Tạp chí Tin học và Điều khiển học, T. 16, S. 4 (2000), 34-43

KHÁI NIỆM SƠ ĐỒ, LƯỢC ĐỒ LOGIC ĐỐI XỨNG. SỰ ĐẲNG CẤU GIỮA CÁC LƯỢC ĐỒ LOGIC ĐỐI XỨNG

PHAN CHÍ VÂN

Abstract. In this paper the author presents the concepts on the fuzzy logical scheme and the logical sysmmetric scheme. With those mathematic concepts the author presents form the primitive idea, to the abstract idea. In addition he also presents the concept on the important questions of the isomorphism between logical symmetric schemes.

Tóm tắt. Bài báo giới thiệu những nét cơ bản về khái niệm sơ đồ, lược đồ logic đối xứng (SĐ, LĐLGĐX). Thực chất đây là một phương tiện biểu diễn tri thức theo các quan hệ logic trên một hệ các khái niệm nào đó. Tiếp đó bài báo trình bày khái miệm về sự đẳng cấu giữa các lược đồ logic đối xứng (LĐLGĐX) là vấn đề quan trọng và trình bày vài ví dụ về sự đẳng cấu giữa các LĐLGĐX trong giải tích toán học nhằm nêu bật ý nghĩa thực của sự đẳng cấu giữa các LĐLGĐX.

1. SƠ ĐỒ, LƯỢC ĐỒ LOGIC ĐỐI XỨNG

1. Khái niệm về sơ đồ, lược đồ logic đối xứng

Cho E là một tập vũ trụ khác rỗng. Trong logic kinh điển chúng ta biết rằng mỗi vị từ một ngôi p định nghĩa trên E xác định một tập con của E như sau: $E_p = \{a \in E / p(a)\}$. Một cách tương đương, mỗi vị từ một ngôi p (gọi là một định nghĩa) trên E xác định một cặp khái niệm phủ định nhau là $p(a)$ và $\overline{p}(a)$, trong đó a là một biến trên E, và $E_p = \{a \in E / p(a)\}, \overline{E}_p = \{a \in E / \overline{p}(a)\}$. E_p được gọi là ngoại diện của khái niệm $p(a)$.

Như vậy một hệ các khái niệm trên E xác định tương ứng một họ các tập con của E. Khi đó chúng ta có thể xét các quan hệ trên hệ khái niệm tương ứng với các quan hệ thông thường trong lý thuyết tập hợp trên họ các tập con như: "bằng", "lồng", "giao", "rời"....

Trong bài báo này, chúng ta sẽ nghiên cứu cấu trúc gồm hệ các khái niệm như đã nói ở trên. Hơn nữa bài báo cũng chỉ xét hạn chế 4 quan hệ giữa các khái niệm được ký hiệu bởi q_1, q_2, q_3, q_4 tương ứng với các quan hệ "bằng", "lồng", "giao", "rời", trên họ các tập con (như trình bày ở bài báo LĐLGĐX và ứng dụng trong tập 1, số 2, năm 1991).

Như vậy q_2 đại diện cho 2 quan hệ đối ngẫu nhau $\overleftarrow{q}_2$ và $\overrightarrow{q}_2$ tương ứng với 2 quan hệ "lồng" đối ngẫu $\subseteq$ và $\supseteq$ trong lý thuyết tập hợp.

Giả sử trên E được định nghĩa n vị từ một ngôi P_i, $i = 1, 2, \dots, n$.

Ký hiệu $\pi_n = \{\dots p_i(a), \overline{p}_i(a), \dots\} = \{\dots \alpha_l(a) \dots\}$, $l = 1, \dots, 2n$. Đặt S_n là tập hợp tất cả các quan hệ hai ngôi đặc thù nêu trên giữa từng cặp khái niệm $\alpha_l(a)$, $\alpha_m(a)$ trong hệ khái niệm π_n. Một cách hình thức, S_n là tập hợp con của tập tích đề các $\pi_n \times \pi_n \times \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$

$$S_n \subseteq \pi_n \times \pi_n \times \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$$

với ngữ nghĩa như sau: $(\alpha_l, \alpha_m, q_k) \in S_n \leftrightarrow$ cặp khái niệm (α_l, α_m) có quan hệ q_k $(k = \overline{1,4}) \leftrightarrow$ cặp ngoại diên của cặp khái niệm (α_l, α_m) có quan hệ q_k trong lý thuyết tập.

Một cách tương đương, S_n xác định một ánh xạ bộ phận

$f : \pi_n \times \pi_n \to \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$,

$f : (\alpha_l, \alpha_m) \to q_k$ nếu $(\alpha_l, \alpha_m, q_k) \in S_n$.

Sau đây chúng ta đưa ra định nghĩa cho sơ đồ, lược đồ logic đối xứng.

Định nghĩa 1.1. Sơ đồ logic đối xứng (SĐLGĐX) của 2n khái niệm $\{\dots p_i(a), \overline{p_i(a)} \dots\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, là hệ $\{\pi_n, S_n\}$ trong đó các quan hệ q_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ thỏa mãn các tính chất sau: (với $l, m, m' = 1, 2, \dots, 2n$)

1)	$(\alpha_l, \alpha_l, q_1)$	tính đồng nhất của q_1
	$(\alpha_l, \alpha_m, q_1) \leftrightarrow (\alpha_m, \alpha_l, q_1)$	tính đối xứng của q_1
	$(\alpha_l, \alpha_m, q_1) \wedge (\alpha_m, \alpha_{m'}, q_1) \rightarrow (\alpha_l, \alpha_{m'}, q_1)$	tính bắc cầu của q_1
2)	$(\alpha_l, \alpha_m, \overrightarrow{q}_2) \leftrightarrow (\alpha_m, \alpha_l, \overleftarrow{q}_2)$	tính đối ngẫu của $\overrightarrow{q}_2$ và $\overleftarrow{q}_2$
	$(\alpha_l, \alpha_m, \overrightarrow{q}_2) \wedge (\alpha_m, \alpha_{m'}, \overrightarrow{q}_2) \rightarrow (\alpha_l, \alpha_{m'}, \overrightarrow{q}_2)$	tính bắc cầu của $\overrightarrow{q}_2$
3)	$(\alpha_l, \alpha_m, q_3) \leftrightarrow (\alpha_m, \alpha_l, q_3)$	tính đối xứng của q_3
	$(\alpha_{l'}, \alpha_m, \overrightarrow{q}_2) \leftrightarrow (\alpha_l, \alpha_m, q_3)$	với $\alpha_l = p_i$, $\alpha_{l'} = \overline{p}_i$
4)	$(\alpha_l, \alpha_m, q_4) \leftrightarrow (\alpha_m, \alpha_l, q_4)$	tính đối xứng của q_4
	$(\alpha_l, \alpha_m, q_4) \leftrightarrow (\alpha_{l'}, \alpha_m, q_1) \vee (\alpha_{l'}, \alpha_m, \overleftarrow{q}_2)$	với $\alpha_l = p_i$, $\alpha_{l'} = \overline{p}_i$

