

CÁCH TÍNH THANH MỀM CHỊU UỐN

LÊU THỌ TRÌNH

BÀI toán thanh mềm (độ cứng chống uốn nhỏ) có một đầu ngàm, một đầu tự do chịu lực tập trung tại đầu tự do đã được E. P. Popov giải quyết trên cơ sở vận dụng phương trình vi phân chính xác của đường đàn hồi và dẫn đến việc sử dụng các tích phân elliptic.

Trong bài này chúng tôi mở rộng bài toán trên, trình bày một thuật toán lặp đúng dần để giải quyết trường hợp thanh mềm chịu tải trọng bất kỳ có phương không đổi và có phạm vi tác dụng thay đổi theo đường biến dạng của trục thanh. Thuật toán được xây dựng theo phương trình vi phân chính xác của đường đàn hồi khi uốn và có chú ý đến tính chất phi tuyến hình học của hệ.

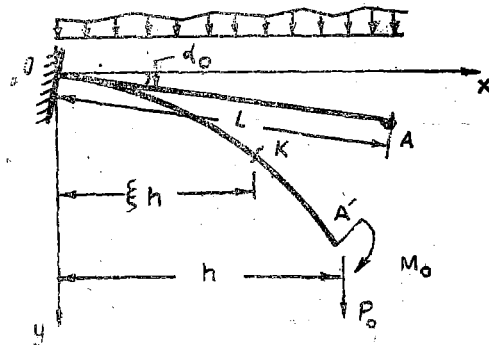
Xét thanh mềm có chiều dài L , một đầu bị ngàm, một đầu tự do, đặt trong hệ tọa độ Oxy như trên hình 1. Ở trạng thái chưa biến dạng, thanh hợp với trục Ox một góc α_0 .

Giả sử hệ chịu tải trọng có phương không đổi theo phương của trục Oy, trong đó bao gồm:

- Lực tập trung P_0 và mômen tập trung M_0 , luôn luôn đặt tại đầu tự do trong quá trình thanh biến dạng.

- Lực phân bố liên tục biểu thị dưới dạng:

$$q(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \quad (1)$$



Hình 1

Tải trọng phân bố này có quy luật không phụ thuộc biến dạng của thanh nhưng phạm vi tác dụng của nó được giới hạn trong khoảng hình chiếu trên trục Ox của thanh sau khi đã biến dạng, nghĩa là thay đổi theo đường biến dạng của trục thanh. Trong thực tế ta có thể gặp trường hợp này khi tải trọng phân bố là áp lực của dòng chảy.

Dưới tác dụng của các lực có chiều dương như trên hình 1, thanh có biến dạng lớn theo đường cong OA' . Yêu cầu tìm đường biến dạng của thanh.

Để giải bài toán này ta giả thiết:

- Vật liệu đàn hồi và tuân theo định luật Húc.
- Bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng trượt và dọc trục so với biến dạng uốn. Những ảnh hưởng này rất nhỏ đối với các thanh mềm có biến dạng lớn.

Gọi h là hình chiếu của thanh sau biến dạng trên trục Ox và đặt:

$$\xi = \frac{x}{h} \quad (2)$$

Phương trình tải trọng (1) biểu thị theo ξ có dạng:

$$q(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m \xi^m \quad \text{với } q_m = a_m h^m \quad (3)$$

Biểu thức mômen uốn tại tiết diện k bất kỳ trong thanh có hoành độ ξ , h xác định theo trạng thái biến dạng có dạng:

$$M(\xi) = - [M_0 + P_0 h (1 - \xi) + \int_{\xi}^1 q(\eta) h^2 (\eta - \xi) d\eta] \quad (4)$$

trong đó η là đối số không thứ nguyên biến thiên trong khoảng ξ và 1.

Thay (3) vào (4), sau khi lấy tích phân ta được:

$$M(\xi) = - \left\{ M_0 + P_0 h (1 - \xi) + h^2 \sum_{m=0}^{\infty} q_m \left[\frac{\xi^{m+2}}{(m+1)(m+2)} - \frac{\xi}{m+1} + \frac{1}{m+2} \right] \right\} \quad (5)$$

Phương trình vi phân của đường đàn hồi:

$$\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} = - \frac{M}{K}$$

với: $EJ \ll K \ll EJ/(1-\mu^2)$, EJ là độ cứng chống uốn của thanh còn μ là hệ số Poisson.

