Tạp chí CƠ HỌC 1980 số 2 (trang 19 – 24)

SỰ PHÂN BỐ NỒNG ĐỘ TRONG DÒNG RỐI

NGUYỄN TẤT ĐẮC – PHẠM SƠN

KHI tính toán bồi xói và phân bố phù sa trong dòng chảy, nhiều tác giả trong và ngoài nước đã sử dụng phương trình khuếch tán cổ điển với hệ số khuếch tán và phân bố vận tốc là một hằng số [3, 4, 5]. Điều này không hợp với bức tranh thực của dòng. Trong thủy lực học kênh hở, đối với bài toán phẳng, dừng người ta đã thu được quy luật phân bố vận tốc trung bình là hàm lô ga của chiều thẳng đứng và xác định được quy luật phân bố ứng suất tiếp trong dòng. Các quy luật này rất phù hợp với thực tế và nó cho hệ số khuếch tán theo chiều thẳng đứng là một hàm bậc hai, triệt tiêu trên đáy và trên mặt dòng, đạt cực đại ở phần giữa dòng [1, 2, 6]. Theo Gri-sa-nhin [6], việc xem hệ số khuếch tán không đổi không thể áp dụng được với dòng chảy hở ngay cả với xấp xỉ bậc một. Đối với dòng phẳng, có thể thấy rằng độ dài đặc trưng dọc theo dòng lớn hơn rất nhiều độ dài đặc trưng theo chiều sâu; do đó thành phần chứa đạo hàm theo x (dọc theo dòng) trong phương trình khuếch tán nhỏ so với các thành phần khác. Vì vậy việc coi hệ số của các thành phần chứa đạo hàm theo x bằng hằng số có thể chấp nhận được.

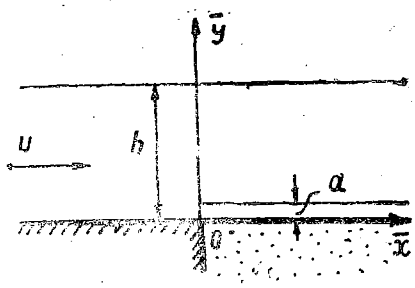
Dưới đây các tác giả xét bài toán xói sau công trình bằng cách giải phương trình khuếch tán cổ điển với hệ số khuếch tán theo chiều thẳng đứng là hàm bậc 2. Đã thu được nghiệm cho phân bố nồng độ.

Bài toán 1: Sự phân bố nồng độ trong dòng phẳng, đều:

Bài toán đưa về tìm hàm phân bố nồng độ $C_1(\bar{y})$ thỏa mãn phương trình và điều kiện biên sau:

$$ku_* \frac{d}{d\bar{y}}\left[\bar{y}\left(1-\frac{\bar{y}}{h}\right)\frac{dC_1}{d\bar{y}}\right] + \omega\frac{dC_1}{d\bar{y}} = 0, \qquad (1.1)$$

$$C_1(h) = 0\,; \qquad C_1(a) = C_a = \text{const},$$



ở đây: k là hằng số Các-man; u_* là vận tốc động lực, h là độ sâu của dòng; ω là độ thô thủy lực; C_1 là nồng độ hạt rắn. Trục $\bar{y}$ thẳng đứng lên trên; C_a là nồng độ tại độ cao a so với đáy. Chú ý rằng, từ thực nghiệm người ta thấy luôn luôn tồn tại một lớp sát đáy với độ dày a, trong đó nồng độ không đổi. Nghiệm (1.1) được cho trong [6].

$$C_1(\bar{y}) = C_a\left(\frac{a}{h-a}\right)^{\lambda}\left(\frac{h}{\bar{y}}-1\right)^{\lambda}; \quad \text{với} \quad \lambda = \frac{\omega}{ku_*}. \qquad (1.2)$$