Trong S_n có thể còn các phần tử $(\alpha_l, \alpha_m, q_k)$ với q_k chưa xác định tương ứng với (α_l, α_m) ở ngoài miền xác định của f, khi ấy ta gọi quan hệ hai ngôi (α_l, α_m) đó là quan hệ "mờ". SĐLGĐX $\{\pi_n, S_n\}$ có thể được viết gọn lại thành $S(\pi_n)$ hay S_n và được gọi là SĐLGĐX cấp n.

Định nghĩa 1.2. Lược đồ logic đối xứng (LĐLGĐX) của $2n$ khái niệm $\{\dots p_i(a), \overline{p_i(a)} \dots\}$, $i = 1, 2, \dots, n$, là SĐLGĐX cấp n với ánh xạ f xác định toàn phần khái niệm ấy, nghĩa là trong S_n không còn có quan hệ mờ (miền xác định của f là toàn bộ $\pi_n \times \pi_n$).

Khi ấy $\{\pi_n, S_n\}$ còn được viết là $\{\pi_n, L_n\}$ hay viết gọn lại thành $L(\pi_n)$ hay L_n và được gọi là LĐLGĐX cấp n.

Thực chất khái niệm SĐ, LĐLGXĐ $\{\pi_n, S_n\}$ là một hệ gồm $2n$ khái niệm thuộc π_n và $C_{2n}^2 = n(2n-1)$ quan hệ cặp đôi (là các quan hệ hai ngôi đặc thù) giữa các khái niệm đó, thuộc S_n.

Trong thực tế nói chung, ta chỉ xét các SĐ, LĐLGĐX cấp 2 trở lên (SĐ, LĐLGĐX cấp 1 là trường hợp tầm thường).

1.2. Khái niệm về "ảnh", "đồ thị", "bảng quan hệ" của sơ đồ, lược đồ logic đối xứng

Để mô tả các quan hệ hai ngôi trong SĐ, LĐLGĐX, trước tiên cần có sự phân loại các phán đoán, các mệnh đề (toán hoặc phi toán) theo qui ước sau:

Với không gian cơ sở E và $a \in E$,

$(i) \rightarrow (j)$ có nghĩa là $(\forall a)\ [\overline{p_i(a)} \vee p_j(a)]$ được gọi là phán đoán loại 1,

$(i) \nrightarrow (j)$ có nghĩa là $(\exists a)\ [p_i(a) \wedge \overline{p_j(a)}]$ được gọi là phán đoán loại 2.

Một phán đoán đã được chứng minh hay xác nhận thì phán đoán ấy là một mệnh đề (toán hay phi toán). Do đó cũng có sự phân loại: mệnh đề loại 1, mệnh đề loại 2 tùy theo phán đoán đã được chứng minh hay xác nhận là loại 1 hay loại 2.

Các phán đoán, mệnh đề nằm trong quan hệ tầm thường được gọi là phán đoán, mệnh đề tầm thường.

SĐ, LĐLGĐX là những khái niệm trừu tượng. Để có được hình ảnh cụ thể về chúng, đặc biệt để trình bày được sự chồng chất các quan hệ hai ngôi trong S_n hay L_n cần đưa ra các khái niệm về "ảnh", "đồ thị", và "bảng quan hệ" của mỗi SĐ, LĐLGĐX.

Đây là ba cách thể hiện cho từng SĐ, LĐLGĐX. Mỗi cách đều có nét ưu việt riêng trong cách thể hiện, tuy nhiên khái niệm "ảnh" là sự thể hiện "gần sát" với chính khái niệm SĐ, LĐLGĐX (nó thể hiện được các quan hệ $2, 3, \dots, n$ ngôi trong SĐ, LĐLGĐX cấp n, trong khi đó "đồ thị" và "bảng quan hệ" chỉ thể hiện được các quan hệ hai ngôi trong các SĐ, LĐLGĐX tương ứng), vì vậy khái niệm "ảnh" sẽ được định nghĩa một cách hình thức tương xứng với chính khái niệm SĐ, LĐLGĐX, trong khi đó các khái niệm về "đồ thị" và "bảng quan hệ" chỉ đưa ra ở mức độ mô tả theo nội dung.

Để thuận tiện trong việc trình bày, trước tiên ta đưa ra các khái niệm về "ảnh", "đồ thị" và "bảng quan hệ" của các LĐLGĐX.

1.2.1. Ảnh của lược đồ logic đối xứng

Gọi E là không gian cơ sở và $\varphi(E)$ là họ tất cả các tập con hình thành trên E.

Đặt $\pi_n = \{\dots p_i(a), \overline{p_i(a)} \dots\}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$
$= \{\dots \alpha_l(a) \dots\}$ $(l = 1, 2, \dots, 2n)$ $(a \in E)$.

Định nghĩa 1.3. Ảnh của LĐLGĐX $\{\pi_n, L_n\}$ là các miền giá trị (ảnh) của ánh xạ $\varphi : \pi_n \to \varphi(E)$ thỏa mãn các điều kiện: (với $l, m = 1, 2, \dots, 2n$)

1) $\varphi(\alpha_m) = E - \varphi(\alpha_l) = \overline{\varphi(\alpha_l)}$ với $\alpha_l = p_i$, $\alpha_m = \overline{p}_i$,
$\overline{\varphi(\alpha_l)}$ là phần bù của tập $\varphi(\alpha_l)$ và $\overline{p}_i$ là phủ định của khái niệm p_i.

2) $(\forall a)$ $[\alpha_l(a) \to \alpha_m(a)]$ tương đương $\varphi(\alpha_l) \subset \varphi(\alpha_m)$.

3) $(\exists a)$ $[\alpha_l(a) \wedge \alpha_m(a)]$ tương đương $\varphi(\alpha_l) \sqcap \varphi(\alpha_m)$.

