

VỀ TÁC DỤNG CỦA NGẪU LỰC VÀ QUAN HỆ ĐỐI NGẪU CHUYỂN VỊ - NỘI LỰC CỦA THANH KHÔNG GIAN

VŨ ĐÌNH LAI

§ 1. MỞ ĐẦU

Tính tương tự liên hiệp hay tính đối ngẫu chuyển vị - nội lực của dầm thẳng đã được O. Mo nghiên cứu từ lâu, không những được ứng dụng phổ biến trong kỹ thuật mà còn được mở rộng ra bài toán động của thanh và khung bằng những cặp đối ngẫu khác [1,2].

Gần đây trên [3], M. Phaset và B. Taybaroc đã mở rộng ra bài toán thanh cong không gian thoả trên cơ sở hai nhóm phương trình:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{Q}}{ds} &= \bar{f}, \\ \frac{d\bar{M}}{ds} + \bar{t} \wedge \bar{Q} &= \bar{m}, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

và

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{\theta}}{ds} &= \bar{I} \bar{M}, \\ \frac{d\bar{v}}{ds} + \bar{t} \wedge \bar{\theta} &= \bar{A} \bar{Q}, \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

trong đó:

\bar{Q} , \bar{M} : lực và mômen nội lực; \bar{f} , \bar{m} : lực và ngẫu lực phân bố; $\bar{\theta}$, \bar{v} : góc quay và chuyển vị dài; \bar{t} : vectơ đơn vị tiếp tuyến với trục thanh; \bar{A} , \bar{I} : ma trận độ mềm diện tích và mômen quán tính của mặt cắt, và phát biểu định lý: *Trường chuyển vị và góc quay của thanh dưới tác dụng của ngẫu lực cho trước tương tự với trường nội lực (mômen và lực) của thanh liên hiệp chịu tác dụng của trường lực và ngẫu lực tương ứng bằng $\bar{I}\bar{M}$ và $\bar{A}\bar{Q}$ của thanh thực.*

Trong bài này, chúng tôi phân tích về tác dụng của ngẫu lực phân bố mặt ngoài từ đó viết các phương trình cân bằng và chuyển vị, và nêu ra tính đối ngẫu chuyển vị - nội lực của thanh trong trường hợp này.

Đề thiết lập các công thức, cũng như ở [3], ở đây áp dụng lý thuyết Becnuli về dầm và các giả thiết xoắn Xanh Vonăng.

§ 2. HAI TRƯỜNG HỢP ĐẶT NGẪU LỰC PHÂN BỐ VÀ CÁC PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ỨNG

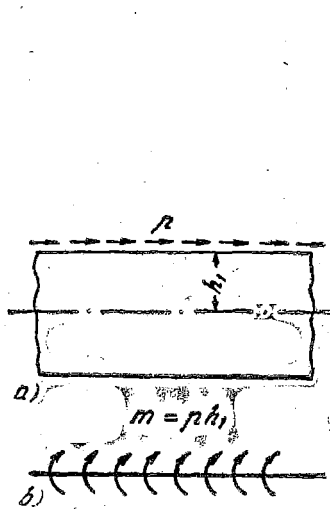
Ngẫu lực phân bố \bar{m} tác dụng vào một thanh thực tế chỉ là kết quả của sự thu gọn tương đương tĩnh học của một dạng ngoại lực nào đó. Trong việc tính nội lực và biến dạng của thanh, sự thu gọn có khi không thích hợp. Do đó khi tính ảnh hưởng của ngẫu lực này, cần xét sự phân bố thực tế của ngoại lực.

