

VỀ PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA CÁC HỆ CƠ HỌC

ĐỖ SANH

NHƯ chúng ta đã biết, để thành lập phương trình chuyển động của các hệ cơ học người ta thường sử dụng các nguyên lý cơ học: các nguyên lý vi phân và tích phân. Trong bài báo này để thành lập phương trình chuyển động của các hệ cơ học chúng tôi xuất phát từ một nguyên lý khác: nguyên lý tương thích [2]

Cần nhấn mạnh rằng nguyên lý tương thích là một công cụ rất có hiệu lực cho việc khảo sát chuyển động của các hệ cơ học được điều khiển bằng liên kết. Tuy nhiên trong bài báo này chúng tôi chỉ giới hạn trong phạm vi sử dụng nguyên lý tương thích để thành lập phương trình chuyển động của các hệ cơ học với liên kết thuộc loại Appell - Przeborski - Chetayev

§ 1. PHƯƠNG TRÌNH APPELL

1-1. Phương trình Appell trong các biến phụ thuộc.

Khảo sát một hệ cơ học với các tọa độ mở rộng $(i = \overline{1, n})$ và liên kết dạng:

$$\sum_{i=1}^n b_{\alpha i} \ddot{q}_i + b_{\alpha} = 0; \alpha = 1, S \quad (1-1)$$

ở đó $b_{\alpha i} = b_{\alpha i}(t, q_j, \dot{q}_j)$; $b_{\alpha} = b_{\alpha}(t, q_i, \dot{q}_i)$ là các hàm đã biết.

Chúng ta giả sử rằng các liên kết (1-1) thuộc loại Appell-Przeborski-Chetayev [3]. Như đã biết hàm Gaxo có thể được viết trong dạng [4]:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij}^* \ddot{q}_i \ddot{q}_j + \sum_{i=1}^n A_i \ddot{q}_i + A^* - \sum_{i=1}^n Q_i \ddot{q}_i \quad (1-2)$$

ở đó $A_{ij}^* = A_{ij}^*(t, q_k, \dot{q}_k)$; $A_i^* = A_i^*(t, q_j, \dot{q}_j)$;

$A^* = A^*(t, q_i, \dot{q}_i)$; $\|A_{ij}^*\|$ là một ma trận vuông, đối xứng và không suy biến Q_i - lực mở rộng.

Giả sử chuyển động của hệ được mô tả nhờ các phương trình:

$$U_i = Q_i^* \quad (1-3)$$

ở đó $U_i = \partial U_2 / \partial \ddot{q}_i$; Q_i^* - các phản lực liên kết

Điều tiên dễ dàng nhận được đồng nhất thức sau:

$$\ddot{q}_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} (U_j + Q_j - A_j^*) \quad (1-4)$$

ở đó $\|A_{ij}\|$ - ma trận ngược của ma trận $\|A_{ij}^*\|$ và do đó nó cũng là ma trận vuông, đối xứng và không suy biến.

Theo nguyên lý tương thích các phản lực Q_i^* cần thỏa mãn các phương trình sau:

$$\sum_{i=1}^n C_{\alpha i} Q_i^* + C_{\alpha} = 0 \quad (1-5)$$

ở đó $C_{\alpha i} = \sum_{j=1}^n b_{\alpha j} A_{ji}$; $C_{\alpha} = \sum_{i=1}^n C_{\alpha i} (Q_i - A_i) + b_{\alpha}$.

Vì các liên kết (1-1) được giả thiết là lý tưởng theo định nghĩa của Appell - Przeborski - Chetayev nên chúng ta có [3].

$$\sum_{i=1}^n d_{vi} Q_i^* = 0, \quad v = \overline{1, p} = n - S; \quad (1-6)$$

nó biểu diễn điều kiện lý tưởng của các liên kết (1-1), ở đó các đại lượng $d_{vi} = d_{vi}(t, q_i, \dot{q}_i)$ được xác định nhờ phương pháp sau:

Chúng ta đưa vào các gia tốc $\ddot{\pi}_v$ ($v = \overline{1, p} = n - S$):

$$\ddot{\pi}_v = \sum_{i=1}^n g_{vi} \ddot{q}_i \quad (1-7)$$

ở đó $g_{vi} = g_{vi}(t, q_j, \dot{q}_j)$ được chọn sao cho thỏa mãn chỉ một điều kiện:

$$\det \begin{vmatrix} g_{vi} \\ b_{\alpha i} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \text{với mọi } t, q_i, \dot{q}_i \quad (1-8)$$

Trong điều kiện (1-8) từ (1-1) và (1-7) chúng ta nhận được:

$$\ddot{q}_i = \sum_{v=1}^p d_{vi} \ddot{\pi}_v + d_i \quad (1-9)$$

Như vậy các đại lượng d_{vi} là các hệ số trong các biểu thức của gia tốc Lagorăng được biểu diễn qua các gia tốc giả $\ddot{\pi}_v$.