Từ đó suy ra có các sự tương đương về quan hệ giữa các khái niệm thuộc π_n với các tập thuộc ảnh $\varphi(E)$ của LĐLGĐX $\{\pi_n, L_n\}$ như sau: (ảnh $\varphi(E)$ - được hiểu là họ $2n$ miền phân hoạch nào đó trích ra từ $\varphi(E)$)

	(1) Quan hệ giữa các khái niệm thuộc π_n		(2) Quan hệ giữa các tập thuộc ảnh $\varphi(E)$	
q_1:	$(\forall a)\,[p_i(a) \leftrightarrow p_j(a)]$	tương đương	$\varphi(p_i) = \varphi(p_j)$	(bằng)
q_2:	$(\forall a)\,[\overline{p_i(a)} \vee p_j(a)] \wedge (\exists a)\,[\overline{p_i(a)} \wedge p_j(a)]$	tương đương	$\varphi(p_i) \subset \varphi(p_j) \wedge \varphi(p_j) \not\subset \varphi(p_i)$	(lồng)
q_3:	$(\exists a)\,[p_i(a) \wedge p_j(a)] \wedge (\exists a)\,[p_i(a) \wedge \overline{p_j(a)}] \wedge (\exists a)\,[\overline{p_i(a)} \wedge p_j(a)]$	tương đương	$\varphi(p_i) \sqcap \varphi(p_j) \wedge \varphi(p_i) \not\subset \varphi(p_j) \wedge \varphi(p_j) \not\subset \varphi(p_i)$	(giao)
q_4:	$(\forall a)\,[\overline{p_i(a)} \vee \overline{p_j(a)}]$	tương đương	$\varphi(p_i) \not\sqcap \varphi(p_j)$	(rời)

Việc chứng minh các hệ thức tương đương này về các quan hệ q_k không khó, vì chính các điều kiện 2), 3) trong định nghĩa về ảnh đã ràng buộc các quan hệ cơ bản $\subset$ và $\sqcap$ mà như trên đã biết mọi quan hệ đặc thù q_k ($k = 1, 2, 3, 4$) thực chất được xây dựng từ hai quan hệ cơ bản trên và các phủ định của chúng.

Ta chứng minh sự tương đương trong quan hệ q_2 chẳng hạn:

q_2 $\quad (\forall a)\,[\overline{p_i(a)} \vee p_j(a)] \wedge (\exists a)\,[\overline{p_i(a)} \wedge p_j(a)]$

tương đương $(\forall a)\,[p_i(a) \to p_j(a)] \wedge (\exists a)\,[\overline{p_i(a)} \wedge p_j(a)]$

tương đương $\varphi(p_i) \subset \varphi(p_j) \wedge \overline{\varphi(p_j)} \sqcap \varphi(p_j)$

tương đương $\varphi(p_i) \subset \varphi(p_j) \wedge \overline{\varphi(p_i)} \sqcap \varphi(p_j)$

tương đương $\varphi(p_i) \subset \varphi(p_j) \wedge \varphi(p_j) \not\subset \varphi(p_i)$ $\quad$ (lồng)

Đối với các sự tương đương trong quan hệ q_1, q_3, q_4 được chứng minh tương tự.

Qua các loại hệ thức tương đương trên ta thấy rõ được bản chất các quan hệ giữa các khái niệm trong một LĐLGĐX cũng như các quan hệ giữa các ngoại diên của các khái niệm đó thể hiện trên ảnh $\varphi(E)$ của LĐLGĐX ấy.

Ở đây cũng có nhận xét: Một phần tử bất kỳ thuộc không gian cơ sở E, luôn luôn thuộc tương giao của nửa số miền phân hoạch (ngoại diên của khái niệm) hình thành trên E, và không thuộc nửa số miền phân hoạch còn lại.

Từ nhận xét đó sẽ hình thành khái niệm về "hệ thống các miền đặc tính" của mô hình logic đối xứng (MHLGĐX) là khái niệm có nhiều ý nghĩa trong biểu diễn các tri thức tự nhiên, sẽ được trình bày sau.

Nếu tách riêng từng quan hệ đơn lẻ, sẽ có những sự tương đương logic sau đây:

$[i, j]$ tương đương $(i) \to (j) \wedge (i) \leftarrow (j)$, vậy quan hệ loại 1 chứa hai mệnh đề loại 1.

$(i, j]$ tương đương $(i) \to (j) \wedge (i) \not\leftarrow (j)$, vậy quan hệ loại 2 chứa một mệnh đề loại 1 và một mệnh đề loại 2.

(i,j) tương đương $(i) \nrightarrow (j) \wedge (i) \nleftarrow (j) \wedge (i) \nrightarrow \overline{(j)}$, vậy quan hệ loại 3 chứa ba mệnh đề loại 2.

$]i,j[$ tương đương $(i) \rightarrow \overline{(j)}$, vậy quan hệ loại 4 chứa một mệnh đề loại 1.

1.2.2. Đồ thị của lược đồ logic đối xứng

Với các vị $p_i(a)$, $\overline{p_i(a)}$ được viết gọn lại thành (i), $\overline{(j)}$, khi ấy

- Quan hệ "bằng" $[i,j]$ khi và chỉ khi $(i) \rightleftarrows (j)$
  Trong đồ thị của LĐLGĐX được viết là: $(i) \longleftrightarrow (j)$
- Quan hệ "lồng" $(i,j]$ khi và chỉ khi $(i) \substack{\longrightarrow \\ \nleftarrow} (j)$
  Trong đồ thị của LĐLGĐX được viết là: $(i) \longrightarrow (j)$
- Quan hệ "giao" (i,j) khi và chỉ khi $(i) \substack{\nrightarrow \\ \nleftarrow} (j)$
  Trong đồ thị của LĐLGĐX được viết là: $(i) \quad (j)$
- Quan hệ "rời" $]i,j[$ khi và chỉ khi $(i) \longrightarrow \overline{(j)}$
  Trong đồ thị của LĐLGĐX được viết là: $(i) \quad (j)$

Khi xét toàn bộ số lượng các mệnh đề trong một SĐ, LĐLGĐX để tránh sự trùng lặp sẽ coi mỗi quan hệ hai ngôi đặc thù đều chứa hai mệnh đề loại 1 hay loại 2, hoặc chứa một mệnh đề loại 1 và một mệnh đề loại 2 như đã trình bày trên.

Đường đi trên đồ thị ở đây được qui ước là một mũi tên, hay một dãy các mũi tên tiếp nối cùng chiều. Và cũng có qui ước: đường đi không chiều được hiểu là không có đường đi nào nối giữa hai đỉnh tương ứng.