2.1. Trường hợp 1.

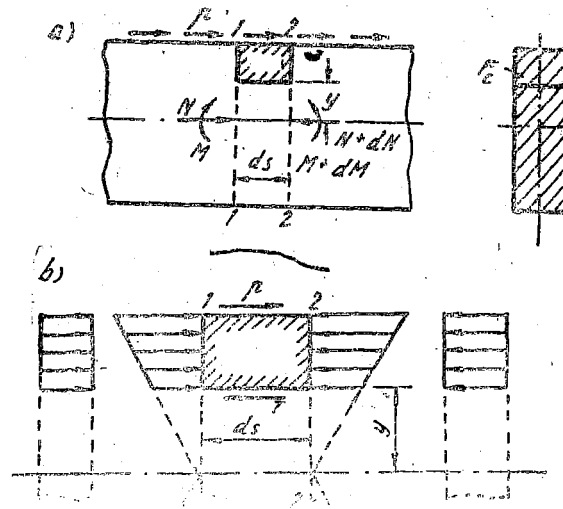
Nếu hai thành phần m_x và m_y (x và y là hai trục nằm trong mặt cắt) của ngẫu lực \bar{m} là do lực thể tích phân bố trên mặt cắt ngang hợp thành thì những ngoại lực này không tạo ra lực cắt và biến dạng trượt cục bộ trong phạm vi đặt lực. Những quan hệ (1.1) và (1.2) chỉ đúng trong trường hợp này.

2.2. Trường hợp 2.

Trong thực tế, ngẫu lực phân bố thường là sự thu gọn tương đương tĩnh học của lực mặt ngoài. Thí dụ trên hình 1, ngẫu lực \bar{m} tác dụng lên thanh thẳng là sự thu gọn của lực p tiếp xúc ở mặt ngoài thanh.



Hình 1



Hình 2

Thành phần m_x (hoặc m_y) của ngẫu lực phân bố \bar{m} tạo ra ứng suất tiếp trên mặt cắt ngang. Những ứng suất tiếp này tạo thêm lực cắt mà ta gọi là lực cắt loại hai Q_2 (để phân biệt với lực cắt loại một Q_1 - lực cắt Giurapxki đã quen thuộc ở các tài liệu Sức bền vật liệu). Để minh họa sự xuất hiện lực cắt này, ta xét một thanh thẳng mặt cắt hình chữ nhật hẹp chịu lực tiếp xúc p phân bố đều trên bề rộng cạnh trên như trên hình 2a.

Tách ở dầm phân bố dài ds và mặt dưới cách trục thanh là y (Hình 2b) rồi lập phương trình cân bằng hình chiếu trên trục thanh của các lực tác dụng vào phần tử, ta được lực trượt T trên một đơn vị chiều dài thanh. Lực này gồm hai thành

phần: thành phần thứ nhất tạo ra lực cắt Giurapxki (ở đây không viết lại), thành phần thứ hai do lực p sinh ra và bằng:

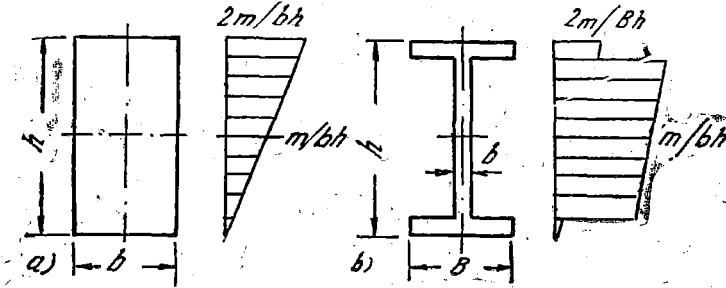
$$T_p = p \left(1 - \frac{F_c}{F} \right) \quad (2.1)$$

trong đó F_c : diện tích phần mặt cắt ngang tính từ tọa độ y , F : diện tích mặt cắt ngang.

Nếu giả thiết ứng suất do T_p phân bố đều trên bề rộng b_y của mặt cắt ngang thì ta có

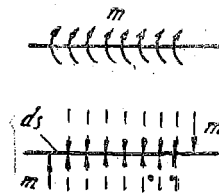
$$\tau_{yp} = \frac{P}{b_y} \left(1 - \frac{F_c}{F} \right). \quad (2.2)$$

Trên hình 3 là biểu đồ phân bố ứng suất tiếp trên mặt cắt hình chữ nhật và hình chữ I trong đó p được thay bằng $2m/b$.