Nếu đặt $p = y'$, ta có:

$$\frac{dp}{dx} = y''$$

Do đó, phương trình vi phân có dạng:

$$\frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}} = - \frac{1}{K} M(\xi) \cdot h \cdot d\xi \quad (6)$$

Sau khi thay (5) vào (6) và lấy tích phân, ta được:

$$\frac{p}{(1+p^2)^{1/2}} = \frac{h}{K} [M_0 \xi + P_0 h F(\xi) + h^2 \sum_{m=0}^{\infty} q_m \Phi_m(\xi)] + C_0 \quad (7)$$

trong đó:

$$F(\xi) = \xi (1 - \xi/2) \quad (8)$$

$$\Phi(\xi) = \frac{\xi^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} - \frac{\xi^2}{2(m+1)} + \frac{\xi}{m+2} \quad (9)$$

Nhưng:

$$p = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$$

với α là góc nghiêng của tiếp tuyến so với trục Ox .

Nên:

$$\frac{p}{(1+p^2)^{1/2}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sin \alpha$$

Do đó, theo (7), ta có :

$$\sin\alpha = \frac{h}{K} [M_0\xi + hP_0F(\xi) + h^2 \sum_{m=0}^{\infty} q_m\Phi_m(\xi)] + C_0$$

Để xác định C_0 ta dùng điều kiện biên :

Khi $\xi = 0$, $\alpha = \alpha_0$, do đó $C_0 = \sin\alpha_0$

Vậy :

$$\sin\alpha = \frac{h}{K} [M_0\xi + hP_0F(\xi) + h^2 \sum_{m=0}^{\infty} q_m\Phi_m(\xi)] + \sin\alpha_0 \quad (10)$$

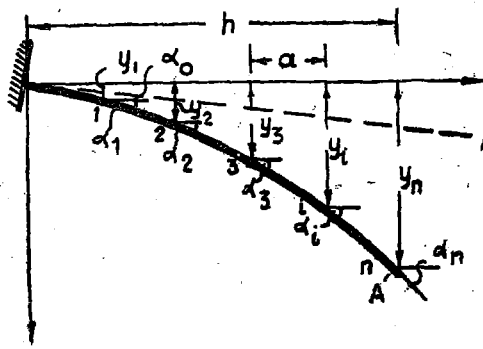
Công thức (10) cho phép ta xác định góc nghiêng của tiếp tuyến tại tiết diện bất kỳ của đường đàn hồi so với trục x , trong đó h vẫn là đại lượng chưa biết.

Nếu chia chiều dài h thành n đoạn đều nhau (hình 2) mỗi đoạn có độ dài $a = h/n$, thì các điểm 1, 2, 3, ..., i , ..., n có hoành độ không thứ nguyên được xác định theo :

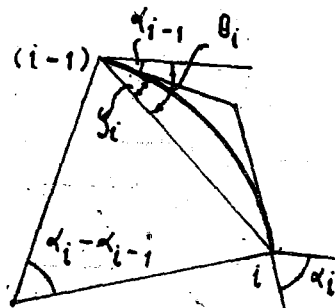
$$\xi_i = \frac{ia}{h} = \frac{i}{n} \quad (11)$$

Nếu coi h là đại lượng đã biết, theo (10) ta có thể tìm được góc xoay tại tiết diện bất kỳ thứ i có hoành độ ξ_i . Gọi α_i là góc nghiêng của đường đàn hồi tại điểm chia thứ i . Quan niệm một cách gần đúng, đường đàn hồi trong khoảng giữa hai điểm chia là cung tròn thì theo hình 3 ta có thể xác định góc nghiêng θ_i của dây cung trong đoạn thứ i như sau :

$$\theta_i = \alpha_{i-1} + \varphi_i$$



Hình 2



Hình 3

Nhưng

$$\varphi_i = \frac{1}{2} (\alpha_i - \alpha_{i-1})$$

Nên

$$\theta_i = \frac{1}{2} (\alpha_i + \alpha_{i-1}) \quad (12)$$

Sau khi biết các góc θ_i ta có thể xác định độ võng theo công thức truy hồi (hình 2)

$$y_i = y_{i-1} + a \operatorname{tg}\theta_i \quad (13)$$

với

$$y_1 = a \operatorname{tg}\theta_1 \quad (14)$$

Chiều dài của cung thuộc đoạn thứ i :

$$S_i = \frac{a}{\cos\theta_i} \sqrt{1 + \frac{4}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{4}}$$

