Tạp chí CƠ HỌC 1980 số 4 (trang 12 – 18)

XÁC ĐỊNH DAO ĐỘNG CỦA HỆ CÓ SỐ HẠNG QUÁN TÍNH PHI TUYẾN BẰNG PHƯƠNG PHÁP THAM SỐ BÉ

NGUYỄN VĂN KHANG

§ 1. MỞ ĐẦU

Trong động lực học máy và cơ cấu cũng như trong động lực học công trình ta hay gặp các phương trình vi phân dao động dạng:

$$\ddot{y}_i + \lambda_i y_i = h_i(t) + \varepsilon F_i(t, y_k, \dot{y}_k, \ddot{y}_k), \quad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{1.1}$$

Trong đó $h_i(t)$ là hàm tuần hoàn của t với chu kỳ 2π, $F_i(t, y_k, \dot{y}_k, \ddot{y}_k)$ là hàm giải tích của y_k, $\dot{y}_k$, $\ddot{y}_k$ và tuần hoàn theo t với chu kỳ 2π, còn ε là một tham số dương nhỏ. Như [5] chúng ta sẽ gọi các phương trình vi phân (1.1) là các phương trình dao động có số hạng quán tính phi tuyến.

Trong [1] đã bàn đến việc tính toán nghiệm tuần hoàn của các phương trình (1.1) bằng phương pháp trung bình. Ở đây chúng ta sẽ áp dụng phương pháp tham số bé [2,6] tìm nghiệm tuần hoàn của các phương trình dao động (1.1) trong trường hợp cộng hưởng.

§ 2. NGHIỆM TUẦN HOÀN CỦA MỘT HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CÓ ĐẠO HÀM Ở VẾ PHẢI

Xét hệ phương trình vi phân có đạo hàm ở vế phải

$$\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + f_i(t) + \varepsilon F_i(t, x_k, \dot{x}_k, \varepsilon), \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

Trong đó a_{ij} là các hằng số, f_i và F_i là các hàm tuần hoàn liên tục của t với chu kỳ 2π. Hơn nữa ta giả thiết rằng F_i là hàm giải tích của $x_1, \ldots, x_n, \dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, \varepsilon$. Còn ε là tham số dương nhỏ.

Khi $\varepsilon = 0$ từ (2.1) ta có hệ phương trình suy biến:

$$\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + f_i(t) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.2}$$

Chúng ta sẽ xét trường hợp cộng hưởng. Khi đó phương trình đặc trưng của hệ (2.2)

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \rho \end{vmatrix} = 0 \tag{2.3}$$

có nghiệm dạng $\rho = \pm ip$ (p là số nguyên hoặc số không). Để xác định ta giả thiết rằng phương trình đặc trưng có nghiệm $\rho = 0$ bội tùy ý ứng với k nhóm nghiệm, và có s cặp nghiệm ảo $\rho = \pm ip_j$ ($j = 1, 2, \ldots, s$) bội tùy ý. Mỗi nghiệm trong cặp $\pm ip_j$ ứng với k_j nhóm nghiệm. Theo [2.6] hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất

$$\dot{x}_{io} = a_{i1}x_{1o} + \ldots + a_{in}x_{no} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

có m ($m = k + 2k_1 + \ldots + 2k_s$) nghiệm riêng tuần hoàn chu kỳ 2π độc lập tuyến tính $\varphi_i^{(1)}(t), \ldots, \varphi_i^{(m)}(t)$.