Nói chung chúng ta có điều kiện

$$\det \begin{vmatrix} C_{\alpha i} \\ d_{\alpha i} \end{vmatrix} \neq 0$$

Như vậy hệ các phương trình (1-5), (1-6) tạo thành hệ phương trình đầy đủ và nhờ đó chúng ta xác định được các phản lực liên kết Q_i^* và tiếp theo, chuyển động của cơ hệ được mô tả nhờ các phương trình (1-3), tức là:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = Q_i + Q_i^*, \quad i = \overline{1, n}; \quad (1-10)$$

ở đó S là hàm Appell được tính trong điều kiện không kể đến sự có mặt các liên kết (1-1). Các phương trình (1-10) chính là các phương trình Appell trong các biến phụ thuộc.

Thí dụ: Thành lập phương trình chuyển động của xe Sapơlugin, chuyển động theo quán tính (xem thí dụ của [5])

$$S = \frac{1}{2} (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2),$$

còn phương trình liên kết có thể được viết như sau :

$$\dot{y} = \dot{x} \operatorname{tg} \varphi.$$

Để viết các phương trình (1-5), và (1-6) chúng ta tính :

$$\|b_{\alpha i}\| = \|\operatorname{tg} \varphi \quad -1 \quad 0\|,$$

còn các ma trận $\|A_{ij}^*\|$ và $\|A_{ij}\|$ là các ma trận đơn vị cấp 3. Do đó :

$$\|C_{\alpha i}\| = \|\operatorname{tg} \varphi \quad -1 \quad 0\|$$

$$\text{và} \quad C_{\alpha} = \dot{x} \dot{\varphi} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)$$

Chọn các tọa độ giả π_1, π_2 sao cho $\ddot{\pi}_1 = \ddot{x}, \ddot{\pi}_2 = \ddot{z}$
ta có :

$$\|d_{vi}\| = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & \operatorname{tg} \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|.$$

Phương trình (1-5), (1-6) bây giờ có dạng :

$$Q_1^* \operatorname{tg} \varphi - Q_2^* + \dot{x} \dot{\varphi} (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = 0$$

$$Q_1^* + Q_2^* \operatorname{tg} \varphi = 0$$

$$Q_3^* = 0$$

Từ các phương trình này chúng ta tìm được các phản lực liên kết :

$$Q_1^* = \dot{x} \dot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi, \quad Q_2^* = -\dot{x} \dot{\varphi}, \quad Q_3^* = 0.$$

Phương trình chuyển động của hệ sẽ là :

$$\ddot{x} = \dot{x} \dot{\varphi} \operatorname{tg} \varphi, \quad \ddot{y} = -\dot{x} \dot{\varphi}, \quad \ddot{z} = 0.$$

Chú ý. Trong nhiều trường hợp biểu thức của gia tốc năng được biểu diễn thuận tiện qua các á gia tốc. Dễ dàng chứng minh rằng trong trường hợp này vẫn có thể sử dụng nguyên lý tương thích để thành lập phương trình chuyển động của cơ hệ.

1-2. Phương trình chuyển động Appell trong các biến độc lập

Nhờ các biểu thức (1-9) chúng ta có thể biểu diễn hàm Gacxơ qua các gia tốc $\ddot{\pi}_v$, đó là :

$$U^* = U^*(t, q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i (\ddot{\pi}_v))$$

Chúng ta đưa vào toán tử U_v^* được xác định như sau :

$$U_v^* = \partial U^* / \partial \ddot{\pi}_v$$

Phương trình chuyển động của hệ có thể viết trong dạng :

$$U_v^* = \pi_v^*$$

ở đó π_v^* là phản lực liên kết ứng với tọa độ giả π_v

Để dàng chứng minh rằng:

$$U_v^* = \sum_{i=1}^n U_i d_{vi}$$

Do đó:
$$\pi_v^* = \sum_{i=1}^n Q_i^* d_{vi} = 0 \quad (1-11)$$

Vi vậy phương trình chuyển động của hệ có dạng:

$$U_v^* = 0$$

hoặc:
$$\frac{\partial S^*}{\partial \ddot{x}_v} = \sum_{i=1}^n Q_i d_{vi} \quad (1-12)$$

