Tạp chí CƠ HỌC 1980 số 4 (trang 26 – 30)

VỀ ĐỘ CỨNG HÌNH TRỤ CỦA BẢN HAI LỚP

NGUYỄN VĂN LẠP

NGÀY nay trong nhiều ngành kỹ thuật xuất hiện loại bản cấu tạo bởi hai lớp hoặc nhiều lớp vật liệu khác nhau. Những lớp này được liên kết với nhau và coi là cùng làm việc như một thể thống nhất. Từ thực tế đó đã nảy sinh các công trình nghiên cứu về bản nhiều lớp [1], [2], [3], [4]. Nhìn chung lý thuyết và những phương pháp tính bản nhiều lớp chưa hoàn chỉnh.

Còn về bản hai lớp, trong nghiên cứu lý thuyết người ta dùng các phương trình liên tục để biểu diễn nội lực (biến dạng) và chuyển vị. Trong tính toán người ta thường đưa bản hai lớp về một bản tương đương [7] thông qua việc dùng một độ cứng tương đương [5]. Một hướng khác dựa trên giả định nhằm phản ánh một tình trạng thực tế là tại mặt tiếp xúc giữa hai lớp khó có điều kiện đảm bảo biến dạng là liên tục nên đã dùng phương pháp phần tử hữu hạn để tính toán [7].

Bài này giới thiệu các công thức tính độ cứng hình trụ của bản hai lớp, vật liệu phân bố không đối xứng về mặt vật lý cũng như về mặt hình học đối với mặt trung hòa của bản, trong đó có xét tới biến dạng ngang của mỗi lớp mà các công thức tính độ cứng tương đương có trước đã bỏ qua. Với những kết quả này ta có thể tính bản hai lớp bằng các phương trình và công thức chính xác về mặt lý thuyết của bản một lớp mà vẫn đảm bảo được tính đơn giản khi áp dụng.

Khi xây dựng các công thức, ngoài những giả thiết đã được công nhận trong lý thuyết tính bản, ở đây đã bổ sung thêm những giả thiết sau :

– Vật liệu của mỗi lớp đồng nhất và đẳng hướng,

– Tại mặt tiếp xúc giữa hai lớp biểu đồ biến dạng thì liên tục còn biểu đồ ứng suất thì gián đoạn ;

Đồng thời cách tính được đưa về sử dụng các kết quả của bài toán bản một lớp.

Căn cứ vào các giả thiết đã chấp nhận và kết hợp với biểu đồ ứng suất và biến dạng của phân tố bản khi làm việc uốn được biểu diễn như trên hình vẽ.

Ở đây xét ba trường hợp :

A – BẢN BỊ UỐN THÀNH MẶT TRỤ

Trường hợp này biến dạng tương đối theo phương y được coi là bằng không ($\varepsilon_y = 0$) và khi đó theo định luật Húc ta có biểu thức ứng suất ở mỗi lớp như sau :

$$\sigma_{x1} = \frac{E_1\varepsilon_x}{(1-\nu_1^2)} \; ; \; \sigma_{x2} = \frac{E_2\varepsilon_x}{(1-\nu_2^2)} \, . \qquad (1)$$

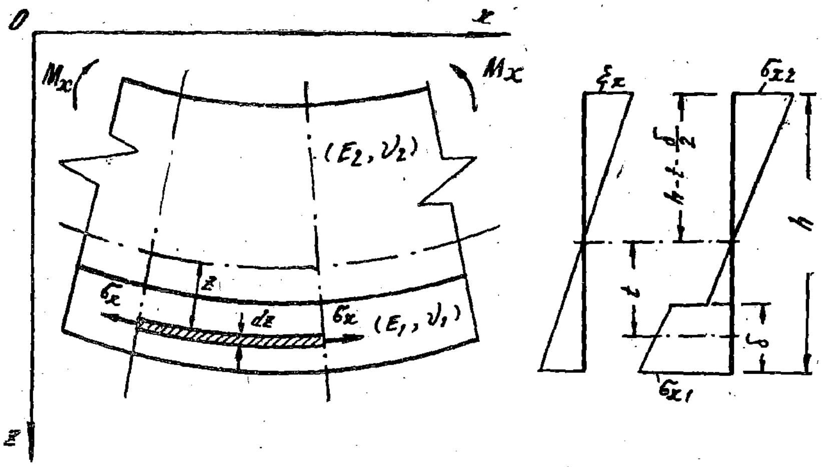
Chỉ số 1, 2 biểu diễn thứ tự lớp.