Trong trường hợp này hệ phương trình vi phân tuyến tính liên hợp với (2.4)

$$\dot{y}_j = -a_{1j}y_1 - \ldots - a_{nj}y_n \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

cũng có m nghiệm riêng tuần hoàn chu kỳ 2π : $\Psi_j^{(1)}(t), \ldots, \Psi_j^{(m)}(t)$

Điều kiện cần và đủ để cho hệ phương trình (2.2) có nghiệm tuần hoàn trong trường hợp cộng hưởng là các hàm $f_i(t)$ phải thỏa mãn các điều kiện sau [2,6] :

$$\int_0^{2\pi} \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha(t)\Psi_\alpha^{(i)}(t)dt = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.6}$$

Khi đó các nghiệm tuần hoàn của hệ phương trình (2.2) chứa m hằng số tùy ý $M_1^*, \ldots, M_m^*$:

$$x_{io}(t) = x_{io}^*(t) + M_1^*\varphi_i^{(1)}(t) + \ldots + M_m^*\varphi_i^{(m)}(t) \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{2.7}$$

Trong đó $x_{io}^*(t)$ là các nghiệm riêng tuần hoàn của hệ (2.2)

Như thế khi $\varepsilon = 0$ hệ phương trình vi phân (2.1) có nghiệm tuần hoàn chu kỳ 2π. Do các nghiệm của hệ phương trình này phụ thuộc liên tục vào ε nên xuất hiện bài toán : với ε nhỏ hệ phương trình (2.1) có nghiệm tuần hoàn chu kỳ 2π hay không? Về vấn đề này ta có định lý sau :

Định lý : *Điều kiện cần để cho hệ phương trình vi phân (2.1) trong trường hợp cộng hưởng có nghiệm tuần hoàn chu kỳ 2π là các hằng số M_i^* ($i = 1, \ldots, m$) trong nghiệm tuần hoàn (2.7) của hệ suy biến (2.2) phải thỏa mãn hệ phương trình*

$$P_i(M_1^*, \ldots, M_m^*) = \int_0^{2\pi} \sum_{\alpha=1}^{n} F_\alpha[t, x_{ko}(t), \dot{x}_{ko}(t), 0]\,\psi_\alpha^{(i)}(t)\,dt = 0 \tag{2.8}$$

$$(i = 1, \ldots, m)$$

Mỗi nghiệm đơn của hệ (2.8) ứng với một và chỉ một nghiệm tuần hoàn của hệ (2.1).

Chứng minh: Nghiệm của hệ phương trình (2.1) theo phương pháp Côsi có thể viết dưới dạng:

$$x_i(t) = C_1\bar{x}_i^{(1)} + \ldots + C_n\bar{x}_i^{(n)} + \int_0^t \sum_{\alpha=1}^{n} \bar{x}_i^{(\alpha)}(t-s)f_\alpha(s)ds +$$

$$\varepsilon\int_0^t \sum_{\alpha=1}^{n} \bar{x}_i^{(\alpha)}(t-s)F_\alpha(s, x_k, \dot{x}_k, \varepsilon)ds \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.9}$$

Trong đó:

c_i hằng số tùy ý,

$\overline{x}^{(\alpha)}_i$ hệ cơ bản các nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất (2.4) với các điều kiện đầu $\overline{x}^{1}_{i}(o) = \delta^{j}_{i}$.

Việc tiến hành tiếp tục chứng minh định lý này hoàn toàn tương tự như việc tiến hành chứng minh định lý tương ứng đối với hệ mà ở vế phải không chứa đạo hàm, (xem các trang từ 116 đến 122 trong tài liệu [2]). Đối với hệ một bậc tự do định lý này đã được chứng minh trong [3]. Trong trường hợp không cộng hưởng dễ dàng chứng minh rằng hệ phương trình (2.1) có một và chỉ một nghiệm tuần hoàn.

Trong tính toán thực hành ta tìm nghiệm x_i dưới dạng chuỗi lũy thừa:

$$x_i = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j x_{ij} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.10}$$

Thế (2.10) vào (2.1) rồi so sánh các hệ tử cùng bậc nhỏ ε, ta nhận được các hệ phương trình để xác định x_i:

$$\dot{x}_{io} = a_{i1} x_{1o} + \ldots + a_{in} x_{no} + f_i(t)$$

$$\dot{x}_{i1} = a_{i1} x_{11} + \ldots + a_{in} x_{n1} + F_i(t, x_{k_o}, \dot{x}_{k_o}, o) \tag{2.11}$$

. . . .