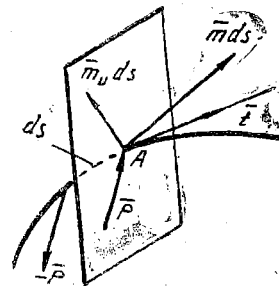


Hình 3

Những ứng suất tiếp ở (2.2) tạo thành lực cắt loại hai. Để thể hiện được lực cắt này, ta có thể phân tích ngẫu lực phân bố thành hai lực vuông góc với trục thanh, bằng nhau và cách nhau ds . Nếu m phân bố đều thì đoạn ngẫu lực phân bố tương đương với hai lực tập trung ở hai đầu đoạn có giá trị bằng m (Hình 4). Ở [4] cũng đã dùng cách phân tích như trên để tránh khái niệm ngẫu lực phân bố, nhưng chỉ với mục đích để áp dụng toán tử tịnh tiến tính ngẫu lực phân bố tương tự như tính lực tập trung.



Hình 4



Hình 5

Nghiên cứu trên thanh cong không gian, ta phân tích ngẫu lực $\overline{m_{uds}}$ tại A (thành phần của $\overline{m_{ds}}$ trên mặt phẳng vuông góc với trục thanh) thành hai lực ngược chiều cách nhau ds (Hình 5). Nếu tại A có lực \overline{P} thì

$$ds \cdot \overline{t \wedge P} = \overline{m_{uds}},$$

hay

$$\bar{P} = -t \Lambda \bar{m}. \quad (2.3)$$

Nếu cũng tại A, ở phía bên phải (Hình 6b) ta phân ngẫu lực $(\bar{m}_u + d\bar{m}_u)$ ds thành hai lực cách nhau ds thì tại A ta cũng có

$$-\bar{P}' = t \Lambda (\bar{m} + d\bar{m}). \quad (2.4)$$

Như vậy tại A có lực phân bố tương đương $\bar{\varphi}$ tính từ quan hệ

$$\bar{\varphi} ds = \bar{P} - \bar{P}' = t \Lambda d\bar{m},$$

hay

$$\bar{\varphi} = t \Lambda \frac{d\bar{m}}{ds}. \quad (2.5)$$

Như vậy tác động của một đoạn ngẫu lực phân bố \bar{m}_u tương đương với một hệ lực gồm hai lực tập trung có giá trị bằng

$$t_1 \Lambda \bar{m}_1 \quad \text{và} \quad -t_2 \Lambda \bar{m}_2 \quad (2.6)$$

đặt ở hai đầu đoạn và lực phân bố ở trong đoạn

$$\bar{\varphi} = t \Lambda \frac{d\bar{m}}{ds} \quad (2.7)$$

Những lực ngang $\bar{\varphi}$ và $t_1 \Lambda \bar{m}_1$, $-t_2 \Lambda \bar{m}_2$ tạo ra lực cắt loại hai, và ta có các phương trình cân bằng của thanh cong không gian.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ_1}{ds} &= \bar{f}, \\ \frac{dQ_2}{ds} &= t \Lambda \frac{d\bar{m}}{ds}, \\ \frac{dM}{ds} + t \Lambda Q_1 &= \bar{m} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Dưới đây ta lập các phương trình chuyển vị.

Như ta đã biết, theo lý thuyết Bernouli về dầm, mômen uốn làm cho các mặt cắt ngang quay tương đối, còn lực cắt làm cho các mặt cắt trượt tương đối. Như vậy lực cắt giurapxki và lực cắt loại hai nói trên tuy có tạo ra độ võng, nhưng không làm cho mặt cắt quay. Do đó khi xét đến

ảnh hưởng của lực cắt, cần phân biệt góc quay của mặt cắt và góc quay của trục thanh, trong khi đó hai góc này vẫn coi như bằng nhau khi không xét đến ảnh hưởng của lực cắt.