Chiều dài cong của toàn thanh phải thỏa mãn điều kiện bằng chiều dài L ban đầu :

$$\sum_{i=1}^n S_i = a \sum_{i=1}^n \frac{1}{\cos \theta_i} \sqrt{1 + \frac{4}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{4}} = L \quad (15)$$

Như vậy, nếu biết h thì ta có thể vận dụng các công thức trên để xác định đường biến dạng của thanh. Song thực ra h là đại lượng chưa biết nên muốn giải bài toán này ta cần thực hiện quá trình lặp theo thứ tự sau :

1) Giả thiết giá trị của h , ta sẽ xác định được $q(\xi)$ theo (3). Chia thanh thành n đoạn sẽ xác định được các ξ_i theo (11)

2) Vận dụng (8) và (9) xác định các hàm $F(\xi)$ và $\Phi_m(\xi)$, tiếp đó vận dụng (10) xác định góc α_i . Có thể lập bảng các hàm $F(\xi)$ và $\Phi_m(\xi)$ tương ứng với số đoạn chia. Những số liệu này không đổi trong quá trình lặp nếu số đoạn chia không đổi.

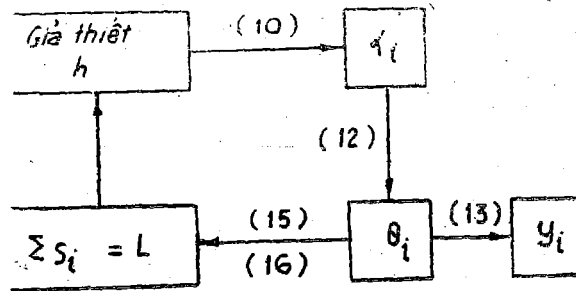
3) Xác định các góc θ_i theo (12)

4) Kiểm tra điều kiện chiều dài cong của thanh bằng chiều dài ban đầu L theo (15).

Nếu điều kiện (15) được thỏa mãn thì giá trị h đã chọn là đúng. Nếu điều kiện (15) không thỏa mãn thì cần chọn lại h và thực hiện lại các bước tính toán nói trên. Sau khi điều kiện (15) được thỏa mãn, ta có thể xác định độ võng y_i tại tiết diện có hoành độ ξ_i theo công thức (13).

Quá trình lặp được tóm tắt trên sơ đồ vẽ trên hình 4.

Mức độ chính xác của kết quả phụ thuộc số đoạn chia. Kinh nghiệm tính toán chứng tỏ rằng chỉ cần chia thanh thành 4-5 đoạn cũng đủ, yêu cầu chính xác trong thực hành.



Hình 4

Chú thích :

1. Số hạng thứ hai trong căn thức của (15) thường rất nhỏ và có thể bỏ qua so với đơn vị. Điều này tương ứng với giả thiết coi thanh cong là đường đa giác. Do đó có thể thay (15) bằng công thức đơn giản hơn :

$$\sum_{i=1}^n S_i = a \sum_{i=1}^n \frac{1}{\cos \theta_i} = L \quad (16)$$

2. Thuật toán này cũng có thể áp dụng để tính thanh có chịu thêm một số lực tập trung tác dụng trong nhịp nếu những tải trọng này có hoành độ không đổi trong quá trình thanh biến dạng. Lúc này, biểu thức mômen uốn (4) cần được bổ sung thêm một vài số hạng. Công thức (10) để xác định $\sin \alpha$ cũng được xác lập tương tự song cần phải thực hiện trong từng đoạn trong đó các hàm mômen uốn là liên tục.

3. Các công thức thiết lập được trên thích nghi với trường hợp khi $0 \leq \xi \leq 1$, tức là khi $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$. Đối với những trường hợp khi tồn tại các góc $\alpha > 90^\circ$ như trên hình 5a, các công thức trên không áp dụng được. Tuy nhiên, trong trường hợp thanh chỉ chịu các lực tập trung và phân bố có phương không đổi (không chịu mômen tập trung) dạng biến dạng, như trên hình 5a không thể xảy ra được. Dưới tác dụng của các tải trọng lớn, thanh có thể biến dạng như trên hình 5b. Lúc này đường đàn hồi gồm hai đoạn: đoạn cong OB tuân theo các hệ thức đã thiết lập ở trên và đoạn thẳng BA với góc $\alpha = 90^\circ$, hai đoạn này tiếp xúc thoải với nhau tại B. Như vậy ta có thêm điều kiện biên: khi $\xi = 1$ thì $\alpha = 90^\circ$ tức là $\sin \alpha = 1$. Theo (10) ta có:

$$\frac{h^2}{K} \left[P_0 F(1) + h \sum_{m=0}^{\infty} q_m \Phi_m(1) \right] + \sin \alpha_0 = 1 \quad (17)$$