Như trong tính bản một lớp [5] biến dạng của thớ cách trục trung hòa một khoảng Z sẽ bằng $-Z\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}$, do đó :

$$\sigma_{x1} = -\frac{EZ}{1-\nu^2}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\;;\;\sigma_{x2} = -\frac{\eta_2^2 EZ}{\eta_1(\eta_2^2-\nu_2^2)}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \tag{2}$$

Trong đó $E_1 = E$, $\nu_1 = \nu$; $\eta_1 = \dfrac{E_1}{E_2}$; $\eta_2 = \dfrac{\nu_1}{\nu_2}$

(E_1, E_2, ν_1, ν_2 – mô đun đàn hồi và hệ số Poisson của lớp 1,2).



Mômen của một dải lấy để tính toán được xác định như sau :

$$M_x = -\left[\int_{-(t+\delta/2)}^{-(t-\delta/2)} \frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}Z^2 dZ + \int_{-(t+\delta/2)}^{0}\frac{\eta_2^2 E}{\eta_1(\eta_2^2-\nu^2)}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}Z^2 dZ + \int_{0}^{(h-t-\delta/2)}\frac{\eta_2^2 E}{\eta_1(\eta_2^2-\nu^2)}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}Z^2 dz\right] \tag{3}$$

Sau khi lấy tích phân và ký hiệu như [5] ta có độ cứng trụ của bản hai lớp :

$$\mathcal{D} = \frac{E}{1-\nu^2}R + \frac{\eta_2^2 E}{3\eta_1(\eta_2^2-\nu^2)}\cdot S \tag{4}$$

Trong đó :

$$R = \frac{12t^2\delta + \delta^3}{12}$$

$$S = \left(t-\frac{\delta}{2}\right)^3 + \left(h-t-\frac{\delta}{2}\right)^3$$

Khi sử dụng công thức (4) ngoài kích thước hình học đã cho (h. δ) và các đặc trưng cơ lý (E_1, ν_1 . E_2. ν_2) tương ứng cần phải có trị số t — khoảng cách từ trọng tâm lớp 1 đến mặt trung hòa của bản. Để rút công thức tính trị số t đã dựa vào các mối liên quan trên biểu đồ ứng suất, biến dạng và điều kiện cân bằng hình chiếu của các thành phần ứng suất lên trục x. Công thức đó có dạng như sau:

$$t = \frac{h^2 + (\eta_1 - 1)}{2\delta(\eta_1 - 1) + 2h} - \frac{\delta}{2} \tag{5}$$

B — BẢN BỊ UỐN THÀNH MẶT CẦU

Trong trường hợp này $\varepsilon_x \neq 0$, $\varepsilon_y \neq 0$. Trước hết xét phương x, ứng suất trong mỗi lớp được biểu diễn như sau:

$$\sigma_{x1} = -\frac{E_1 Z}{1-\nu_1^2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)$$
$$\sigma_{x2} = -\frac{E_2 Z}{1-\nu_2^2}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right) \tag{6}$$

Bản bị uốn thành mặt cầu nên $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$. Do đó ta lại có:

$$\sigma_{x1} = -\frac{E_1 Z}{1-\nu_1^2}(1+\nu_1)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$$
$$\sigma_{x2} = -\frac{E_2 Z}{1-\nu_2^2}(1+\nu_2)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \tag{7}$$

Sau khi thay η_1, η_2 vào (7) và lấy tích phân như dạng (3) ta có:

$$M_x = -\left[\mathcal{D}(1+\nu) + \rho S\right]\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \tag{8}$$

và cũng tương tự ta được:

$$M_y = -\left[\mathcal{D}(1+\nu) + \rho S\right]\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \tag{9}$$