Đặt $\bar{\theta}_1$: góc quay của trục thanh do mômen (cũng là góc quay của mặt cắt) và $\bar{\theta}_2$: góc quay của trục thanh do lực cắt, ta có góc quay trục thanh:

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_1 + \bar{\theta}_2 \quad (2.9)$$

Đối với thanh đàn hồi ta có

$$\frac{d\bar{\theta}_1}{ds} = \bar{M}, \quad (2.10)$$

$$\frac{d\bar{\theta}_2}{ds} = K\bar{t} \wedge (\bar{f} + \bar{\varphi}) \wedge \bar{\varphi}. \quad (2.11)$$

Thay (2.7) vào (2.11), ta được

$$\frac{d\bar{\theta}_2}{ds} = K\bar{t} \wedge \bar{f} + (L-K) \frac{d\bar{m}}{ds} \quad (2.12)$$

Ngoài ra giữa góc quay trục thanh và chuyển vị của thanh không gian có chuyển vị bé có quan hệ:

$$\frac{d\bar{v}}{ds} + \bar{t} \wedge \bar{\theta}_1 = A\bar{Q}_1 + (B-A)\bar{Q}_2. \quad (2.13)$$

Trong các quan hệ trên K, L, A, B là những ma trận độ mềm diện tích của mặt cắt.

Sắp xếp các kết quả đã thu được ở trên, ta được hai nhóm phương trình trong trường hợp thanh chịu ngẫu lực mặt ngoài.

$$\frac{d\bar{Q}_1}{ds} = \bar{f}; \quad \frac{d\bar{Q}_2}{ds} = \bar{t} \wedge \frac{d\bar{m}}{ds}; \quad \frac{d\bar{M}}{ds} + \bar{t} \wedge \bar{Q}_1 = \bar{m}. \quad (2.14)$$

$$\frac{d\bar{\theta}_1}{ds} = I\bar{M}; \quad \frac{d\bar{\theta}_2}{ds} = K\bar{t} \wedge \bar{f} + (L-K) \frac{d\bar{m}}{ds}; \quad \frac{d\bar{v}}{ds} + \bar{t} \wedge \bar{\theta}_1 = A\bar{Q}_1 + (B-A)\bar{Q}_2 \quad (2.15)$$

Tính đối ngẫu chuyển vị - nội lực của thanh cong không gian có ngẫu lực mặt ngoài được ghi ở bảng so sánh dưới đây

\bar{M}	\bar{v}
\bar{Q}_1	$\bar{\theta}_1$
\bar{Q}_2	$\bar{\theta}_2$
\bar{f}	$I\bar{M}$
\bar{m}	$A\bar{Q}_1 + (B-A)\bar{Q}_2$
$\bar{t} \wedge \frac{d\bar{m}}{ds}$	$K\bar{t} \wedge \bar{f} + (L-K) \frac{d\bar{m}}{ds}$

§ 3. ÁP DỤNG TRONG TRƯỜNG HỢP ĐƠN GIẢN

Trong trường hợp các trục x và y là những trục đối xứng của mặt cắt thì các phương trình (2.14) và (2.15) thành

$$\frac{d\bar{Q}_1}{ds} = \bar{f}; \quad \frac{d\bar{Q}_2}{ds} = T \frac{d\bar{m}}{ds}; \quad \frac{d\bar{M}}{ds} + T\bar{Q}_1 = \bar{m}. \quad (3.1)$$

$$\frac{d\bar{\theta}_1}{ds} = I\bar{M}; \quad \frac{d\bar{\theta}_2}{ds} = K T \bar{f} + (B-K) \frac{d\bar{m}}{ds}; \quad \frac{d\bar{v}}{ds} + T\bar{\theta}_1 = A\bar{Q}_1 + (B-A)\bar{Q}_2 \quad (3.2)$$

trong đó

$$K = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mu_y GF & 1 & 0 \\ 0 & \mu_x GF & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mu_x GF & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EF} \end{vmatrix}; \quad (3.3)$$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \nu_y GF & 1 & 0 \\ 0 & \nu_x GF & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad T = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad I = \begin{vmatrix} \frac{1}{EJ_x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EJ_y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EJ_z} \end{vmatrix}$$

E, G : môđun đàn hồi loại một và loại hai, F, J_x, J_y, J_z : diện tích, mômen quán tính trục và mômen quán tính xoắn của mặt cắt, μ_x, μ_y : hệ số hiệu chỉnh vì sự phân bố không đều của ứng suất tiếp do lực cắt giurapxki, ν_x, ν_y : hệ số hiệu chỉnh vì sự phân bố không đều của ứng suất tiếp do lực cắt loại hai.