Với các qui ước đó, ta có định nghĩa sau đây:

Định nghĩa 1.4. Đồ thị của LĐLGĐX $\{\pi_n, L_n\}$ là tập hợp các đỉnh (1) (2) ... (n) và $\overline{(1)}$ $\overline{(2)}$ ... $\overline{(n)}$ được xếp thứ tự từ trái sang phải thành hai hàng song song và đối xứng ((i) trên, $\overline{(i)}$ dưới) cùng các đường đi hai chiều, một chiều, không chiều như qui ước trên, phản ánh các quan hệ hai ngôi chứa trong L_n.

Với định nghĩa trên về đồ thị của LĐLGĐX: phần các đỉnh không có sự ràng buộc nào đặc biệt, nhưng về số lượng và sự phân bố các cạnh (đường đi) sẽ có nhiều qui luật ràng buộc, chẳng hạn:

- Giữa các đỉnh đối xứng (i) và $\overline{(i)}$ chỉ có các đường đi không chiều (giữa (i) và $\overline{(i)}$ không bao giờ liên thông).

- Giữa các đỉnh đối xứng (i) và $\overline{(i)}$ có sự đối ngẫu về số lượng các đường ra và đường tới: nếu từ đỉnh (i) có k đường ra và l đường tới thì với đỉnh $\overline{(i)}$ sẽ có k đường tới và l đường ra ..... và một số quy luật ràng buộc khác.

1.2.3. Bảng quan hệ của lược đồ logic đối xứng

Trước tiên cần nêu lên mối liên hệ đặc trưng giữa đường đi trên đồ thị và các ký hiệu trên bảng quan hệ.

Với các đỉnh $(i), (j)$ khác nhau của đồ thị:

- Quan hệ "bằng": $A_i = A_j$ khi chỉ khi có đường đi hai chiều nối giữa hai đỉnh (i), (j), khi ấy đã có ký hiệu: $[i,j]$.

- Quan hệ "lồng": $(A_i \neq A_j) \wedge (A_i \subset A_j)$ khi chỉ khi có và chỉ có đường đi một chiều từ đỉnh (i) đến đỉnh (j), khi ấy đã có ký hiệu: $(i,j]$.

- Quan hệ "giao": A_i, A_j có quan hệ giao khi chỉ khi không có đường đi nào nối giữa hai đỉnh (i), (j) và cũng không có được đi từ (i) đến $\overline{(j)}$, khi ấy đã có ký hiệu: (i,j).

- Quan hệ "rời": A_i, A_j có quan hệ rời khi chỉ khi không có đường đi nào nối giữa hai đỉnh (i) (j) và có đường đi từ (i) đến $\overline{(j)}$, khi ấy đã có ký hiệu: $]i,j[$.

Định nghĩa 1.5. Bảng quan hệ của LĐLGĐX $\{\pi_n, L_n\}$ là tập hợp các quan hệ hai ngôi chứa trong L_n được mô tả theo các ký hiệu: $[i,j]$, $(i,j]$, (i,j), $]i,j[$ với những ý nghĩa đã nêu trên, được sắp xếp theo một trình tự nhất định (chẳng hạn trong bài này luôn luôn được sắp xếp với trình tự tỉa dần theo đồ thị, từ trái sang phải, từ hàng trên xuống hàng dưới, thành bảng n cột và $(2n-1)$ hàng; dĩ nhiên có thể qui ước sắp xếp theo những trình tự xác định khác).

Với định nghĩa trên về bảng quan hệ của LĐLGĐX, dĩ nhiên số lượng và vị trí các loại quan hệ q_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ sẽ ràng buộc nhau trên bảng quan hệ theo những qui luật nhất định.

Một cách tương tự đối với SĐLGĐX (mà chưa phải LĐLGĐX) cũng được xây dựng các khái niệm về "ảnh", "đồ thị", và "bảng quan hệ" như đối với một LĐLGĐX, nhưng trong đó được bổ sung thêm các khái niệm về "đường mờ" trong ảnh, "mũi tên mờ" trên đồ thị, và các "quan hệ mờ" trên bảng quan hệ đối với các phán đoán chưa xác minh, đối với các quan hệ chưa xác định.

Từ đó ta có được các khái niệm "ảnh mờ", "đồ thị mờ" và "bảng quan hệ mờ" đối với một SĐLGĐX mà chưa phải là LĐLGĐX.

Đến đây có nhận xét: Đồ thị của một SĐ, LĐLGĐX luôn luôn có sự đối ngẫu giữa đường đi từ (i) tới (j) với các đường đi từ $\overline{(j)}$ tới $\overline{(i)}$, do vậy loại sơ đồ, lược đồ logic này được gọi là sơ đồ, lược đồ logic đối xứng.

Đồ thị của SĐLGĐX $\{\pi_n, S_n\}$ là đồ thị $2n$ đỉnh thuộc π_n và có $n(2n-1)$ cạnh thuộc S_n, trong đó có các loại cạnh (mà thực chất là các quan hệ logic) như sau:

- Cạnh liên thông (quan hệ loại 1, loại 2)
- Cạnh không liên thông (quan hệ loại 3, loại 4)
- Cạnh nét (quan hệ đã xác định)
- Cạnh mờ (quan hệ chưa xác định)

2. VỀ SỰ ĐẲNG CẤU GIỮA CÁC LƯỢC ĐỒ LOGIC ĐỐI XỨNG

Khái niệm về LĐLGĐX $\{\pi_n, L_n\}$ luôn luôn có hai phần: phần hình thành các khái niệm nào đó trong π_n, và phần quan hệ logic giữa các khái niệm đó được phản ánh trong L_n. Trong quá trình thu thập và biểu diễn tri thức, việc quan tâm và ghi chỉ số thứ tự cho các khái niệm trong π_n mang tính chủ quan, phụ thuộc vào quá trình quan sát thu thập tri thức và các điều kiện, yêu cầu nghiên cứu nào đấy. Trong khi đó cấu trúc logic được phản ánh trong L_n giữa các khái niệm xác định ấy lại mang tính khách quan. Tính khách quan đó là điều thực sự đáng quan tâm và cần được lột tả thực chất từ những thể hiện biểu kiến rất đa dạng bề ngoài. Để giải quyết vấn đề đó ta đưa ra khái niệm về sự đẳng cấu giữa các LĐLGĐX.

