Tạp chí CƠ HỌC 1980 số 2 (trang 25 – 31)

SỰ PHÂN BỐ NỒNG ĐỘ HẠT TRONG ỐNG TRỤ TRÒN

TRƯƠNG MINH CHÁNH

TRONG công trình [1] ta đã xây dựng mô hình hỗn hợp lỏng hai thành phần ở dạng phi tuyến, trong đó các hiệu ứng do chuyển động vi mô gây ra đóng vai trò quan trọng. Trong bài này ta sẽ sử dụng mô hình đã được xây dựng để giải thích đúng đắn ảnh hưởng của các lực nâng tới sự phân bố lại nồng độ của hạt trong ống trụ tròn, mô tả chính xác các hiệu ứng nồng độ ở xấp xỉ đã xét.

§1. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CƠ BẢN

Một lớp hỗn hợp đơn giản và quan trọng của các loại hỗn hợp lỏng đồng thể vi mô là hỗn hợp lỏng vi cực. Hỗn hợp lỏng vi mô được gọi là hỗn hợp lỏng vi cực nếu đối với tất cả các chuyển động đều có dạng của ten xơ vận tốc biến dạng vi mô $\overline{v}$ và ten xơ ứng xuất vi mô $\overline{\lambda}$ như sau:

$$\overline{v} = \overline{v}_1 . \overline{E}, \quad \overline{\lambda} = \lambda . \overline{E} + (\overline{g}\ \overline{\lambda}_{11})^A + \overline{\lambda}_{21} . E \tag{1.1}$$

trong đó $\overline{E}$ là ten xơ Levi-Civita, $\overline{g}$ là ten xơ đơn vị hạng hai. Như vậy hỗn hợp lỏng vi cực biểu thị ảnh hưởng của chuyển động vi mô qua sự quay được đặc trưng bởi vận tốc quay vi mô $\overline{v}_1$

Đối với hỗn hợp đẳng hướng vi mô ta có ten xơ quán tính vi mô:

$$\overline{I} = j\,\overline{g} \tag{1.2}$$

trong đó j = const là mô men quán tính vi mô, đặt:

$$\overline{I} = I_1 . \overline{E}; \quad \overline{\dot{\sigma}} = \dot{\sigma}_1 . \overline{E} \tag{1.3}$$

Khi đó hỗn hợp lỏng vi cực đẳng hướng hai thành phần (n = 2) trong đó không có phản ứng hóa học được mô tả bởi hệ phương trình [1]:

Phương trình bảo toàn khối lượng cho toàn hỗn hợp:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overline{\nabla} . (\rho\, \overline{u}_a) = - \nabla . \sum_\alpha \overline{J}^a_\alpha \qquad (\alpha = 1,2) \tag{1.4}$$

Phương trình xác định nồng độ khối lượng cho thành phần thứ nhất:

$$\rho \frac{d^{(a)} c}{dt} = - \overline{\nabla} . \overline{J}^a_1 + c\, \overline{\nabla} . (\sum_\alpha \overline{J}^a_\alpha) \tag{1.5}$$

Phương trình cân bằng động lượng:

$$\rho \frac{d^{(a)} \overline{u}_a}{dt} = \rho \overline{f} + \overline{\nabla} (t_0 - p) - \overline{\nabla} \times \overline{t}_1 + \overline{\nabla} . \overline{t}_2 - \sum_\alpha \left\{ \frac{D^{(a)} \overline{J}^a_\alpha}{Dt} + \overline{\nabla} . \frac{\overline{J}^a_\alpha \overline{J}^a_\alpha}{\rho_\alpha} \right\} \tag{1.6}$$

Phương trình cân bằng mômen động lượng:

$$\rho\left(\dot{\overline{\sigma}}_1 - \overline{l}_1\right) = \overline{t}_1 + \overline{\nabla}\,\lambda_o + \frac{1}{2}\,\overline{\nabla}\times\overline{\lambda}_{11} + \overline{\nabla}\,.\,\overline{\lambda}_{21} \tag{1.7}$$

Phương trình xác định dòng khuyếch tán:

$$\frac{\mathbf{D}^{(a)}\overline{J}_1^a}{\mathbf{Dt}} + \overline{\nabla}\,.\,\frac{\overline{J}_1^a\,\overline{J}_1^a}{\rho_1} = \overline{Q}_1^a + \overline{\nabla}\,R_{01}^a - \overline{\nabla}\times\overline{R}_{11}^a + \overline{\nabla}\,.\,\overline{R}_{21} \tag{1.8}$$