Trong trường hợp thanh thẳng bị uốn phẳng, ta có thể rút ra hai phương trình tương tự:

$$\frac{d^2 M_x}{ds^2} = -f_y + \frac{dm_x}{ds}, \quad (3.4)$$

$$\frac{d^2 \nu_y}{ds^2} = -\frac{M_x}{EJ_x} + \frac{f_y}{\mu_y GF} + \frac{\frac{dm_x}{ds}}{\nu_y GF - \mu_y GF} \quad (3.5)$$

Phân tích tinh đối ngẫu ở (3.4) và (3.5), độ võng của dầm bị uốn phẳng có thể tính bằng mômen uốn của dầm liên hiệp với tải trọng

$$\frac{M_x}{EJ_x} \quad \text{và} \quad \frac{f_y}{\mu_y GF} + \frac{\frac{dm_x}{ds}}{\nu_y GF - \mu_y GF} \quad (3.6)$$

Như vậy nếu xét đến tác dụng của ngẫu lực phân bố, tải trọng liên hiệp có thêm số hạng phụ thuộc m_x so với trường hợp không có ngẫu lực phân bố [5].

§ 4. KẾT LUẬN

1. Trong trường hợp thanh chịu tác dụng của ngẫu lực do lực phân bố mặt ngoài, ngoài lực cắt giurapxki, còn xuất hiện lực cắt loại hai. Về mặt độ cứng, cũng như lực cắt giurapxki, lực cắt loại hai chỉ ảnh hưởng rất bé đến chuyển vị. Trái lại ứng suất tiếp do lực cắt loại hai phân bố trên mặt cắt ngang khác sự phân bố do lực cắt giurapxki và trong một số trường hợp có thể lại lớn hơn ứng suất do lực cắt giurapxki. Vì vậy đối với các kết cấu mà lực cắt có ảnh hưởng nhiều đến độ bền (thí dụ dầm bê tông cốt thép - tình trạng thái ứng suất; dầm ghép, dầm liên hiệp - tình liên kết, v.v...) khi có ngẫu lực do lực mặt ngoài, cần tính ảnh hưởng của lực cắt loại hai cùng với ảnh hưởng của lực cắt giurapxki.

2. Chuyển vị và nội lực của thanh cong thoải không gian trong trường hợp có ngẫu lực do lực mặt ngoài cũng có tính đối ngẫu.

Địa chỉ:

Đại học Giao thông.

Nhận ngày 1-2-1980

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. KARNOPP H. Duality Relations in the Analysis of Beam Oscillations. ZAMP. Vol. 18, 1967.
2. TABARROK B. On Duality in the Oscillations of framed Structures. Journal of Sound and Vibration. Vol. 8, 1968.
3. FARSHAD M. TABARROK B. On generalized conjugate Analogy for spatial Rods. International Journal of Mechanical Sciences. Vol. 18, 1976.
4. ĐROBOT S. MIKUXINXKI J. Toán tử tịnh tiến và ứng dụng vào tĩnh học của dầm. Nhà xuất bản Khoa học. Hà nội, 1961.
5. TIMOSENKO X. Xoprotivlenie materialov. T. 1, Fizmatgiz, Moxkva, 1960.

SUMMARY

ON APPLIED COUPLES EFFECT AND DUALITY RELATIONSHIP IN SPATIAL RODS

In [3] the conjugate analogy is widened for spatial rods and the inherent duality is expressed by means of a theorem.

In this paper, it is shown that the above relationship is only applicable to the case of body couples. The act of surface applied couples on a spatial rod is examined. By this external force, the shearing forces of the second kind occur at the cross-section (the other shearing force is the well-known Jourawski's shearing force).

From obtained equilibrium equations and force-displacement relations the conjugacy in spatial rod in this case of external forces is revealed.