ở đó

$$S^* = S(t, q_i, \dot{q}_i, \pi_v)$$

Nếu chúng ta chọn $\ddot{x}_v = \ddot{q}_v$. Ở đó \ddot{q}_v là các gia tốc độc lập và giả sử rằng các phương trình liên kết có dạng:

$$\ddot{q}_r = \sum_{v=1}^p b_{rv} \ddot{q}_v + b_r \quad (1-13)$$

thì phương trình chuyển động của hệ sẽ là

$$\frac{\partial S^*}{\partial \ddot{q}_v} = Q_v + \sum_{r=p+1}^n Q_r b_{rv} \quad (1-14)$$

Chú thích:

1. Từ (1-11) chúng ta nhận thấy rằng liên kết được gọi là lý tưởng theo định nghĩa của Appell-Przeborski-Chetayev nếu phản lực liên kết ứng với tọa độ giả π_v bằng không.

2. Nếu phương trình liên kết có dạng (1-13) thì điều kiện của tính lý tưởng của liên kết (1-13) có dạng

$$Q_v^* + \sum_{r=p+1}^n Q_r^* b_{rv} = 0 \quad (1-15)$$

§2. PHƯƠNG TRÌNH LAGORĂNG LOẠI II

2-1. Phương trình Lagorăng loại II trong các biến phụ thuộc

Phương trình chuyển động có thể viết trong dạng

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i + Q_i^* \quad (2-1)$$

ở đó $L = T - \pi$ là hàm Lagorăng, T là động năng và π là thế năng, giả sử chúng có dạng:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^* \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n a_i^* \dot{q}_i + a^*; \quad \pi = \pi(t, q_i) \quad (2-2)$$

ở đó $a_{ij}^* = a_{ij}^*(t, q_k)$; $a_i^* = a_i^*(t, q_j)$; $a^* = a^*(t, q_i)$; $\pi = \pi(t, q_i)$.

là các hàm đã biết, giả thiết là liên tục và có đạo hàm liên tục trong một miền Ω nào đó. Ngoài ra $\|a_{ij}^*\|$ được giả thiết là ma trận $n \times n$, đối xứng và không suy biến, Q_i là lực cho, còn Q_i^* là lực liên kết.

Theo nguyên lý tương thích các phản lực liên kết Q_i^* cần thỏa mãn các phương trình sau:

$$\sum_{i=1}^n B_{\alpha i} Q_i^* + B_{\alpha} = 0 \quad (2-3)$$

ở đó $B_{\alpha i} = B_{\alpha i}(t, q_j, \dot{q}_j)$, $B_{\alpha} = B_{\alpha}(t, q_i, \dot{q}_i)$ là các hàm đã biết [3,2]

Giả sử các liên kết thuộc loại của Appell - Przeborski - Chetayev [3]. Do đó các phản lực liên kết phải thỏa mãn các phương trình (1-6). Vì rằng:

$$\det \left\| \frac{B_{\alpha i}}{d_{vi}} \right\| \neq 0$$

nên các phản lực liên kết Q_i^* sẽ được xác định nhờ các phương trình đầy đủ (2-3) và (1-6) và do đó chuyển động của hệ được mô tả bằng các phương trình (2-1).

2-2. Phương trình Lagorăng trong các biến độc lập.

Khảo sát một hệ cơ học chịu liên kết dạng:

$$f_{\alpha}(t, q_i, \dot{q}_i) = 0 \quad (2-4)$$

Giả sử:

$$\det \left\| \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial q_{\beta}} \right\| \neq 0, \alpha, \beta = \overline{1, S}. \quad (2-5)$$

Do điều kiện (2-5) các vận tốc phụ thuộc q_r có thể được biểu diễn qua các vận tốc độc lập q_v , tức là:

$$\dot{q}_r = f_r(t, q_i, \dot{q}_v); \quad i = \overline{1, n}; \quad v = \overline{1, p} = \overline{n-s} \quad (2-6)$$

Gọi θ là hàm thế động của hệ, nó nhận được từ hàm Lagorăng L sau khi khử các vận tốc phụ thuộc nhờ các biểu thức (2-6), tức là:

$$\theta = L(t, q_i, \dot{q}_v, f_r(t, q_i, \dot{q}_v))$$

Dễ dàng chứng minh các đồng nhất thức sau:

$$\begin{aligned} \theta_v = L_v + \sum_{r=p+1}^n L_r \frac{\partial f_r}{\partial q_v} + \sum_{r=p+1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_r} \right)^* \frac{\partial f_r}{\partial q_v} + \\ \sum_{r=p+1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_r} \right)^* \left[\sum_{k=1}^p \left(\frac{\partial^2 f_r}{\partial q_v \partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 f_r}{\partial q_v \partial q_k} q_k \right) + \right. \\ \left. \sum_{\alpha=p+1}^n \frac{\partial f_r}{\partial q_v \partial q_{\alpha}} f_{\alpha} + \frac{\partial^2 f_r}{\partial q_v \partial t} - \frac{\partial f_r}{\partial q_v} \right] \quad (2-7) \end{aligned}$$