Định nghĩa 2.1. Hai LĐLGĐX $\{\pi_n, L_n\}$ và $\{\pi'_n, L'_n\}$ được gọi là đẳng cấu nếu tồn tại song ánh $\theta : \pi_n \to \pi'_n$ sao cho các ảnh của chúng đẳng cấu, nghĩa là có các hệ thức tương đương sau đây:

q_1: $\varphi(\alpha_l) = \varphi(\alpha_m) \longleftrightarrow \varphi(\alpha'_l) = \varphi(\alpha'_m)$ (bằng)

q_2: $\varphi(\alpha_l) \subset \varphi(\alpha_m) \wedge \varphi(\alpha_m) \not\subset \varphi(\alpha_l) \longleftrightarrow \varphi(\alpha'_l) \subset \varphi(\alpha'_m) \wedge \varphi(\alpha'_m) \not\subset \varphi(\alpha'_l)$ (lồng)

q_3: $\varphi(\alpha_l) \sqcap \varphi(\alpha_m) \wedge \varphi(\alpha_l) \not\subset \varphi(\alpha_m) \wedge \varphi(\alpha_m) \not\subset \varphi(\alpha_l) \longleftrightarrow$
$\varphi(\alpha'_l) \sqcap \varphi(\alpha'_m) \wedge \varphi(\alpha'_l) \not\subset \varphi(\alpha'_m) \wedge \varphi(\alpha'_m) \not\subset \varphi(\alpha'_l)$ (giao)

q_4: $\varphi(\alpha_l) \pitchfork \varphi(\alpha_m) \longleftrightarrow \varphi(\alpha'_l) \pitchfork \varphi(\alpha'_m)$ (rời)

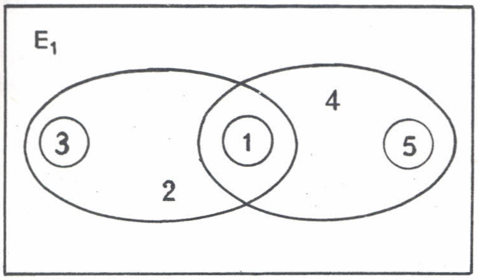
trong đó: $\alpha'_l = \theta(\alpha_l)$, $\alpha'_m = \theta(\alpha_m)$.

Sự đẳng cấu này thể hiện quan hệ logic nội tại khách quan tương tự giữa hai hệ thống khái niệm π_n và π'_n.

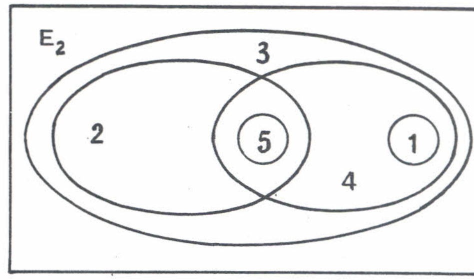
Để nhận biết sự đẳng cấu giữa các LĐLGĐX, cần nghiên cứu cách ghi chỉ số thứ tự trên các miền phân hoạch của từng ảnh của các LĐLGĐX ấy.

Chú thích: Trong không gian một chiều (đường thẳng) có khái niệm về đẳng cấu thứ tự (đứng trước) theo trật tự tuyến tính. Ở đây trong không gian hai chiều (mặt phẳng) có khái niệm về đẳng cấu theo trật tự (thứ tự mở rộng) như định nghĩa cơ bản 2.1 trên về sự bảo toàn 4 loại quan hệ q_1: "bằng", q_2: "lồng", q_3: "giao", q_4: "rời".

Chẳng hạn xét hai LĐLGĐX L_1 và LĐLGĐX L_2 ứng với hai ảnh sau:

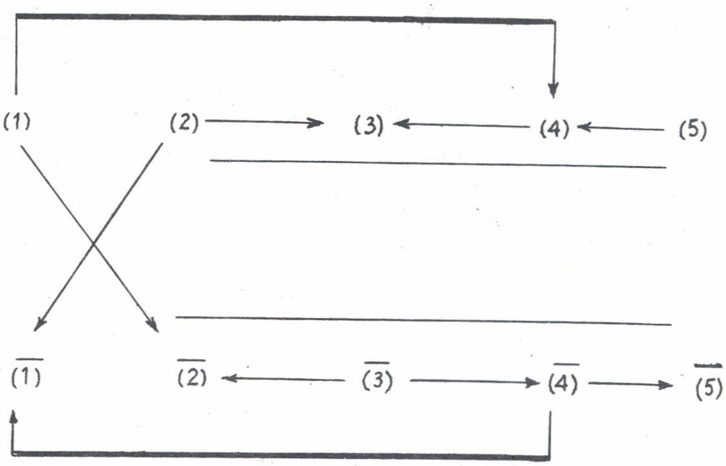


Hình 1. "Ảnh" của LĐLGĐX L_1



Hình 2. "Ảnh" của LĐLGĐX L_2

Các LĐLGĐX này đẳng cấu, vì với hai cách ghi chỉ số thứ tự trên các miền phân hoạch của từng "ảnh" như vậy thì "đồ thị" của các LĐLGĐX L_1 và L_2 tương ứng sẽ trùng nhau và là:

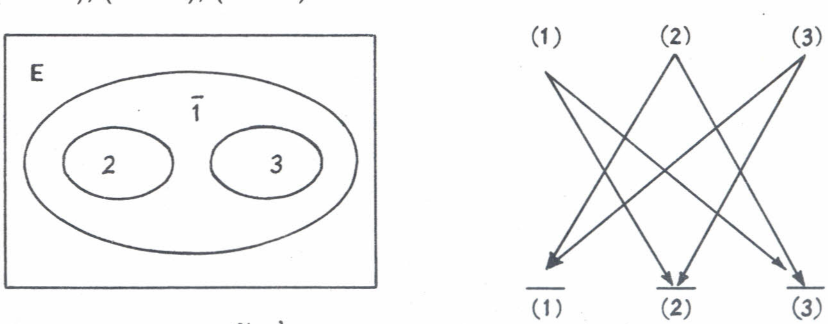


"Đồ thị" của hai LĐLGĐX L_1 và LĐLGD L_2 là hoàn toàn trùng nhau

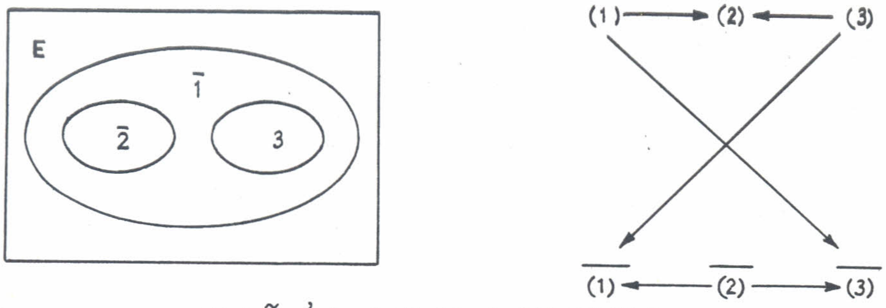
Do vậy các cách ghi chỉ số thứ tự trên các miền phân hoạch của "ảnh" có ý nghĩa quan trọng đối với việc phát hiện sự đẳng cấu giữa các LĐLGĐX.