Bài toán 2: Sự phân bố nồng độ sau công trình: Giả sử có dòng chảy đều với vận tốc không đổi U. Trong dòng có công trình nằm ở phía âm của trục x. Xét sự phân bố nồng độ hạt rắn C khi $\bar{x} \geqslant 0$. Nếu xem khuếch tán dọc theo dòng là không đổi và hệ số khuếch tán theo chiều thẳng đứng là một hàm của $\bar{y}$ [6], bài toán đưa về giải phương trình khuếch tán dừng sau:

$$U\frac{\partial C}{\partial \bar{x}} = A\frac{\partial^2 C}{\partial \bar{x}^2} + ku_*\frac{\partial}{\partial \bar{y}}\left[\bar{y}\left(1-\frac{\bar{y}}{h}\right)\frac{\partial C}{\partial \bar{y}}\right] + \omega\frac{\partial C}{\partial \bar{y}} \tag{2.1}$$

với các điều kiện biên:

$$\left.\begin{array}{l} C(o, \bar{y}) = 0; \\ C(\infty, \bar{y}) = C_1(\bar{y}) \end{array}\right\} a < \bar{y} \leqslant h; \qquad \left.\begin{array}{l} C(\bar{x}, h) = 0; \\ C(\bar{x}, a) = C_a \end{array}\right\} \bar{x} \geqslant 0. \tag{2.2}$$

Trong đó A = const là hệ số khuếch tán theo chiều $\bar{x}$, các ký hiệu khác như bài toán 1. Điều kiện $C(\infty, \bar{y}) = C_1(\bar{y})$ được đặt ra như một giả thiết cho bức tranh của dòng ở vô cùng. Ở biến không thứ nguyên hệ (2.1), (2.2) có dạng:

$$K_2\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - K_1\frac{\partial E}{\partial x} + y(1-y)\frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + (\lambda + 1 - 2y)\frac{\partial E}{\partial y} = 0 \tag{2.3}$$

$$\left.\begin{array}{l} E(0, y) = C^*(y) \\ E(\infty, y) = 0 \end{array}\right\} \frac{a}{h} < y \leqslant 1; \qquad \left.\begin{array}{l} E(x, 1) = 0 \\ E\left(x, \frac{a}{h}\right) = 0 \end{array}\right\} x \geqslant 0, \tag{2.4}$$

trong đó: $K_1 = \dfrac{U}{ku_*}$; $K_2 = \dfrac{A}{hku_*}$; $x = \dfrac{\bar{x}}{h}$; $y = \dfrac{\bar{y}}{h}$;

$$C^*(y) = \frac{C_1}{C_a} = \left(\frac{a}{h-a}\right)^{\lambda}\left(\frac{1}{y} - 1\right)^{\lambda}; \tag{2.5}$$

$$C(x, y) = C_a\left[C^*(y) - E(x, y)\right]. \tag{2.6}$$

Bằng cách tách biến $E(x, y) = X(x) \, . \, Q(y)$ từ (2.3) ta đi đến hai phương trình sau:

$$K_2X'' - K_1X' - MX = 0, \tag{2.7}$$

$$y(1-y)Q'' + (\lambda + 1 - 2y)Q' + MQ = 0. \tag{2.8}$$

Trong đó M là hằng số xuất hiện do tách biến; dấu phẩy chỉ đạo hàm. (2.8) là phương trình siêu bội, nghiệm tổng quát có dạng [7]:

$$Q(y) = B_1F(\alpha, \beta, 1-\lambda, 1-y) + B_2(1-y)^{\lambda} F(\alpha+\lambda, \beta+\lambda, 1+\lambda, 1-y)$$

với B_1, B_2 là các hằng số; $\alpha + \beta = 1$; $\alpha . \beta = -M$; F — là hàm siêu bội, điều kiện (2.4) với $Q(1) = 0$ cho $B_1 = 0$ và $Q\left(\frac{a}{h}\right) = 0$ suy ra $M > 0$.