Điều kiện (17) cho phép xác định ngay được đại lượng h mà không cần thực hiện phép lặp. Sau khi biết h ta có thể xác định đường cong OB theo các công thức đã thiết lập ở trên và xác định chiều dài cong L_{OB} của đoạn OB như sau:

$$L_{OB} = a \sum_{i=1}^n \frac{1}{\cos \theta_i} \sqrt{1 + \frac{4}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha_i - \alpha_{i-1}}{4}} \quad (18)$$

Tiếp đó xác định chiều dài của đoạn thẳng BA:

$$L_{BA} = L - L_{OB} \quad (19)$$

Ví dụ: Xét thanh mềm có chiều dài $L = 78 \text{ mm}$, bề rộng $b = 12,65 \text{ mm}$, bề dày $0,1 \text{ mm}$. Vật liệu bằng thép có $E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ g/mm}^2$. Yêu cầu tìm đường đàn hồi khi thanh chịu lực P_0 có giá trị 10g và 100g. Cho biết $\alpha_0 = 0$.

Độ cứng của thanh:

$$K = EJ = 2,1 \cdot 10^7 \cdot \frac{1}{12} 12,65 \cdot 0,1^3 = 2,21 \cdot 10^4 \text{ g} \cdot \text{mm}^2.$$

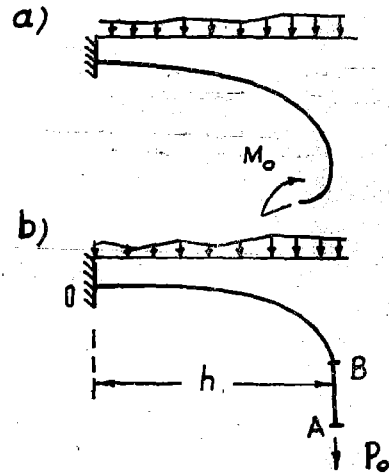
Chia thanh thành 5 đoạn, theo (8) ta lập được bảng hàm $F(\xi)$ (bảng 1).

Bảng 1

ξ	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$F(\xi)$	0,18	0,32	0,42	0,48	0,50

A - Trường hợp $P_0 = 10\text{g}$. Áp dụng công thức (10), ta có:

$$\sin \alpha = \frac{P_0 h^2}{K} F(\xi) = \frac{10}{2,21 \cdot 10^4} h^2 F(\xi) = 4,525 \cdot 10^{-4} h^2 F(\xi)$$



Hình 5

1. Chọn $h = 59\text{mm}$:

$$a = 59/5 = 11,8\text{mm} ; \sin\alpha = 1,575F(\xi)$$

Kết quả tính $\sin\alpha$ và các góc α ghi trên cột 1 và 2 của bảng 2.

Bảng 2

$\sin \alpha$	α	θ	$\cos\theta$	$1/\cos\theta$
0,284	$16^{\circ}30'$	$8^{\circ}15'$	0,9896	1,011
0,505	$30^{\circ}20'$	$23^{\circ}25'$	0,9177	1,090
0,662	$41^{\circ}27'$	$35^{\circ}53'$	0,8102	1,235
0,757	$49^{\circ}12'$	$45^{\circ}20'$	0,7030	1,421
0,788	$52^{\circ}00'$	$50^{\circ}36'$	0,6347	1,575

$$\sum = 6,332$$

Kết quả tính các góc θ theo (12) và các đại lượng liên quan, ghi trên các cột còn lại của bảng 2. Theo (16), ta kiểm tra điều kiện:

$$\sum_{i=1}^5 S_i = 11,8 \cdot 6,332 = 74,7\text{mm} < 78\text{mm}$$

Cần chọn lại giá trị của h .