1) Một ảnh có thể được biểu diễn bởi nhiều đồ thị:

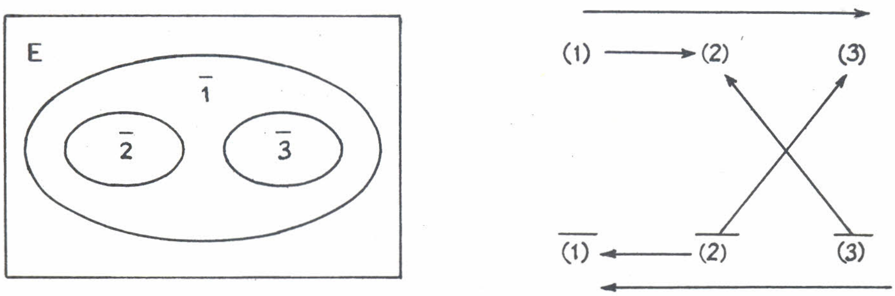
Chẳng hạn một ảnh sau đây với 3 cách ghi chỉ số thứ tự khác nhau sẽ được biểu diễn bởi 3 đồ thị khác nhau (hình $\tilde{1}$), (hình $\tilde{2}$), (hình $\tilde{3}$).



Hình $\tilde{1}$. Ảnh và đồ thị của LĐLGĐX $\mathcal{L}_{\tilde{1}}$



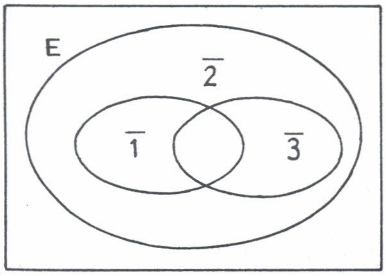
Hình $\tilde{2}$. Ảnh và đồ thị của LĐLGĐX $\mathcal{L}_{\tilde{2}}$



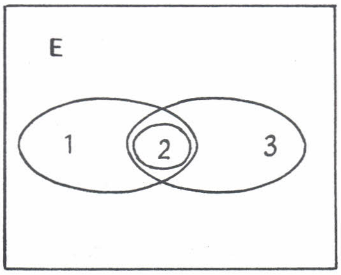
Hình $\tilde{3}$. Ảnh và đồ thị của LĐLGĐX $\mathcal{L}_{\tilde{3}}$

2) <u>Ngược lại một "đồ thị" có thể được biểu diễn bởi nhiều "ảnh"</u>:

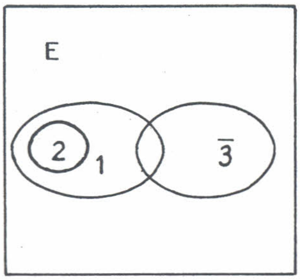
Với những cách ghi chỉ số thứ tự thích hợp trên các ảnh khác nhau (hình $\overline{1}$), (hình $\overline{2}$), (hình $\overline{3}$) chúng lại được cùng biểu diễn bởi một đồ thị duy nhất (hình $\overline{4}$).



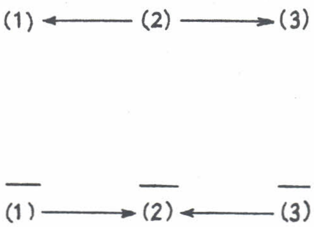
Hình $\overline{1}$. "Ảnh" của LĐLGĐX $\mathcal{L}_{\overline{1}}$



Hình $\overline{2}$. "Ảnh" của LĐLGĐX $\mathcal{L}_{\overline{2}}$



Hình $\overline{3}$. "Ảnh" của LĐLGĐX $\mathcal{L}_{\overline{3}}$



Hình $\overline{4}$. "Đồ thị" của LĐLGĐX $\mathcal{L}_{\overline{1}}\mathcal{L}_{\overline{2}}\mathcal{L}_{\overline{3}}$

Định nghĩa 2.2. Hai "đồ thị" của LĐLGĐX được gọi là đẳng cấu nếu chúng là "đồ thị" của cùng một "ảnh" (của LĐLGĐX) hay của các ảnh đẳng cấu.

Từ đó hiển nhiên suy ra: các LĐLGĐX ứng với các "đồ thị" đẳng cấu thì đẳng cấu và ngược lại.

Quá trình thu thập và biểu diễn tri thức về một hệ các khái niệm thường được ghi nhận dưới dạng "ảnh" hay "đồ thị" của LĐLGĐX chứa hệ khái niệm ấy. Để có căn cứ đánh giá số lượng các LĐLGĐX cấp n khác nhau (đối với từng chỉ số n) ta cần có những qui ước như sau:

Định nghĩa 2.3. - Hai "đồ thị" của LĐLGĐX cấp n được gọi là đồng nhất, nếu chúng trùng nhau tất cả các đỉnh và tất cả các cạnh.

- Hai LĐLGĐX cấp n được gọi là khác nhau nếu các đồ thị của chúng không đồng nhất.

Từ các định nghĩa trên ta thấy: với các "đồ thị" đẳng cấu sẽ có cách thay đổi chỉ số thứ tự ghi trên các đỉnh (là một cách đặt tên lại các đỉnh) sao cho chúng trở thành các "đồ thị" đồng nhất.

Với quan niệm này số lượng các LĐLGĐX cấp n sẽ tăng rất nhanh theo n. Tuy nhiên nếu gọi các LĐLGĐX đẳng cấu là cùng một "kiểu" thì số "kiểu" các LĐLGĐX cấp n sẽ tăng chậm hơn nhiều so với số lượng các LĐLGĐX cấp n ấy.