ở đó

$$\theta_v = \frac{d}{dt} \frac{\partial \theta}{\partial \dot{q}_v} - \frac{\partial \theta}{\partial q_v}; \quad L_v = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_v} - \frac{\partial L}{\partial q_v};$$

$$L_r = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r}; \quad v = \overline{1, p}; \quad r = \overline{1, S};$$

đấu (*) có nghĩa rằng trong đó các vận tốc phụ thuộc được thay bằng (2-6).

Giả sử phương trình chuyển động của hệ có dạng

$$\theta_v = R_v^* \quad (2-8)$$

ở đó R_v^* là các phản lực liên kết.

Dễ dàng chỉ ra rằng:

$$R_v^* = - \sum_{r=p+1}^n \frac{\partial \theta}{\partial q_r} \frac{\partial f_r}{\partial q_v} + \sum_{r=p+1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right)^* \left[\sum_{k=1}^p \left(\frac{\partial^2 f_r}{\partial \dot{q}_v \partial q_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 f_r}{\partial q_v \partial q_k} \dot{q}_k \right) + \sum_{\alpha=p+1}^n \left(\frac{\partial^2 f_r}{\partial q_v \partial q_\alpha} f_\alpha + \frac{\partial f_r}{\partial q_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_v} \right) + \frac{\partial^2 f_r}{\partial q_v \partial t} - \frac{\partial f_r}{\partial q_v} \right] \quad (2-9)$$

Do đó phương trình chuyển động của hệ có thể viết trong dạng:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \theta}{\partial \dot{q}_v} - \frac{\partial \theta}{\partial q_v} = - \sum_{r=p+1}^n \frac{\partial \theta}{\partial q_r} \frac{\partial f_r}{\partial q_v} + \sum_{r=p+1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right)^* \left[\sum_{k=1}^p \left(\frac{\partial^2 f_r}{\partial \dot{q}_v \partial q_k} \ddot{q}_k + \frac{\partial^2 f_r}{\partial q_v \partial q_k} \dot{q}_k \right) + \sum_{\alpha=p+1}^n \left(\frac{\partial^2 f_r}{\partial q_v \partial q_\alpha} f_\alpha + \frac{\partial f_r}{\partial q_\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_v} \right) + \frac{\partial^2 f_r}{\partial q_v \partial t} - \frac{\partial f_r}{\partial q_v} \right] \quad (2-10)$$

Như một thí dụ, chúng ta viết phương trình (2-10) cho trường hợp hệ chịu liên kết không hólônôm tuyến tính. Giả sử phương trình liên kết có dạng:

$$\dot{q}_r = \sum_{v=1}^p b_{rv} \dot{q}_v + b_r \quad (2-11)$$

ở đó $b_{rv} = b_{rv}(t, q_i)$; $b_r = b_r(t, q_i)$ là các hàm đã biết.

Trong trường hợp này phù hợp với (2-6) chúng ta có:

$$f_r = \sum_{v=1}^p b_{rv} \dot{q}_v + b_r$$

Phương trình (2-10) viết đối với hệ chịu liên kết (2-11) bây giờ là:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \theta}{\partial \dot{q}_v} - \frac{\partial \theta}{\partial q_v} = \sum_{r=p+1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right)^* \left[\sum_{k=1}^p A_{vk}^r \dot{q}_k + A_{vr} \right] - \sum_{r=p+1}^n \frac{\partial \theta}{\partial q_r} b_{rv} \quad (2-12)$$

ở đó

$$A_{vk}^r = \sum_{\alpha=p+1}^n b_{\alpha k} \frac{\partial b_{\alpha v}}{\partial q_r} - \sum_{\alpha=p+1}^n b_{\alpha v} \frac{\partial b_{\alpha k}}{\partial q_r} + \frac{\partial b_{rv}}{\partial q_k} - \frac{\partial b_{rv}}{\partial q_v}$$

$$A_{vk} = \sum_{\alpha=p+1}^n \frac{\partial b_{rv}}{\partial q_{\alpha}} b_{\alpha} - \sum_{\alpha=p+1}^n \frac{\partial b_r}{\partial q_{\alpha}} b_{\alpha v} + \frac{\partial b_{rv}}{\partial t} - \frac{\partial b_r}{\partial q_v}$$

Phương trình (2-12) chính là phương trình Voronev.