Trong các phương trình trên $\rho = \sum_\alpha \rho_\alpha$ $(\alpha = 1,2)$ là mật độ khối lượng của toàn bộ khối lượng hỗn hợp, ρ_α là mật độ khối lượng của mỗi trường hợp thành thứ α, $\overline{u}_a$ là vận tốc đặc trưng trung bình của hỗn hợp xác định theo công thức:

$$\overline{u}_a = \sum_\alpha a_\alpha\,\overline{u}_\alpha \quad . \quad \sum_\alpha a_\alpha = 1 \tag{1.9}$$

còn dòng khuyếch tán $\overline{J}_\alpha^a$ xác định theo công thức:

$$\overline{J}_\alpha^a = \rho_\alpha\,(\overline{u}_\alpha - \overline{u}_a), \quad \sum_\alpha \frac{a_\alpha}{\rho_\alpha}\,\overline{J}_\alpha^a = 0 \tag{1.10}$$

c là nồng độ khối lượng $\left(c = \frac{\rho_1}{\rho_o}\right)$ của môi trường hợp thành thứ nhất; $\rho\overline{f} = \sum_\alpha \rho_\alpha\,\overline{f}_\alpha$ với $\overline{f}_\alpha$ là lực khối tác động trong môi trường hợp thành thứ α, $\overline{l}$ là lực khối vi mô, $\overline{l}_1$ là mô men khối.

Tốc độ thay đổi vận tốc quay địa phương được xác định theo công thức:

$$\rho\dot{\overline{\sigma}}_1 = j\left\{\rho\,\frac{d^{(a)}\overline{v}_1}{dt} + \sum \overline{J}_\alpha^a\,.\,\overline{\nabla}\,\overline{v}_1\right\} \tag{1.11}$$

Các đạo hàm theo thời gian được xác định theo công thức:

$$\frac{d^{(a)}}{dt}(\ldots) = \frac{\partial}{\partial t}(\ldots) + \overline{u}_a\,.\,\overline{\nabla}\,(\ldots)$$

$$\frac{\mathbf{D}^{(a)}\overline{J}_\alpha^a}{\mathbf{Dt}} = \frac{d^{(a)}\overline{J}_\alpha^a}{dt} + \overline{J}_\alpha^a\,.\,\overline{\nabla}\,\overline{u}_a + \overline{J}_\alpha^a\,\overline{\nabla}\,.\,\overline{u}_a \tag{1.12}$$

còn t_o, $\overline{t}_1$, $\overline{t}_2$ và R_{01}^a, $\overline{R}_{11}^a$, $\overline{R}_{21}^a$ tương ứng là các thành phần của ten xơ $\overline{t} + P\overline{g}$ và ten xơ ứng xuất khuyếch tán, $\overline{t}$ là ten xơ ứng xuất trung bình của hỗn hợp:

Các phương trình cấu trúc phi tuyến nhận được trong [1] đối với t_o, $\overline{t}_1$, $\overline{t}_2$, $\overline{F}_1^a$, R_{01}^a, $\overline{R}_{11}^a$, ... có thể viết dưới dạng:

$$\begin{aligned}
t_o &= l^5\overline{\nabla}\,.\,\overline{u}_a + l_1^7\overline{\nabla}\,.\,\frac{\overline{J}_1^a}{\rho_1} + k_6\,\overline{J}_1^a\,.\,\overline{J}_1^a + 2k_8\,\overline{J}_1^a\,.\,\overline{\Omega}_v,\\
R_{01}^a &= l_1^7\overline{\nabla}\,.\,\overline{u}_a + l_{11}^{10}\,\overline{\nabla}\,.\,\frac{\overline{J}_1^a}{\rho_1} + k_{16}\,\overline{J}_1^a\,.\,\overline{J}_1^a + 2k_{18}\,\overline{J}_1^a\,.\,\overline{\Omega}_v,\\
\lambda_o &= l^{11}\overline{\nabla}\,.\,\overline{v}_1 - k_{21}\overline{J}_1^a\,.\,(\overline{v}_1 - \overline{\Omega}_u) + k_{22}\overline{J}_1^a\,.\,\overline{\Omega}_J.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned}
\overline{F}_1^a = {} & l_{11}^{12}\overline{J}_1^a + 2l_1^{14}\overline{\Omega}_v - k_6\overline{J}_1^a\,\overline{\nabla}\,.\,\overline{u}_a - k_{16}\,\overline{J}_1^a\,\overline{\nabla}\,.\,\frac{\overline{J}_1^a}{\rho_1} +\\
& + k_{23}\,\overline{J}_1^a\times(\overline{v}_1 - \overline{\Omega}_u) + k_{24}\overline{J}_1^a\times\overline{\Omega}_J + k_{25}\,\overline{J}_1^a\,.\,\overline{D}_u + k_{26}\,\overline{J}_1^a\,.\,\overline{D}_J.
\end{aligned}$$