Xác định số "kiểu" các LĐLGĐX cấp n là bài toán về phân lớp tương đương theo quan hệ đẳng cấu. Bài toán ấy có xuất phát điểm như sau: Quan hệ đẳng cấu giữa các LĐLGĐX cấp n là một quan hệ tương đương. Do vậy tập tất cả các LĐLGĐX cấp n được chia thành $T(n)$ lớp tương đương theo quan hệ đẳng cấu. $T(n)$ là số tất cả các "kiểu" khác nhau của tập các LĐLGĐX cấp n.

Trong mỗi lớp tương đương, lại được chọn ra một đồ thị thuận lợi nhất (trong cách biểu diễn) đại diện cho cả lớp tương đương đó. Đồ thị ấy được gọi là đồ thị dưới dạng "chuẩn tắc".

Vấn đề chỉ ra số $T(n)$ (số các "kiểu") và chỉ ra các "kiểu" LĐLGĐX tương ứng (các đồ thị dạng "chuẩn tắc") là bài toán cơ bản trong nghiên cứu về lý thuyết các SĐ, LĐLGĐX - nó có ý nghĩa trong những vấn đề của tin học và cấu trúc toán.

3. VỀ SỰ ĐẲNG CẤU CỦA MỘT SỐ LƯỢC ĐỒ LOGIC ĐỐI XỨNG CỤ THỂ

Mục tiêu của phần này là qua một số thí dụ minh họa cụ thể, nêu lên được ý nghĩa của sự đẳng cấu giữa các LĐLGĐX trong biểu diễn tri thức. Những thí dụ được lựa chọn trong biểu diễn tri thức toán về những nội dung quen biết của giải tích toán học, những mệnh đề toán học được phát biểu nói chung là đơn giản và quen thuộc. Tuy nhiên chủ đề muốn nêu ở đây là với khái niệm về sự đẳng cấu giữa các LĐLGĐX, cho phép thấy được sự "tương đồng" giữa hàng loạt các mệnh đề trong ba khu vực khác nhau của giải tích toán học: số, chuỗi số, hàm số.

Trước tiên ta chọn các không gian cơ sở, trên đó hình thành những khái niệm toán học tương ứng:

- Chọn E^1 là không gian các số thực x ($x \in R = E^1$), trên đó hình thành lần lượt các khái niệm toán học: số đại số, số hữu tỷ, phân số thuần túy (được qui ước là phân số mà không phải số nguyên), số nguyên, cùng các khái niệm toán học phủ định của chúng.

- Chọn E^2 là không gian các chuỗi số:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ (a_n \in R),$$

trên đó hình thành lần lượt các khái niệm toán học: chuỗi tựa hội tụ (được qui ước là chuỗi có tính chất: a_n dần đến 0 khi $n \to \infty$), chuỗi hội tụ, chuỗi bán hội tụ, chuỗi không hội tụ tuyệt đối, cùng các khái niệm toán học phủ định của chúng.

- Chọn E^3 là không gian các hàm số $f(x)$ xác định tại x_0 và lân cận ($x, x_0 \in R$). Trên đó hình thành lần lượt các khái niệm toán học: hàm số khả vi, chỉ khả vi hữu hạn, khả vi vô hạn, liên tục tại x_0 và lân cận, cùng các khái niệm toán học phủ định của chúng.

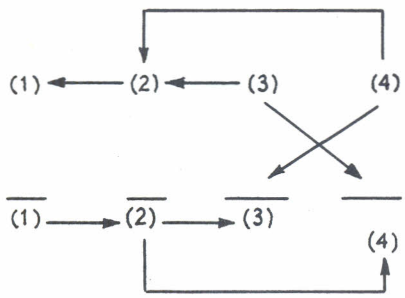
Người ta đã chứng tỏ được các khái niệm toán học trên đều không tầm thường đối với các không gian cơ sở tương ứng. Vì vậy theo nguyên lý quan hệ tất yếu, chắc chắn sẽ tồn tại duy nhất (theo nghĩa đẳng cấu) các LĐLGĐX cấp 4: L^1, L^2, L^3, liên kết các khái niệm toán học đã hình thành lần lượt trên các không gian cơ sở E^1, E^2, E^3.

Việc chỉ ra các LĐLGĐX L^1, L^2, L^3 được tiến hành theo các bước như sau:

- Chứng minh trực tiếp một số tối thiểu các mệnh đề trong từng "hạch" của từng LĐLGĐX.
- Sử dụng "bộ suy diễn" suy ra tất cả các mệnh đề còn lại của từng LĐLGĐX ấy.

Cuối cùng thu được các kết quả như sau:

Đồ thị

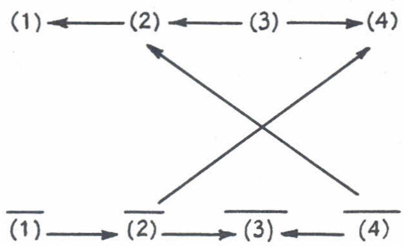


Bảng quan hệ tương ứng

$[1,2)$	$[2,3)$	$]3,4[$	$]4,\overline{1}[$
$[1,3)$	$[2,4)$	$]3,\overline{1}[$	$]4,\overline{2}[$
$[1,4)$	$]2,\overline{1}[$	$]3,\overline{2}[$	$(4,\overline{3}]$
$]1,\overline{1}[$	$]2,\overline{2}[$	$]3,\overline{3}[$	$]4,\overline{4}[$
$(1,\overline{2})$	$(2,\overline{3})$	$(3,\overline{4}]$	$(\overline{1},\overline{2}]$
$(1,\overline{3})$	$(2,\overline{4})$	$(\overline{2},\overline{3}]$	$(\overline{1},\overline{3}]$
$(1,\overline{4})$	$(\overline{3},\overline{4})$	$(\overline{2},\overline{4}]$	$(\overline{1},\overline{4}]$