2. Chọn $h = 60\text{mm}$:

$$a = 60/5 = 12\text{mm} ; \sin\alpha = 1,628F(\xi)$$

Các kết quả tính toán ghi trong bảng 3.

Bảng 3

$\sin\alpha$	α	θ	$\cos\theta$	$1/\cos\theta$	$\text{tg}\theta$	$y_i(\text{mm})$
0,923	$17^{\circ}02'$	$8^{\circ}31'$	0,9890	1,011	0,1498	1,8
0,522	$31^{\circ}28'$	$24^{\circ}15'$	0,9118	1,098	0,4505	7,2
0,684	$43^{\circ}10'$	$37^{\circ}19'$	0,7953	1,257	0,7623	16,3
0,782	$51^{\circ}27'$	$47^{\circ}19'$	0,6780	1,473	1,0843	29,3
0,814	$54^{\circ}30'$	$52^{\circ}59'$	0,6020	1,662	1,3262	45,2

$$\sum = 6,501$$

Kiểm tra chiều dài:

$$\sum_{i=1}^5 S_i = 12 \cdot 6,501 = 78\text{mm} (\text{đạt})$$

Kết quả tính y_i theo công thức (13) ghi trên cột cuối của bảng 3. Căn cứ vào những số liệu này ta dễ dàng vẽ được đường đàn hồi (đường I trên hình 6). Chú ý là các số liệu y_i vừa tìm được biểu thị tung độ của đường đàn hồi tương ứng với các điểm lần lượt có hoành độ là $a, 2a, \dots, 5a$ với $a = 12\text{mm}$.

Sau khi tìm được đường biến dạng của hệ ta dễ dàng tìm được các thành phần nội lực trong hệ theo các biện pháp đã quen biết.

B - Trường hợp $P = 100\text{g}$: Áp dụng công thức (10), ta có:

$$\sin\alpha = 45,25 \cdot 10^{-4} h^2 F(\xi)$$

Nếu chọn $h = 21,03\text{mm}$, ta có $\sin\alpha = 2F(\xi)$. Kết quả tính toán ghi trên bảng 4.

Bảng 4

$\sin\alpha$	α	θ	$\cos\theta$	$1/\cos\theta$	$\text{tg}\theta$	$y_i(\text{mm})$
0,36	$21^{\circ}06'$	$10^{\circ}23'$	0,9831	1,016	0,1862	0,78
0,64	$39^{\circ}48'$	$30^{\circ}27'$	0,8612	1,162	0,5879	3,25
0,84	$57^{\circ}08'$	$48^{\circ}28'$	0,6630	1,506	1,1290	8,10
0,96	$73^{\circ}45'$	$65^{\circ}27'$	0,4155	2,409	2,1890	17,32
1,00	$90^{\circ}00'$	$81^{\circ}52'$	0,1403	7,125	6,9970	46,70

$$\Sigma = 13,218$$

Kiểm tra điều kiện (16), ta thấy:

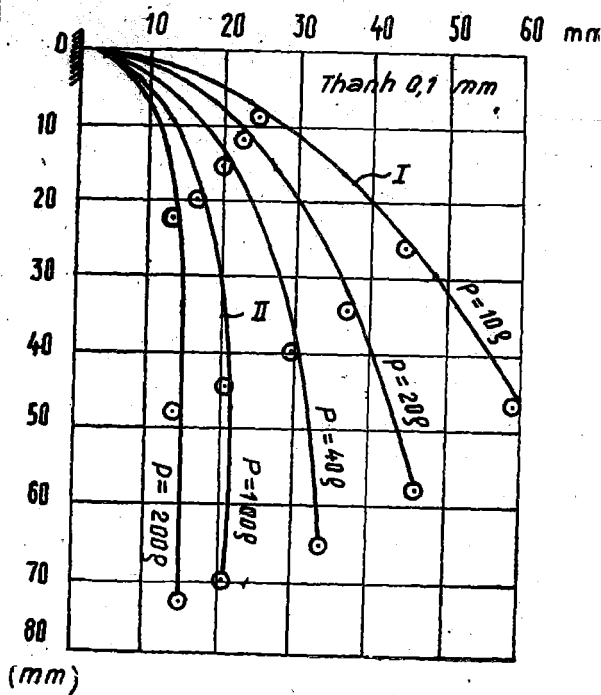
$$\sum_{i=1}^5 S_i = \frac{21,03}{5} \cdot 13,218 = 55,6\text{mm} < 78\text{mm}$$

Cần phải tăng h , nhưng nếu tăng h thì $\sin\alpha > 1$, điều đó chứng tỏ thanh có dạng như trên hình 5b. Đoạn cong OB có chiều dài $LOB = 55,6\text{mm}$.