$$\overline{\lambda}_{11} = -\,l_1^{14}\,\overline{J}_1^{a} - 2l^{21}\overline{\Omega}_v + k_8\overline{J}_1^{a}\,\overline{\nabla}\cdot\overline{u_a} + k_{18}\,\overline{J}_1^{a}\overline{\nabla}\cdot\frac{\overline{J}_1^{a}}{\rho_1} +$$

$$+ k_{33}\,\overline{J}_1^{a}\times(\overline{v}_1 - \overline{\Omega}_u) - k_{34}\,\overline{J}_1^{a}\times\overline{\Omega}_J + k_{35}\,\overline{J}_1^{a}\cdot\overline{D}_u + k_{36}\,\overline{J}_1^{a}\cdot\overline{D}_J.$$

$$\overline{t}_1 = -\,2l^{37}\,(\overline{v}_1 - \overline{\Omega}_u) - 2l_1^{38}\,\overline{\Omega}_J - k_{21}\,\overline{J}_1^{a}\,\overline{\nabla}\cdot\overline{v}_1 - k_{33}\,\overline{J}_1^{a}\times\overline{\Omega}_v + k_{48}\,\overline{J}_1^{a}\cdot\overline{D}_v.$$

$$\overline{R}_{11}^{a} = -\,2l_1^{28}\,(\overline{v}_1 - \overline{\Omega}_u) + 2l_{11}^{29}\,\overline{\Omega}_J - k_{22}\overline{J}_1^{a}\overline{\nabla}\cdot\overline{v}_1 + k_{34}\overline{J}_1^{a}\times\overline{\Omega}_v - k_{50}\,\overline{J}_1^{a}\cdot\overline{D}_v.$$

$$\overline{t}_2 = l^{30}\,\overline{D}_u + l_1^{31}\,\overline{D}_J - k_{25}\,(\overline{J}_1^{a}\,\overline{J}_1^{a} - \frac{1}{3}\,\overline{J}_1^{a}\cdot\overline{J}_1^{a}\,\overline{g}) + 2k_{35}\,(\overline{J}_1^{a}\,\overline{\Omega}_v - \frac{1}{3}\,\overline{J}_1^{a}\cdot\overline{\Omega}_v\,\overline{g})^{c}.$$

$$\overline{R}_{21}^{a} = l_1^{31}\,\overline{D}_u + l_{11}^{33}\,\overline{D}_J - k_{26}\,(\overline{J}_1^{a}\overline{J}_1^{a} - \frac{1}{3}\,\overline{J}_1^{a}\cdot\overline{J}_1^{a}\,\overline{g}) + 2k_{36}\,(\overline{J}_1^{a}\overline{\Omega}_v - \frac{1}{3}\,\overline{J}_1^{a}\cdot\overline{\Omega}_v\,\overline{g})^{c}.$$

$$\overline{\lambda}_{21} = 2l_{36}\,\overline{D}_v + k_{48}\left[\overline{J}_1^{a}\,(\overline{v} - \overline{\Omega}_u) - \frac{1}{3}\,\overline{J}_1^{a}\cdot(\overline{v}_1 - \overline{\Omega}_u)\,\overline{g}\right]^{c}$$

$$+ k_{50}\left(\overline{J}_1^{a}\,\overline{\Omega}_J - \frac{1}{3}\,\overline{J}_1^{a}\cdot\overline{\Omega}_J\,\overline{g}\right)^{c}.$$

$$\overline{Q}_1^{a} = \rho_1\left\{-\,\overline{F}_1^{a} - \left(v_1 - \frac{\rho_2 a_1}{\rho_1 a_2}\,v_2\right)\overline{\nabla}P - \left(1 - \frac{\rho_2 a_1}{\rho_1 a_2}\right)\frac{d^{(a)}\overline{u}_a}{dt} +\right.$$