§ 3. CÁC CỘNG HƯỞNG ĐƠN VÀ SỰ ỔN ĐỊNH CỦA CHÚNG

Bây giờ ta trở lại xét hệ phương trình dao động (1.1)

$$\ddot{y}_i + \lambda_i y_i = h_i(t) + \varepsilon F_i(t, y_k, \dot{y}_k, \ddot{y}_k) \quad (i = 1, \ldots, N) \tag{3.1}$$

Chúng ta sẽ sử dụng các kết quả đã nêu trong mục 2 để xác định nghiệm tuần hoàn của phương trình (3.1). Trong mục này ta giới hạn xét trường hợp cộng hưởng đơn, tức là chỉ có một tham số λ_i xấp xỉ bằng bình phương của một số tự nhiên nào đó;

$$\lambda_r \approx n^2, \ \lambda_i \neq l^2 (i \neq r; \ n, l = 1, 2, 3, ..) \tag{3.2}$$

Để xét các tần số ở lân cận tần số cộng hưởng ta đưa vào tham số bé α:

$$\lambda_r = \Lambda_r (1 - \varepsilon\alpha) \tag{3.3}$$

$$\Lambda_r = n^2 \tag{3.4}$$

Ngoài ra ta đặt $\qquad \lambda_i = \Lambda_i \ (i \neq r)$

Khi đó các phương trình vi phân (3.1) có dạng:

$$\ddot{y}_i + \Lambda_i y_i = h_i(t) + \varepsilon \Phi_i(t, y_k, \dot{y}_k, \ddot{y}_k) \tag{3.5}$$

$$\Phi_i = F_i + \delta^r_i \Lambda_r \alpha y_r$$

Giả sử rằng khai triển Phuariê của hàm $h_i(t)$ là

$$h_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} (h_{ij}\cos jt + H_{ij}\sin jt)\ (i = 1,\ldots, N) \tag{3.6}$$

Trong trường hợp không cộng hưởng, dễ dàng tính được nghiệm xấp xỉ bậc không:

$$y_{io} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{h_{ij}\cos jt + H_{ij}\sin jt}{\Lambda_i - j^2} \tag{3.7}$$

Trong trường hợp cộng hưởng đơn nghiệm xấp xỉ bậc không có dạng:

$$y_{io} = \delta_i^r (R\cos nt + S\sin nt) + \sum_{j=0}^{\infty} \theta_{ij}^{rn} \frac{h_{ij}\cos jt + H_{ij}\sin jt}{\Lambda_i - j^2} \tag{3.8}$$

Trong đó:

$$\theta_{ij}^{rn} = \begin{cases} 1 \text{ khi } i \neq r \\ 1 \text{ khi } i = r,\ j \neq n \\ 0 \text{ khi } i = r,\ j = n \end{cases} \tag{3.9}$$

Các tham số R, S trong (3.8) được xác định từ các phương trình (2.8). Ở đây các điều kiện (2.8) có dạng:

$$\int_0^{2\pi} \Phi_r \cos ntdt = \int_0^{2\pi} \Phi_r \sin ntdt = 0 \tag{3.10}$$

Sau khi xác định được xấp xỉ bậc không, ta tính tiếp các xấp xỉ bậc một, bậc hai... theo các phương trình (2.11).

Để nghiên cứu sự ổn định của nghiệm tuần hoàn trong trường hợp cộng hưởng đơn ta sử dụng ý của một phương pháp trình bầy trong [7].

