$. Ta sẽ chứng tỏ rằng

$$h_k(x) \leqslant 0 \text{ với mọi } x \in N'. \tag{7}$$

Thật vậy, giả sử trái lại có một $z \in N'$ để $h_k(z) > 0$. Lấy một $u \in U^-$ (nếu $U^- \neq \phi$), theo giả thiết $h_k(u) < 0$. Đặt $y = tu + (1-t)z$ với $t = h_k(z) / (h_k(z) - h_k(u))$. Dễ dàng kiểm tra lại rằng $0 < t < 1$ và

$$\begin{cases} h_k(y) = t\, h_k(u) + (1-t)\, h_k(z) = 0 \\ h_j(y) \leqslant 0 \text{ với mọi } j \in \{0, 1, \dots, m\} \setminus \{k\}, \end{cases}$$

nghĩa là $y \in N$ và $h_k(y) = 0$. Theo (6) $h_o(y) = th_o(u) + (1-t)\, h_o(z) = 0$. Từ đây suy ra $h_o(z) > 0$ (nhớ rằng $h_o(u) < 0$ do $u \in U^-$).

Trường hợp $U^- = \phi$ ta lấy một $v \in V^-$, theo giả thiết $\langle a^k, v \rangle < 0$. Đặt $y = z + tv$ với $t = -h_k(z) / \langle a^k, v \rangle$.
Dễ dàng kiểm tra lại rằng $t > 0$ và

$$\begin{cases} h_k(y) = h_k(z) + t < a^k, v > = 0 \\ h_j(y) \leqslant 0 \text{ với mọi } j \in \{0,1,\ldots, m\} \setminus \{k\}, \end{cases}$$

nghĩa là $y \in N$ và $h_k(y) = 0$. Lại theo (6) $h_o(y) = h_o(z) + t < a^o, v > = 0$. Từ đây suy ra $h_o(z) = -t < a^o, v >$ (nhớ rằng $< a^o, v > < 0$ do $v \in V^-$).

Tóm lại, cả hai trường hợp đều dẫn đến $h_o(z) > 0$, điều này trái với $z \in N'$. Vì thế ta có (7), nghĩa là $N' \subset N$. Bao hàm thức ngược lại là hiển nhiên. Vậy $N' = N$. Điều này chứng tỏ $h_k(x) \leqslant 0$ là ràng buộc thừa đối với N.

Phần «chỉ khi». Theo giả thiết $h_k(x) \leqslant 0$ là ràng buộc cốt yếu đối với M nên tìm được một z thỏa mãn $h_k(z) > 0$ và $h_j(z) \leqslant 0$ với mọi $j \in \{0,1, \ldots, m\} \setminus \{k\}$. Trước hết xét trường hợp $h_k(u) = 0$ với một $u \in U^-$. Do $h_o(u) < 0$ nên có một lân cận W của u sao cho $h_o(x) < 0$ với mọi $x \in W$. Đặt $y = \varepsilon z + (1-\varepsilon)u$ với ε dương đủ nhỏ để $y \in W$. Ta có

$$\begin{cases} h_k(y) = \varepsilon h_k(z) + (1-\varepsilon) h_k(u) = \varepsilon h_k(z) > 0 \\ h_j(y) = \varepsilon h_j(z) + (1-\varepsilon) h_j(u) \leqslant 0 \text{ với mọi } j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{k\} \\ h_o(y) \leqslant 0 \text{ (do } y \in W). \end{cases}$$

Điều này chứng tỏ $h_k(x) \leqslant 0$ cũng là ràng buộc cốt yếu đối với N.

Bây giờ xét trường hợp $< a^k, v > = 0$ với một $v \in V^-$. Do $< a^o, v > < 0$ nên với θ dương đủ lớn điểm $y = z + \theta v$ sẽ thỏa mãn

$$h_o(y) = h_o(z) + \theta < a^o, v > \leqslant 0.$$

Mặt khác, ta có

$$h_k(y) = h_k(z) + \theta < a^k, v > = h_k(z) > 0$$

$$h_j(y) = h_j(z) + \theta < a^j, v > \leqslant 0 \text{ với mọi } j \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{k\}$$

Điều này chứng tỏ $h_k(x) \leqslant 0$ cũng là ràng buộc cốt yếu đối với N.