$$+ \left(\overline{f}_1 - \frac{a_1\rho_2}{a_2\rho_1}\,\overline{f}_2\right) - \left(\overline{\nabla}\mu_1 - \frac{a_1\rho_2}{a_2\rho_1}\,\overline{\nabla}\mu_2\right)_{P,T} +$$

$$\left. + \frac{a_1}{a_2\rho_1}\left(\frac{D^{(a)}\overline{J}_2^{a}}{Dt} + \overline{\nabla}\cdot\frac{\overline{J}_2^{a}\overline{J}_2^{a}}{\rho_2}\right)\right\}$$

trong đó:

$$\overline{\Omega}_u = \frac{1}{2}\,\overline{\nabla}\times\overline{u}_a,\quad \overline{\Omega}_J = \frac{1}{2}\,\overline{\nabla}\times\frac{\overline{J}_1^{a}}{\rho_1},\quad \overline{\Omega}_v = \frac{1}{2}\,\overline{\nabla}\times\overline{v}_1$$

còn $\overline{D}_u$, $\overline{D}_J$ và $\overline{D}_v$ tương ứng là các ten xơ lệch đối xứng của $\overline{\nabla}\,\overline{u}_a$, $\overline{\nabla}\,\dfrac{\overline{J}_1}{\rho_1}$, $\overline{\nabla}\,\overline{v}_1$. Các hệ số vật chất nói chung phụ thuộc vào ρ và c đồng thời thỏa mãn các điều kiện được suy ra từ nhiệt động học của các quá trình không cân bằng sau:

$$l^5 \geqslant 0,\ l_{10}^{11} \geqslant 0,\ l^{11} \geqslant 0,\ l^{21} \geqslant 0,\ l^{27} \geqslant 0,$$

$$l_{11}^{29} \geqslant 0,\ l^{30} \geqslant 0,\ l_{11}^{33} \geqslant 0,\ l^{36} \geqslant 0:$$

$$l^5 l_{11}^{10} \geqslant (l_1^7)^2,\ l_{11}^{12} l^{21} \geqslant (l_1^{14})^2,\ l^{27} l_{11}^{29} \geqslant (l_1^{28})^2, \tag{1.14}$$

$$l^{30} l_{11}^{33} \geqslant (l_1^{31})^2.$$

Do trong thực tế nhiều hỗn hợp chỉ biểu hiện tính dị thể ở những kích thước đặc trưng nhỏ hơn giá trị d_* nào đó nên đối với các bài toán có kích thước đặc trưng lớn hơn d_* ta có thể xét hỗn hợp dị thể như là hỗn hợp đồng thể. Tuy nhiên trong nhiều trường hợp khác ta cũng có thể sử dụng lí thuyết về các hỗn hợp lỏng đồng thể vi mô đã phát triển để xét các bài toán về các hỗn hợp dị thể, trong các trường hợp đó ta cần thay ρ_α bằng $\rho_\alpha^* = \rho_\alpha\varphi_\alpha$ trong đó ρ_α là mật độ thực của pha thứ α còn φ_α là nồng độ thể tích của pha thứ α được xác định theo công thức:

$$\varphi_\alpha = \frac{V_\alpha}{V},\quad \sum_\alpha \varphi_\alpha = 1 \tag{1.15}$$

(V_α và V tương ứng là thể tích của pha thứ α và thể tích của toàn hỗn hợp).

§ 2 — SỰ PHÂN BỐ LẠI NỒNG ĐỘ TRONG ỐNG TRỤ TRÒN

Các hiệu ứng nồng độ trong dòng chảy được nghiên cứu với một số lượng lớn các công trình khoa học, tuy nhiên vẫn chưa giải thích về định lượng một cách triệt để hiện tượng trên [2–4]. Khi phân tích các lực tác động vào các hạt cầu rắn trong dòng chất lỏng nhớt không nén được với nồng độ thể tích rất bé người ta đã tìm được các lực ở dạng [4]:

$$\overline{F_e} = -\alpha_1(\overline{u} - \overline{v}) - \alpha_2\overline{\nabla} \times \left(\frac{1}{2}\overline{\nabla} \times \overline{v}\right) - \alpha_3(\overline{u} - \overline{v}) \times \overline{\omega} - \alpha_4(\overline{u} - \overline{v}) \cdot \overline{D_v}$$