Thí dụ Appell (xem thí dụ [3]). Thành lập phương trình chuyển động của hệ, hàm thế động của nó có dạng:

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz,$$

chịu liên kết dạng:

$$z^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$$

Chọn x, y làm vận tốc độc lập chúng ta có:

$$\dot{z} = \pm a(x^2 + y^2)^{1/2}$$

Ở đây chúng ta chọn:

$$\dot{z} = +a(x^2 + y^2)^{1/2}$$

Vậy thì:

$$\theta = \frac{1}{2} (a^2 + 1) (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \text{ và}$$

$$f_r = a (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}$$

Phương trình chuyển động của hệ bây giờ lấy dạng:

$$(a^2 + 1)\ddot{x} = -\frac{gax}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}} + \frac{a^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} (\ddot{x}\dot{y}^2 + \dot{x}\dot{y}\ddot{y})$$

$$(a^2 + 1)\ddot{y} = -\frac{gay}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}} + \frac{a^2}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} (\dot{x}^2\ddot{y} + \dot{x}\dot{y}\ddot{x})$$

Một lần nữa chúng ta nhận được kết quả đã được thiết lập trong (3).

Dễ dàng chỉ ra rằng khi lấy

$$\dot{z} = -a(x^2 + y^2)^{1/2}$$

chúng ta cũng nhận được kết quả như trên.

Địa chỉ:

Đại học Bách khoa

Nhận ngày 17/10/1979

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Appell p. Traité de mécanique rationnelle. Paris, tIII, Gauthier - Villars, 1953.
2. Do Sanh. On the principle of compatibility and the equations of motion of a constrained mechanical system, ZAMM, 1980.
3. Do Sanh. On the dynamical action of each constraint on a mechanical system, Zagadnienia Drgan' Nieliniowych, N° 20, 1979.
4. ДО ЩАНЬ. Уравнения движения механических систем с неголономных связями второго порядка, ПММ Вып. 2, 1973.
5. ДО ЩАНЬ. Канонические уравнения для механических систем с линейными неголономными связями второго порядка, ПМ, ТХІ N° 2, Киев 1975.
6. ДОБРОПРАВОВ В. В. Основы механики неголономных систем Изд «Высшая школа», Москва, 1970.
7. КОРЕНЕВ Г. В. Цель и приспособляемость движений «Наука», 1974.
8. ЧЕТАЕВ Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. Изд АН СССР, Москва, 1962.

SUMMARY

THE MOTION EQUATIONS OF MECHANICAL SYSTEMS

In this paper the new point of view for construction of motion equations of a mechanical system is discussed. With the help of the so-called principle of compatibility the Appell and Lagrange equations are obtained.

Especially, the Voronev equations for a mechanical system with nonlinear constraints are formulated.

THÔNG BÁO

XÊMINA KHOA HỌC

LỚP BIÊN BIÊN - KHÍ QUYỀN VÀ NHỮNG VẤN ĐỀ ỨNG DỤNG

Từ 15 đến 22 tháng 8 năm 1980 tại đài khí tượng thủy văn thành phố Hồ Chí Minh đã tiến hành xêmina khoa học «Lớp biên biên - khí quyền và những vấn đề ứng dụng» của đề tài TƯƠNG TÁC BIÊN - KHÍ QUYỀN - trong chương trình nghiên cứu khoa học nhà nước - điều tra tổng hợp vùng biển Thuận hải - Minh hải.

Các báo cáo được trình bày trong xêmina gồm:

- Mô hình tà áp tương tác giữa các lớp biên biên - khí quyền (Lê Ngọc Lý, Đài KTTV thành phố Hồ Chí Minh).

- Ảnh hưởng của tính tà áp đến cấu trúc lớp biên (Lê Đình Quang, Tổng cục KTTV).

- Lớp biên biên - khí quyền có tính đến hiệu ứng sóng (Lê Ngọc Lý, Đài TTTV, thành phố Hồ Chí Minh).

- Mô hình sóng gió ven bờ và các bài toán ứng dụng (Phan Văn Hoạc, Đài VTTV, thành phố Hồ Chí Minh).

- Tính chuyển động thẳng đứng của không khí (Lê Đình Quang, Tổng cục KTTV).

- Tính các yếu tố khí áp trong bão dựa trên hệ thống đường đẳng áp (Nguyễn Công Thủy, Đ.H.T.H Hà Nội).

Ngoài ra trong xêmina nhiều thông báo khoa học khác cũng đã được trình bày.