Ta xét hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp hai dạng:

$$\ddot{z}_i + \Lambda_i z_i = \varepsilon \sum_{j=1}^{n} [u_{ij}(t)z_j + v_{ij}(t)\dot{z}_j + w_{ij}(t)\ddot{z}_j] \tag{3.11}$$

$$(i = 1,\ldots,N)$$

Trong đó Λ_i là hằng số thực, $u_{ij}(t)$, $v_{ij}(t)$, $w_{ij}(t)$ là các hàm thực liên tục, tuần hoàn theo t chu kỳ 2π. Khai triển Phuariê của các hàm $u_{ij}(t)$, $v_{ij}(t)$, $w_{ij}(t)$:

$$u_{ij}(t) = u_{ijo} + 2\sum_{\gamma=1}^{\infty} (u_{ij\gamma}\cos\gamma t + U_{ij\gamma}\sin\gamma t)$$

$$v_{ij}(t) = v_{ijo} + 2\sum_{\gamma=1}^{\infty} (v_{ij\gamma}\cos\gamma t + V_{ij\gamma}\sin\gamma t) \tag{3.12}$$

$$w_{ij}(t) = w_{ijo} + \sum_{\gamma=1}^{\infty} (w_{ij\gamma}\cos\gamma t + W_{ij\gamma}\sin\gamma t)$$

Theo định lý Flôkê [4] hệ phương trình (3.11) có nghiệm dạng:

$$z_i(t) = e^{\rho t} y_i(t) \quad (i = 1,\ldots, N) \tag{3.13}$$

Trong đó $y_i(t)$ là các hàm tuần hoàn chu kỳ 2π, ρ là số mũ đặc trưng.

Thế (3.13) vào (3.11) ta suy ra hệ phương trình sau:

$$\ddot{y}_i + \Lambda_i y_i = \varepsilon \Phi_i \quad (i = 1, \dots, N) \tag{3.14}$$

$$\Phi_i = \sum_{j=1}^{N} [u_{ij}(t) + \rho v_{ij}(t) + \rho^2 w_{ij}(t) - \delta_j^i \rho^2] y_j + \sum_{j=1}^{N} [v_{ij}(t) + 2\rho w_{ij}(t) - 2\rho\delta_j^i] \dot{y}_j + \sum_{j=1}^{N} w_{ij}(t) \ddot{y}_j \tag{3.15}$$

Để xác định nghiệm của hệ phương trình (3.14) ta sử dụng phương pháp tham số bé. Trong trường hợp không cộng hưởng $\Lambda_i \neq n^2$ các nghiệm gần đúng bậc không của hệ phương trình (3.14) đều triệt tiêu. Trong trường hợp cộng hưởng đơn

$$\Lambda_r = n^2, \quad \Lambda_i \neq l^2 \quad (i \neq r;\ n, l = 1, 2, 3, \dots) \tag{3.16}$$

ta tìm nghiệm xấp xỉ bậc không của hệ (3.14) dưới dạng:

$$y_i = \delta_i^r (R\cos nt + S\sin nt) \tag{3.17}$$

Chú ý đến (3.10) ta nhận được hệ phương trình biên độ:

$$[u_{rro} + \rho v_{rro} + (\rho^2 - n^2) w_{rro} - \rho^2] \binom{R}{S} + [u_{rr2n} + \rho v_{rr2n} + (\rho^2 - n^2) w_{rr2n} - n V_{rr2n} - 2n\rho W_{rr2n}] \binom{R}{-S} + n[v_{rro} + 2\rho w_{rro} - 2\rho] \binom{S}{-R} - [U_{rr2n} + \rho V_{rr2n} + (\rho^2 - n^2) W_{rr2n} + n v_{rr2n} + 2n\rho w_{rr2n}] \binom{S}{R} = 0$$