trong đó $\overline{u}$ và $\overline{\omega}$ là vận tốc chuyển động tịnh tiến và chuyển động quay của hạt cầu; $\overline{v}$ và $\overline{D_v}$ tương ứng là vận tốc của chất lỏng và ten xơ lệch vận tốc biến dạng của nó. Các hệ số $\alpha_1 - \alpha_4$ đều không âm và có giá trị cụ thể trong mỗi bài toán:

$$\alpha_1 = 6\pi\mu a, \quad \alpha_2 = \frac{3}{4}\mu, \quad \alpha_3 = \pi a^3\rho_2, \quad \alpha_4 = 81{,}2a^2\rho\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{1/2}|\overline{D_v}|^{-\frac{1}{2}}$$

(μ độ nhớt trượt của chất lỏng, a là bán kính của hạt cầu). Đối với hạt hình cầu nhỏ ta có thể lấy $\overline{\omega} = \frac{1}{2}\overline{\nabla} \times \overline{v}$, khi đó so sánh công thức tính lực ở trên trong hệ tọa độ quay với vận tốc góc bằng $\overline{v_1}$ và công thức $-\overline{F_1^a}$ trong (1.13) đối với hỗn hợp lỏng vi cực ta sẽ có thêm các điều kiện hạn chế:

$$l_1^{14} \leqslant 0, \quad k_{28} \leqslant 0, \quad k_{25} \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Dưới đây ta dùng mô hình hỗn hợp lỏng vi cực phi tuyến đẳng hướng vi mô và vĩ mô để mô tả các hiệu ứng nồng độ trong dòng chất lỏng chứa các hạt hình cầu rắn. Bài toán được đặt ra như sau: Xét sự phân bố lại nồng độ trong các ống trụ tròn bán kính R của các hạt hình cầu rắn có nồng độ thể tích $\varphi = \varphi_1$ và mật độ thực $\rho_1 = v_1^{-1} =$ $=$ const trong chất lỏng có mật độ thực $\rho_2 = v_2^{-1} =$ const và nồng độ $\varphi_2 = 1 - \varphi$ dưới tác dụng của lực khối $\overline{f_1} = \overline{f_2} = \overline{g_o}$ ($g_o =$ const là gia tốc trọng trường), $\overline{l} = \overline{l_1} \cdot \overline{E} = 0$ và gradient áp suất không đổi dọc theo trục ống. Dòng ở đây là đối xứng trục nên tiện hơn cả là ta chọn vận tốc trung bình theo thể tích $a_\alpha = \varphi_\alpha$ và tìm nghiệm ở dạng:

$$\overline{u_v} = u(r)\,\overline{e_x}, \quad \overline{v_1} = v(r)\,\overline{e_\theta}, \quad \overline{J_1^a} = J(r)\,\overline{e_x}, \quad \varphi = \varphi(r) \tag{2.2}$$

trong hệ tọa độ trụ (x, r, θ) với trục x hướng theo trục ống.

Trong trường hợp khi các hàm nhiệt động lực học đều là hàm đồng nhất bậc một theo các khối lượng thì hệ phương trình nhận được sẽ có dạng:

$$\overline{J_1^v} = -\frac{2l_1^{14}}{l_{11}^{12}}\overline{\Omega_v} + \frac{1}{l_{11}^{12}}\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\overline{g_o};$$

$$\overline{\nabla\varphi} = -\frac{k_{25}}{D}\overline{J_1^v} \cdot \overline{D_u} - \frac{k_{23}}{D}\overline{J_1^v} \times (\overline{v_1} - \overline{\Omega_u}); \tag{2.3}$$

$$\overline{\nabla p} - \rho_o\overline{g_o} = -(\eta + \xi)\overline{\nabla} \times \overline{\nabla} \times \overline{u_v} + 2\xi\overline{\nabla} \times \overline{v_1}; \quad o = -k\overline{\nabla} \times \overline{\nabla} \times \overline{v_1} + 2\xi\overrightarrow{\nabla} \times \overline{u_v}$$