Hệ quả 5 *(xem* [3, 4]. *Giả sử N nhận được từ M theo* (2) *là một đa diện lồi. Giả sử* U^- *xác định theo* (3) *khác rỗng và* $h_k(x) \leqslant 0$ *là ràng buộc cốt yếu đối với M. Khi đó, ràng buộc* $h_k(x) \leqslant 0$ *là thừa đối với N khi và chỉ khi* $h_k(u) < 0$ *với mọi* $u \in U^-$.

Chú ý 4. Giả thiết $h_k(x) \leqslant 0$ là ràng buộc cốt yếu đối với M chỉ cần dùng đến trong chứng minh phần «chỉ khi». Còn phần «khi» vẫn đúng miễn là $k \in \{1, \ldots, m\}$, nghĩa là $h_k(x) \leqslant 0$ là một trong số các ràng buộc của N, không kể ràng buộc mới thêm vào $h_o(x) \leqslant 0$. Như vậy, mệnh đề 6 cho một điều kiện đủ để nhận biết một ràng buộc là thừa đối với N trong trường hợp $U^- \cup V^- \neq \phi$, còn nếu $h_k(x) \leqslant 0$ là ràng buộc cốt yếu đối với M thì điều kiện đó cũng là cần.

Từ các kết quả vừa nêu trên ta có qui tắc để loại bớt các ràng buộc thừa đối với N như sau, trong trường hợp $N \neq \phi$ và $N \neq M$.

Qui tắc T. Xét tập đỉnh và cạnh $U^- \cup V^-$ nếu tập này khác rỗng hoặc $(U \setminus U^+) \cup (V \setminus V^+)$ nếu trái lại. Giả sử tập cần xét gồm các phần tử (đỉnh hoặc cạnh) $u^1, \ldots, u^p$ (xếp theo thứ tự tùy ý). Đầu tiên «thay» u^1 vào hệ ràng buộc xác định N (tức là tính $< a^i, u^1 > - b_i$ nếu u^1 là đỉnh hoặc $< a^i, u^1 >$ nếu u^1 là cạnh), đánh dấu các ràng buộc mà u^1 thỏa mãn với dấu bằng (giá trị tính được bằng 0). Tiếp đó thay u^2 vào các ràng buộc chưa được đánh dấu, rồi đánh dấu các ràng buộc mà u^2 thỏa mãn với dấu bằng... Tiếp tục làm như trên cho đến phần tử u^p hoặc đến khi không còn ràng buộc chưa được đánh dấu. Cuối cùng, để xác định N ta chỉ cần giữ lại ràng buộc $h_o(x) \leqslant 0$ và các ràng buộc đã được đánh dấu theo cách vừa trình bày. Loại bỏ các ràng buộc không được đánh dấu. Theo các mệnh đề 5 và 6, các ràng buộc sau chắc chắn là những ràng buộc thừa đối với N.

Nhận ngày 9-7-1984

TÀI LIỆU DẪN

1. **J. Falk and K.R. Hoffman**, A successive underestimation method for concave minimization problems. Mathematics of Operations Research 1 (1976), 251–259.

2. T.V. Thieu, B.T. Tam, V.T. Ban, An outer approximation method for globally minimizing a concave function over a compact convex set. Proceedings of IFIP Working Conference on Recent Advances on System Modelling and Optimization. Hanoi, January 1983.

3. T.V. Thiệu, Phương pháp hữu hạn tìm cực tiểu toàn cục của hàm lõm trên tập lồi đa diện. Thông báo khoa học 2(1983), 56−65.

4. T.V. Thiệu, B.T. Tâm, V.T. Bản, Hai bài toán về đa diện lồi. Tạp chi Toán học. Tập X, số 3 (1983), 5−8.

ABSTRACT

On two problems over polyhedral convex sets

In this paper we are concerned with the following two problems often encountered in concave programming:

1. Given the vertices and extreme directions of a polyhedral convex set M defined by a system of linear constraints, determine the vertices and extreme directions of the polyhedral convex set obtained from M just by adding one new linear equality (or inequality) constraint.

2. Among the constraints of a given polyhedral convex set, find those which are redundant, i. e. which can be removed without affecting the polyhedral convex set.