Hình I. Đồ thị và bảng quan hệ của LĐLGĐX L^1

Đồ thị

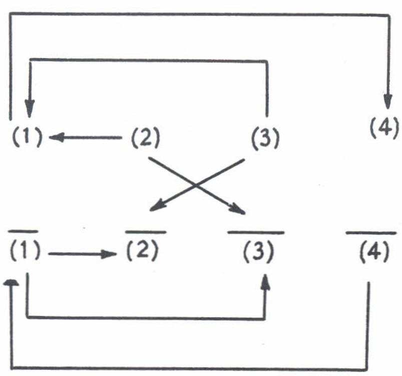


Bảng quan hệ tương ứng

$[1,2)$	$[2,3)$	$(3,4]$	$[4,\overline{1})$
$[1,3)$	$(2,4)$	$]3,\overline{1}[$	$[4,\overline{2})$
$(1,4)$	$]2,\overline{1}[$	$]3,\overline{2}[$	$(4,\overline{3})$
$]1,\overline{1}[$	$]2,\overline{2}[$	$]3,\overline{3}[$	$]4,\overline{4}[$
$(1,\overline{2})$	$(2,\overline{3})$	$]3,\overline{4}[$	$(\overline{1},\overline{2}]$
$(1,\overline{3})$	$[2,\overline{4})$	$(\overline{2},\overline{3}]$	$(\overline{1},\overline{3}]$
$[1,\overline{4})$	$[\overline{3},\overline{4})$	$]\overline{2},\overline{4}[$	$]\overline{1},\overline{4}[$

Hình II. Đồ thị và bảng quan hệ của LĐLGĐX L^2

Đồ thị



Bảng quan hệ tương ứng

$[1,2)$	$]2,3]$	$(3,4]$	$(4,\overline{1})$
$[1,3)$	$(2,4]$	$]3,\overline{1}[$	$(4,\overline{2})$
$(1,4]$	$]2,\overline{1}[$	$(3,\overline{2}]$	$(4,\overline{3})$
$]1,\overline{1}[$	$]2,\overline{2}[$	$]3,\overline{3}[$	$]4,\overline{4}[$
$(1,\overline{2})$	$(2,\overline{3}]$	$]3,\overline{4}[$	$(\overline{1},\overline{2}]$
$(1,\overline{3})$	$]2,\overline{4}[$	$(\overline{2},\overline{3})$	$(\overline{1},\overline{3}]$
$]1,\overline{4}[$	$[\overline{3},\overline{4})$	$[\overline{2},\overline{4})$	$[\overline{1},\overline{4})$

Hình III. Đồ thị và bảng quan hệ của LĐLGĐX L^3

Các LĐLGĐX L^1, L^2, L^3 khác nhau - vì chúng có các "đồ thị" và "bảng quan hệ" khác nhau thể hiện ở các hình I, II, III. Tuy nhiên chúng cùng cấp và cùng số lượng các quan hệ loại 1, loại 2, loại 3, loại 4 như nhau. Cụ thể là chúng cùng có $n = 4$, $p = 0$, $q = 12$, $r = 6$, $s = 6$.

Người ta còn thấy các LĐLGĐX này là đẳng cấu. Sự nhận biết này được thể nghiệm bằng phương pháp thử trực tiếp - phương pháp hoán vị các đỉnh đồ thị - xếp lại chỉ số chỉ các khái niệm toán học theo trình tự sau đây:

(1)	Số đại số	Chuỗi tựa hội tụ	Hàm số liên tục tại x_0 và lân cận
(2)	Số hữu tỷ	Chuỗi hội tụ	Hàm số khả vi tại x_0 và lân cận
(3)	Phân số thuần túy	Chuỗi bán hội tụ	Hàm chỉ khả vi hữu hạn tại x_0 và lân cận
(4)	Số không nguyên	Chuỗi không hội tụ tuyệt đối	Hàm không khả vi vô hạn tại x_0 và lân cận

và $\overline{(1)}$, $\overline{(2)}$, $\overline{(3)}$, $\overline{(4)}$ là các khái niệm toán học phủ định tương ứng của (1), (2), (3), (4) (trong từng không gian cơ sở).

Với thứ tự này "đồ thị" và "bảng quan hệ" của các LĐLGĐX L^1 và L^3 cùng được đưa về "đồ thị" và "bảng quan hệ" của LĐLGĐX L^2 (hình II) và đồ thị của L^2 có thể được chọn làm dạng "chuẩn tắc". Vậy ba LĐLGĐX L^1, L^2, L^3 từng cặp là đẳng cấu với nhau - chúng cùng "kiểu".

Khi ấy hiển nhiên nhận biết được sự đẳng cấu giữa ba khu vực khác nhau của giải tích toán học: nhìn vào "bảng quan hệ" (hình II) của LĐLGĐX L^2 dễ dàng phát biểu được theo trình tự logic tất cả các mệnh đề - gồm ba loạt 56 mệnh đề hoàn toàn "tương tự" (hay 56 nhóm ba mệnh đề tương ứng) trong các LĐLGĐX L^1, L^2, L^3 (trên ba không gian cơ sở khác nhau). Chẳng hạn:

Nhóm mệnh đề thứ 53[1]: $\overline{(1)} \longrightarrow \overline{(3)}$ (là nhóm mệnh đề loại 1)

"Mọi số siêu việt, không thể là phân số thuần túy"
"Mọi chuỗi không tựa hội tụ, không thể bán hội tụ"
"Mọi hàm không liên tục, không thể khả vi hữu hạn"

Nhóm mệnh đề thứ 52[2]: $\overline{(2)} \longleftrightarrow \overline{(1)}$ (là nhóm mệnh đề loại 2)

"Tồn tại số vô tỷ đồng thời là số đại số"
"Tồn tại chuỗi phân kỳ đồng thời tựa hội tụ"
"Tồn tại hàm số không khả vi đồng thời liên tục"

Dĩ nhiên các LĐLGĐX đẳng cấu sẽ có hệ thống các "hạch" như nhau. Vì vậy về nguyên tắc dựa vào "bộ suy diễn" có thể lập được những mô tơ suy diễn chung, để từ các "hạch" tương ứng trên các không gian cơ sở khác nhau (từ những cơ sở tri thức khác nhau về nội dung) sẽ tự động cho được các hệ tri thức đầy đủ tương ứng (có các nội dung ngữ nghĩa khác nhau). Điều này cũng tương tự như đối với các hệ "mê-ta", hệ "rỗng" trong các hệ chuyên gia (shell of expert systems).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] A. Kaufmann, *Introduction à la Théorie des Sous Ensembles Flous, Tom 1: Éléments Théoriques de Base*, Masson, Paris - New York - Baccelone - Milan, 1977.

[2] H. Rasiowa, *Introduction to Modern Matematics*, The english edition: PWN Jointly with North Holland and American Elsevier Publishing Company, 1973.

[3] Phan Chí Vân, Luận án "Sơ đồ, lược đồ logic đối xứng và ứng dụng", Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, 1993.

Nhận bài ngày 12 - 12 - 1999

Trường Đại học Bách khoa Hà Nội

[1,2] theo một thứ tự đã qui ước trên "bảng quan hệ" của LĐLGĐX L^2