Để nhận được phương trình (2.3) ở trên ta đã giả định bỏ qua ảnh hưởng của các lực mặt khuếch tán $\overline{R_\alpha^a}$ và các hiệu ứng phi tuyến trong các phương trình thủy động và các hiệu ứng phi tuyến bậc hai theo $\overline{J_\alpha^a}$. Trong (2.3) ta đặt:

$$D = \frac{\delta}{\delta\varphi}\left(\mu_1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\mu_2\right) \geqslant 0, \quad 0 = \eta = \frac{1}{2} l^{30}, \quad 0 = \overline{\xi} = l^{27};$$

$$0 \leqslant \gamma = 2\left[k^{-1}\xi\eta(\xi+\eta)^{-1}\right]^{1/2}, \quad G = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \rho_o g_o\right), \tag{2.4}$$

$$0 \leqslant k = \frac{1}{l_{11}^{12}}\left[2l_{11}^{12} l^{36} + l_{11}^{12} l^{21} - (l_1^{14})^2\right],$$

$$\rho_o = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi r\rho dr = \text{const}, \quad A = mGR(\xi+\eta)\left\{4\eta[\eta - m(\xi+\eta)]I_1(\gamma R)\right\}^{-1}$$

(tính không âm của D suy ra từ lí thuyết khuyếch tán cổ điển). Nghiệm của bài toán cần phải thỏa mãn các điều kiện:

$$u = 0, \quad v - \Omega_u = mv \qquad \text{khi } r = P:$$

$$\varphi_o = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi r\varphi dr = \text{const}. \tag{2.5}$$

Bài toán (2.3), (2.5) cho nghiệm ở dạng [5]:

$$u(r) = 2A\xi(\xi+\eta)^{-1}\gamma^{-1}[I_o(\gamma R) - I_o(\gamma r)] + \frac{G}{4\eta}(R^2 - r^2).$$

$$v(r) = 2AI_1(\gamma r) + \frac{1}{4\eta}Gr$$

$$\varphi(r) = \varphi_o - \frac{l_1^{14}}{2l_{11}^{12} D}\left\{\frac{1}{2}\frac{G}{\eta}k_{25}A\left[rI_1(\gamma r) - \frac{2}{\gamma}I_2(\gamma R)\right] + \right.$$
$$+ A^2(\xi+\eta)^{-1}(k_{22}\xi + k_{23}\eta)\left[I_o^2(\gamma r) - I_o^2(\gamma R) + I_1^2(\gamma R)\right] +$$
$$+ \frac{1}{16}\frac{G^2}{\eta}k_{25}(2r^2 - R^2) +$$
$$\left. + AG\eta^{-1}(\xi+\eta)^{-1}(k_{25}\xi + k_{23}\eta)\frac{1}{\gamma}\left[I_o(\gamma r) - \frac{2}{\gamma R}I_1(\gamma R)\right]\right\} -$$
$$\frac{1}{l_{11}^{12}D}\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)g_o\left\{\frac{1}{8}\frac{G}{\eta}k_{25}\left(r^2 - \frac{1}{2}R^2\right) + A(\xi+\eta)^{-1}(k_{25}\xi + \right.$$
$$\left. + k_{23}\eta)\frac{1}{\gamma}\left[I_o(\gamma r) - \frac{2}{\gamma R}I_1(\gamma R)\right]\right\}.$$

trong đó I_x $(x = 0, 1, 2)$ là các hàm Bessel biến hình loại một bậc x

Để làm sáng tỏ ảnh hưởng của thành ống và trường trọng lực vào sự phân bố lại nồng độ ta khai triển nghiệm φ nhận được ra chuỗi lũy thừa theo $\lambda = \gamma R \ll 1$ và chỉ hạn chế xét số hạng có bậc thấp nhất. Kết quả nhận được trong các trường hợp cụ thể sẽ như sau:

a) Khi vận tốc quay của hỗn hợp thỏa mãn điều kiện dính trên biên ($v = 0$, $m \to \infty$ khi $r = R$). Khi đó sự phân bố nồng độ (2.6) sẽ có dạng:

$$\varphi = \varphi_o - \frac{l_1^{14}}{16 l_{11}^{12} D\eta}\frac{G^2R^2}{I_1^2(\gamma R)}\Bigg\{-k_{25}I_1(\gamma R)\left[\frac{r}{R}I_1(\gamma r) - \frac{2}{\gamma R}I_2(\gamma R) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{r}{R}\right)^2 I_1(\gamma R) + \frac{1}{2}I_1(\gamma R)\right] + (\xi+\eta)^{-1}(k_{25}\xi + k_{28}\eta)\left[\frac{1}{2}I_o^2(\gamma r) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}I_o^2(\gamma R) + \frac{1}{2}I_1^2(\gamma R) - \frac{2}{\gamma R}I_o(\gamma r)I_1(\gamma R) + \frac{4}{(\gamma R)^2}I_1^2(\gamma R)\right]\Bigg\} - \tag{2.7}$$
$$- \frac{1}{l_{11}^{12}D}\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)g_o\left\{\frac{1}{8}\frac{G}{\eta}k_{25}\left(r^2 - \frac{1}{2}R^2\right) - \frac{GR(k_{25}\xi + k_{23}\eta)}{4\eta(\xi+\eta)I_1(\gamma R)} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{1}{\gamma}\left[I_o(\gamma r) - \frac{2}{\gamma R}I_1(\gamma R)\right]\right\}$$