Từ điều kiện cần để cho R và S không đồng thời triệt tiêu ta có:

$$[u_{rro} + \rho v_{rro} + (\rho^2 - n^2) w_{rro} - \rho^2]^2 - [u_{rr2n} + \rho v_{rr2n} + (\rho^2 - n^2) w_{rr2n} - n V_{rr2n} - 2n\rho W_{rr2n}]^2 + n^2 [v_{rro} + 2\rho w_{rro} - 2\rho]^2 - [U_{rr2n} + \rho V_{rr2n} + (\rho^2 - n^2) W_{rr2n} + n^2 v_{rr2n} + 2n\rho w_{rr2n}]^2 = 0 \tag{3.18}$$

Theo giả thiết của chúng ta các hệ số Phuariê trong các khai triển (3.12) và số mũ đặc trưng ρ là các hằng số nhỏ. Do đó từ (3.18) bỏ qua các số hạng nhỏ bậc cao ta nhận được phương trình:

$$2n\rho = n v_{rro} \pm \sqrt{(u_{rr2n} - n V_{rr2n} - n^2 w_{rr2n})^2 + (U_{rr2n} + n v_{rr2n} - n^2 W_{rr2n})^2 - (u_{rro} - n^2 w_{rro})^2}$$

Từ đó suy ra các điều kiện để cho hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (3.11) ổn định tiệm cận [4] là:

$$v_{rro} < 0 \tag{3.19}$$

$$n^2 v_{rro}^2 > (u_{rr2n} - n V_{rr2n} - n^2 w_{rr2n})^2 + (U_{rr2n} + n v_{rr2n} - n^2 W_{rr2n}) - (u_{rro} - n^2 w_{rro})^2 \tag{3.20}$$

Ngược lại nếu một trong các điều kiện trên lấy dấu ngược lại thì hệ sẽ không ổn định. Đối với hệ một bậc tự do các điều kiện (3.19) và (3.20) đã được trình bày trong [8]

§ 4. THÍ DỤ

Để làm ví dụ minh họa ta xét phương trình dao động

$$\ddot{y} + \Lambda y = \varepsilon(\Lambda\alpha y + g_3 y^3 \cos mt - \beta\dot{y} + e y^3 + e_1 y \dot{y}^2 + e_2 y^2 \ddot{y}) \tag{4.1}$$

Trong trường hợp cộng hưởng $\Lambda = n^2$ nghiệm xấp xỉ bậc không có dạng:

$$y_0 = R\cos nt + S\sin nt \tag{4.2}$$

Biên độ của dao động là

$$A = \sqrt{R^2 + S^2}$$

Từ các điều kiện (3.10) ta suy ra phương trình biên độ:

$$\left(n^2\alpha + \frac{3e+n^2e_1-3n^2e_2}{4}A^2\right)\begin{pmatrix}R\\S\end{pmatrix} - n\beta\begin{pmatrix}S\\-R\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\delta_m^{2n} g_3\begin{pmatrix}R^3\\-S^3\end{pmatrix} + \frac{1}{8}\delta_m^{4n} g_3\begin{pmatrix}R^3-3RS^2\\S^3-3R^2S\end{pmatrix} = 0 \quad (4.3)$$

Trước hết ta xét trường hợp cộng hưởng phân điều hòa bậc hai ($m = 2n$). Nhân phương trình (4.3) với $\begin{pmatrix}R\\S\end{pmatrix}$ ta được:

$$\left(n^2\alpha + \frac{3e+n^2e_1-3n^2e_2}{4}A^2\right)A^2 = \frac{1}{2} g_3A^2(S^2-R^2) \quad (4.4)$$

Nhân phương trình (4.3) với $\begin{pmatrix}S\\-R\end{pmatrix}$ ta có:

$$2n\beta A^2 = g_3A^2RS \quad (4.5)$$

Bình phương các phương trình (4.4) và (4.5) rồi cộng lại.
Ngoài nghiệm $A = 0$, nghiệm với biên độ $A \neq 0$ được xác định bởi công thức:

$$n^2\alpha = -\frac{3e+n^2e_1-3n^2e_2}{4}A^2 \pm 2\sqrt{\frac{1}{16}g_3^2A^4 - n^2\beta^2} \quad (4.6)$$