Như vậy:

$$\mathcal{D}_x = \mathcal{D}_y = \mathcal{D}(1+\nu) + \rho S \tag{10}$$

Trong đó:

$$\rho = \frac{\nu E \eta_2(1-\eta_2)}{3\eta_1(\eta_2^2 - \nu^2)}$$

C — BẢN BỊ UỐN THÀNH MẶT BẤT KỲ

Trường hợp này đã dùng các phương trình của bản trực hướng [5], [2] với việc thay:

$$E_x = E_y = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad E'' = \frac{\nu E}{1-\nu^2}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Lúc đó ta có thể viết được các biểu thức của ứng suất trong từng lớp như sau :

$$\sigma_{x1} = -Z\left(\frac{E_1}{1-\nu_1^2}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\nu_1 E_1}{1-\nu_1^2}\,\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right); \tag{11}$$

$$\sigma_{x2} = -Z\left(\frac{E_2}{1-\nu_2^2}\,\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\nu_2 E_2}{1-\nu_2^2}\,\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right).$$

$$\mathcal{T}_{xy1} = -\,2G_1Z\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y};\quad \mathcal{T}_{xy2} = -\,2G_2Z\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}. \tag{11'}$$

Theo trình tự đã tiến hành ở trên và thực hiện một số bước biến đổi thông thường ta cũng có dạng:

$$M_x = -\left[\mathcal{D}_x\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mathcal{D}_1\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right];$$

$$M_y = -\left[\mathcal{D}_y\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mathcal{D}_1\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right]. \tag{12}$$

$$M_{xy} = -\mathcal{D}_{xy}\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}. \tag{13}$$

Trong đó :

$$\mathcal{D}_x = \mathcal{D}_y = \mathcal{D} \tag{14}$$

$$\mathcal{D}_1 = \nu\mathcal{D} + \rho S \tag{15}$$

$$\mathcal{D}_{xy} = \frac{1}{2}\left[\mathcal{D}(1-\nu) - \rho S\right] \tag{16}$$

Từ (12) nếu thay $\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}$ ta sẽ được công thức (8) và thay $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0$ ta được công thức (4) và nếu thay $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 1$ và $\delta = 0$ vào công thức (5) ta có $t = \frac{h}{2}$ và thay tiếp $t = \frac{h}{2}$ vào công thức (4) ta sẽ được $\mathcal{D} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — độ cứng trụ của bản một lớp.

Như vậy với các công thức về độ cứng của bản tìm được ở trên, ta có thể tính bản hai lớp bằng các phương trình và công thức tính bản một lớp.

Địa chỉ .
Viện Kỹ thuật Giao thông

Nhận ngày 20/5/1980

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ГУСЕЙ-ЗАДЕ М.И. Построение теории изгиба слоистых пластинок. Труды VI всесоюзной конференции по теории оболочки и пластинок. М., наука, 1966.

2. ЛЕХНИЦКИЙ С.Г. Анизотропные пластинки. Москва, 1957.

3. РАППОПОРТ Р.М. Некоторые вопросы теории изгиба толстых и тонких трехслойных плит. Расчет пространственных конструкций, вып. VIII, Гостройиздат, 1962.

4. КУРШИН Л.М. Обзор по расчёту трехслойных пластин и оболочек. Сб. Расчёт пространственных конструкций, вып. VII Гостройиздат, 1962.

5. ТИМОШЕНКО С.П. и СВОЙНОВСКИ-КРИГЕР С. Пластинки и оболочки. Физматгиз, 1963.

6. САМУЛ В.И. Основы теорий упругости и пластичности. Москва, 1970.

7. MOFFATT K. R. LIM P. TK. Finite element analysis of composit box girder bridges having complete or incomplete interaction. Proceedings of the institution of civil engineers Part 2, volume 61, march 1976.

РЕЗЮМЕ

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЖЕСКОСТЕЙ ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛИТ

В статье излагаются формулы определенияц илиндрических жескостей двухслойных плит, материалы которых распределяются по закону физической и геометрической несимметрии относительно нейтральной поверхности.

В разработанных формулах учтена поперечная сжатая деформация кождого слоя, которая в расчетах других авторов обычно пренебрегается.

Благодаря этим формулам можно выпольийть расчет двухслойных плит с помощью точных уравнений и формул для однослойных плит.