Với λ đủ nhỏ ta khai triển biểu thức của φ ở trên ra chuỗi lũy thừa theo λ và hỉ giới hạn xét tới các số hạng có bậc thấp nhất, khi đó ta có:

$$\varphi = \varphi_o - \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)g_o\frac{GR^2(k_{25} - k_{23})}{8(\xi+\eta)Dl_{11}^{12}}\left(s^2 - \frac{1}{2}\right); \quad s = \frac{r}{R} \tag{2.8}$$

Dễ dàng thấy rằng khi $G > 0$ (dòng chảy lên) thì tại trục ống nồng độ của hạt ạt giá trị cực tiểu nếu $\rho_1 < \rho_2$ và đạt giá trị cực đại nếu $\rho_1 > \rho_2$ tức là hạt nhẹ hơn hất lỏng sẽ bị dạt ra thành ống còn hạt nặng hơn sẽ tập trung lại ở trục ống. Khi $G < 0$ dòng chảy xuống) ta sẽ có hình ảnh ngược lại. Kết quả này rất phù hợp với kết quả rong [2, 3]. Sự phân bố nồng độ (2.8) đối với dòng chảy lên được chỉ rõ trong hình 1.

b) Trường hợp trên biên không có xoáy của hỗn hợp ($m = 1$). Thay giá trị nhận ược của A khi cho $m = 1$ vào (2.6) ta nhận được sự phân bố nồng độ tương ứng.

Với λ đủ nhỏ làm tương tự như trên ta có:

$$\varphi = \varphi_o - \frac{GR^2k_{23}}{8\xi Dl_{11}^{12}}\left\{\frac{l_1^{14}}{2\xi} - \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)g_o\right\}\left(s^2 - \frac{1}{2}\right) \tag{2.9}$$

Từ (2.9) ta thấy tại trục ống nồng độ sẽ đạt giá trị cực đại đối với dòng chảy lên hi $\rho_1 > \rho_2$ và đối với dòng chảy xuống khi $\rho_1 < \rho_2$.

c) Trường hợp vận tốc quay của hạt và xoáy của hỗn hợp bằng nhau trên biên $n = 0$).

Trong trường hợp này sự phân bố nồng độ (2.6) có dạng:

$$\varphi = \varphi_o - \frac{1}{8}\frac{GR^2k_{25}}{\eta Dl_{11}^{12}}\left\{\frac{l_1^{14}}{2}G + \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)g_o\right\}\left(s^2 - \frac{1}{2}\right) \tag{2.10}$$

Rõ ràng tại trục ống sự phân bố nồng độ sẽ đạt giá trị cực tiểu trong dòng chảy :n nếu $\rho_1 < \rho_2$ và trong dòng chảy xuống nếu $\rho_1 > \rho_2$.

d) Trường hợp mật độ thực của hai pha như nhau ($\rho_1 = \rho_2$). Trong trường hợp ày đối với điều kiện biên thứ nhất ta phải xét ở (2.7) tới số hạng bậc cao hơn theo khi $\lambda \ll 1$. Khi đó ta có:

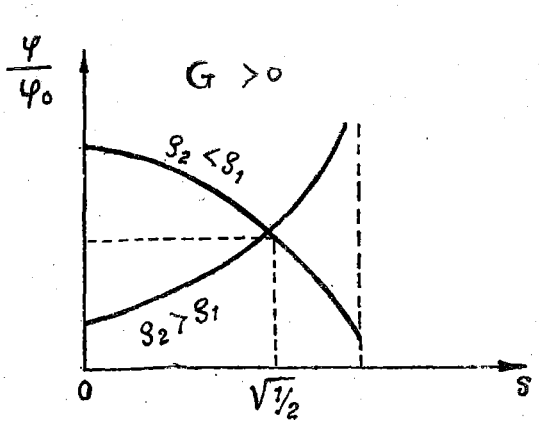
$$\varphi = \varphi_o - \frac{l_1^{14}G^2R^2\lambda^2}{128D\eta(\xi+\eta)l_{11}^{12}}\left(k_{23} - k_{25}\right)\left(s^4 - s^2 + \frac{1}{6}\right) \tag{2.11}$$