Tính toán tương tự đối với trường hợp cộng hưởng phân điều hòa bậc bốn ($m = 4n$) ta nhận được ngoài nghiệm $A = 0$, công thức biên độ:

$$n^2\alpha = -\frac{3e+n^2e_1-3ne_2}{4}A^2 \pm \sqrt{\frac{1}{64}g_3^2A^4 - n^2\beta^2} \quad (4.7)$$

Để nghiên cứu sự ổn định của nghiệm tuần hoàn ta xét phương trình biến phân của phương trình dao động (4.1):

$$\ddot{z}+n^2z=\varepsilon[(n^2\alpha+3g_3y_0^2\cos mt + 3ey_0^2 + e_1\dot{y}_0^2 + 2e_2y_0\ddot{y}_0)z + (2e_1y_0\dot{y}_0-\beta)\dot{z} + e_2y_0^2\ddot{z}] \quad (4.8)$$

Áp dụng các điều kiện ổn định (3.19) và (3.20) ta đi đến kết luận:

a) Nghiệm $A = 0$ ổn định khi $\beta > 0$,

b) Nghiệm $A \neq 0$ được xác định bởi công thức (4.6) cũng như (4.7) sẽ ổn định khi $\beta > 0$ với các điều kiện sau: Nếu trong công thức nghiệm ta lấy dấu cộng thì điều kiện ổn định là $\frac{d\alpha}{dA} < 0$, ngược lại nếu trong công thức nghiệm ta lấy dấu trừ thì điều kiện ổn định là $\frac{d\alpha}{dA} > 0$.

§ 5. KẾT LUẬN

Trong kỹ thuật ta hay gặp các bài toán dao động kích động tham số với số hạng quán tính phi tuyến. Trong công trình này đã khảo sát vấn đề xác định nghiệm tuần hoàn của phương trình dao động có số hạng quán tính phi tuyến trong trường hợp cộng hưởng đơn bằng phương pháp tham số bé. Các kết quả về việc xác định nghiệm tuần hoàn và khảo sát sự ổn định của nó trong trường hợp cộng hưởng bội sẽ được giới thiệu sau.

Địa chỉ:
Trường Đại học Bách khoa

Nhận ngày 5-11-1979

TAI LIỆU THAM KHAO

1. ФИЛАТОВ А.Н. Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. Ташкент, Изд. «ФАН» УССР 1971.
2. МАЛКИН И.Г Некоторые задачи теорий нелинейных колебаний. Москва, Гостехиздат, 1956.
3. КАРАСИК Г.Я., ЛЯСКО А.Б. О применимости метода малого параметра для отыскания периодических решений уравнений вида $\ddot{x}+\omega^2x+f(t) = \mu F(t, x, \dot{x}, \ddot{x}, \mu)$ Радиотехника. Т. 19, N° 12, 1964.
4. ДЕМИДОВИЧ Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. Москва, Изд. « Наука », 1967.
5. BOLOTIN W.W. Kinetische Stabilitat elastischer Systeme. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1961.
6. NGUYỄN VĂN ĐẠO. Những phương pháp cơ bản của lý thuyết dao động phi tuyến. Nhà xuất bản Đại học, Hà nội, 1971.
7. SCHMIDT G. Parametererregte Schwingungen. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1975.
8. NGUYỄN VĂN KHANG : Zur naherungsweisen Berechnung der dynamischer Stabilitat der Bewegung ebener Koppelgetriebe. Maschinenbautechnik, 27 (1978) 7, S 310 — 312

РЕЗЮМЕ

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ С НЕЛИНЕЙНЫМИ ЧЛЕНАМИ ИНЕРЦИЙ МЕТОДОМ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

В работе рассматривается задача о применении метода малого параметра для отыскания периодических решений уравнений колебаний с нелинейными членами инерций.