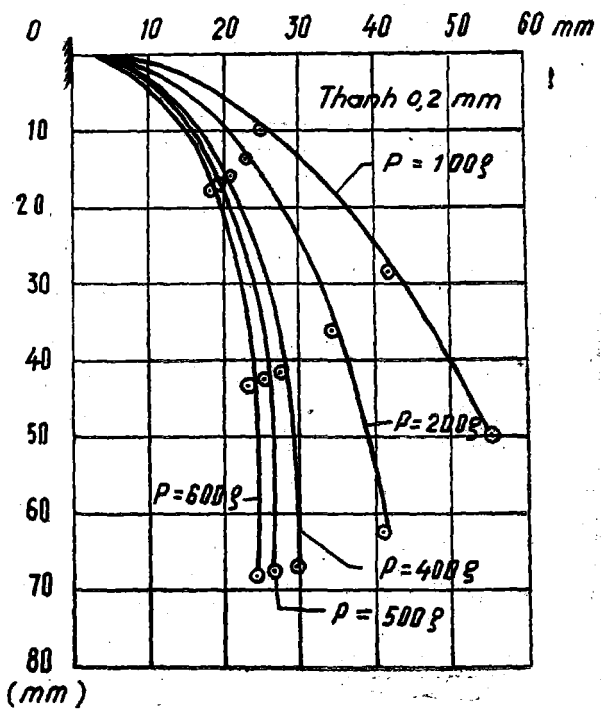
Chiều dài $L_{AB} = 78 - 55,6 = 22,4\text{mm}$.

Kết quả tính độ võng của đoạn OB ghi trên cột cuối của bảng 4. Độ võng cực đại tại A là: $y_A = 46,7 + 22,4 = 69,1\text{mm}$. Đường đàn hồi vẽ trên hình 6 (đường II).

Trong các bảng 5 và 6 ghi kết quả tính toán bằng lý thuyết và kết quả thí nghiệm (Thí nghiệm do Phòng Thí nghiệm Thủy lực trường Đại học Xây dựng thực hiện và cung cấp kết quả) về tọa độ tại đầu A tương ứng với các tải trọng khác nhau tác dụng trên thanh có độ dày 0,1mm và 0,2mm. Trên hình 6 và 7 vẽ các đường đàn hồi tương ứng và các điểm thực nghiệm.



Hình 6



Hình 7

Bảng so sánh kết quả đối với thanh có bề dày 0,1mm.

Bảng 5

P ₀	10g		20g		40g		100g		200g	
	x _A	y _A	x _A	y _A	x _A	y _A	x _A	y _A	x _A	y _A
LT	60,0	45,2	46,0	57,2	33,2	64,2	21,0	69,1	14,9	71,6
TN	59	46	46	57	34	64	22	70	16	73
%	-1,69	1,74	0	-0,35	2,35	-0,31	4,54	1,28	6,88	1,92

Bảng so sánh kết quả đối với thanh có bề dày 0,2mm

Bảng 6

P ₀	100g		200g		400g		500g		600g	
	x _A	y _A	x _A	y _A	x _A	y _A	x _A	y _A	x _A	y _A
LT	55,6	49,7	41,6	60,1	29,8	66,1	26,6	66,6	24,3	67,6
TN	56	50	41	62	29	67	27	68	26	69
%	0,71	0,60	-1,46	1,45	-2,76	1,34	1,48	2,06	6,53	2,03

Địa chỉ
Trường Đại học xây dựng

Nhân ngày 26-9-1979

TÀI LIỆU THAM KHẢO

ПОПОВ Е.П. Нелинейные задачи статики тонких стержней. М. 1948.

RÉSUMÉ

FLEXION DES BARRES MINCES ÉLASTIQUES

On trouvera dans cet article une manière de calculer des barres minces élastiques dont les rigidités de déformation par flexion sont faibles. La méthode de calcul est basée sur la conception que les déplacements sont grands et que la forme de la barre se modifie sensiblement.

Cette méthode permet de résoudre le calcul d'une barre de section constante soumise à des charges déterminées mais quelconques et modifiées suivant les formes de la barre.