Từ (2.11) ta thấy ngay rằng nồng độ của các hạt đạt giá trị cực tiểu tại trục ống à đạt giá trị cực đại tại vành ống $s = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Kết quả thu được ở đây phù hợp với ực nghiệm [2. 6]. Trong trường hợp này ta có $\rho = \rho_o$ và rõ ràng ảnh hưởng của trọng rc coi như không có, do đó kết quả thu được cũng đúng cho trường hợp ống nằm gang và nó mô tả đúng hiệu ứng nồng độ Ségre-Silberberg [2, 6]. Sự phân bố nồng độ .11) được chỉ rõ trên hình 2.

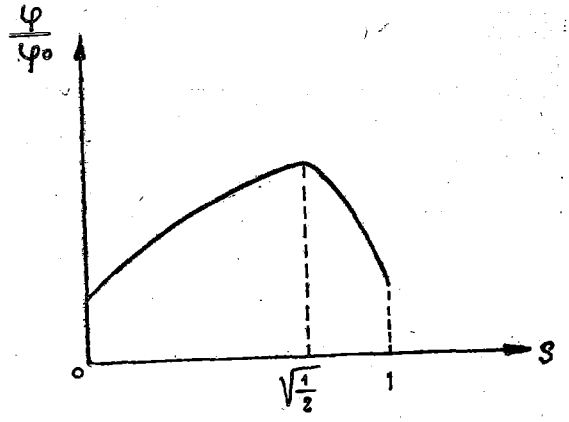
)

Đối với điều kiện biên loại thứ hai từ (2.9) ta thấy nồng độ hạt đạt giá trị cực đại tại trục ống, ở đây vai trò của lực nâng do gradient vận tốc gây ra coi như không đáng kể. Có thể nói rằng ở đây biên đóng vai trò là một tác nhân kìm hãm chuyển động xoáy của hỗn hợp và do đó góp phần vào việc loại trừ ảnh hưởng của gradient vận tốc.

Với điều kiện biên thứ ba từ (2.10) ta thấy nồng độ đạt giá trị cực tiểu tại trục ống. Ở đây vai trò của lực nâng do sự quay của hỗn hợp không đáng kể.



Hình 1



Hình 2

Qua ba trường hợp đã xét ở trên ta thấy hiệu ứng Ségre-Silberberg được sinh ra bởi các cơ chế thủy động tinh vi hơn hiệu ứng nồng độ gần thành và hiệu ứng nồng độ gần trục (biểu hiện qua việc lấy xấp xỉ theo λ) bởi vậy nó có thể bị loại trừ bởi các quá trình khuếch tán trong hỗn hợp. Điều này giải thích tại sao trong một số công trình, một số tác giả đã phủ nhận tồn tại của hiệu ứng này.

Địa chỉ
Đại học Tổng hợp

Nhận ngày 17/2/1979

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Nguyễn văn Diệp, Trương minh Chánh.** Lí thuyết về các hỗn hợp lỏng đồng thể vi mô. Tạp chí Cơ học, Số 3—4/1979.

2. Павловский ю.н., Регирер с.а., скоъелева и.м. итоги науки, гидромеханика, 1968, М.1970, 55-61.

3. **Jeffery R.C., Pearson J.R,N** J. fluid mech., 1965, 22, pt.. 4, 721-735.

4. **Happel J., Brenner K.** Low Reynolds number hydrodynamics, Prentic-Hall, 1965.

5. **Condiff D.W., Dahler J.S.** Phys. fluid, 1964, Vol. 7, 6, 842—854

6. Нгуен ван дьеп. чыонь минь Тянь.

Bull. Acad. Pol. Sci., sér. sci. techn., 1975, 23, 4, 149—156.

SUMMARY

CONCENTRATION DISTRIBUTION OF PARTICLES IN PIPE FLOW

This paper deals with the construction of a generalized diffusive theory of microfluid polar mixtures. The results of the problem on the concentration distribution of particles in pipe flow are given. These results are obtained in arcordence with the experimental values.