Từ mối liên hệ giữa hàm siêu bội F và hàm Legendre P. [8] ta có:

$$\Gamma(1-\mu)P_{\nu}^{\mu}(x) = 2^{\mu}(1-x^2)^{-\mu/2}F\left(1-\mu+\nu, -\mu+\nu, 1-\mu, \frac{1-x}{2}\right)$$

Với $|1 - x| < 2$ và $\Gamma(x)$ là hàm gam ma. Với mối liên hệ này, bằng cách thay $\mu = -\lambda$ $\nu = -\beta$; $\frac{1-x}{2} = 1 - y$, hàm Q sẽ có dạng:

$$Q(y) = B_2\Gamma(1+\lambda)\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\lambda/2} P_{\nu_n}^{-\lambda}(2y-1); \; n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2.9}$$

trong đó ν_n là nghiệm của phương trình siêu việt:

$$P_{\nu}^{-\lambda}\left(\frac{2a}{h}-1\right)=0 \tag{2.10}$$

mà nó có do điều kiện

$$Q\left(\frac{a}{h}\right)=0.$$

Sau khi xác định được ν_n từ (2.10), xuất phát từ mối liên hệ giữa α, β với M ta có công thức xác định M_n:

$$M_n=\nu_n(1+\nu_n);\quad n=1,2,3,\ldots.$$

phương trình (2.7) cho nghiệm tổng quát dạng:

$$X(x)=A_1e^{\theta_1 x}+A_2e^{\theta_2 x},$$

A_1, A_2 là các hằng số; $\theta_1>0$; $\theta_2<0$ là 2 nghiệm của phương trình đặc trưng: $K_2\theta^2-K_1\theta-M=0$.

Điều kiện (2.4) với $X(\infty)=0$ cho $A_1=0$.

Như vậy phương trình (2.3) với các điều kiện (2.4) cho nghiệm dạng:

$$E(x,y)=\sum_{1}^{\infty}A_n\Gamma(1+\lambda)e^{\theta_n x}\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\lambda/2}P_{\nu_n}^{-\lambda}(2y-1) \tag{2.11}$$

với ν_n là nghiệm của (2.10); A_n là tích A_2 và B_2 với chỉ số n; θ_n là θ_2 với chỉ số n. $P_{\nu_n}^{-\lambda}(2y-1)$ là các hàm trực giao với $y\in[a/h,1]$ (xem phụ lục).

Để xác định các hệ số A_n ta dùng điều kiện biên $E(o,y)=C^*(y)$ và tính trực giao của hàm Legendre (xem phụ lục):

$$A_n=\left(\frac{a}{h}\right)^{\lambda-1}\left(1-\frac{a}{h}\right)^{-\lambda}\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\frac{F\left(1+\nu_n+\lambda,\lambda-\nu_n,2+\lambda,1-\frac{a}{h}\right)}{F\left(2+\nu_n+\lambda,1+\lambda-\nu_n,2+\lambda,1-\frac{a}{h}\right)}\times$$

$$\times\frac{2\nu_n+1}{(1+\lambda+\nu_n)(\lambda-\nu_n)\sigma_n}$$

trong đó σ_n là công thức (P.4) trong phụ lục. Như vậy nghiệm của bài toán phân bố nồng độ sau công trình có dạng:

$$C(x,y)=C_a[C^*(y)-E(x,y)],$$

$$E(x,y)=\left(\frac{a}{h}\right)^{\lambda-1}\left(\frac{h-a}{h}\right)^{-\lambda}\frac{(1-y)^{\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)}\sum_{n=1}^{\infty}e^{\theta_n x}\frac{2\nu_n+1}{\sigma_n(1+\lambda+\nu_n)(\lambda-\nu_n)}\times$$

$$\times\frac{F\left(1+\nu_n+\lambda,\lambda-\nu_n,2+\lambda,1-\frac{a}{h}\right)F(1+\nu_n+\lambda,\lambda-\nu_n,1+\lambda,1-y)}{F\left(2+\nu_n+\lambda,1+\lambda-\nu_n,2+\lambda,1-\frac{a}{h}\right)}, \tag{2.12}$$

ν_n là nghiệm của (2.10) có thể tính bằng công thức gần đúng sau [9]:

$$\nu_n\approx\lambda+n-1+\frac{\Gamma(2\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\lambda+1)\Gamma(n)}\left(\frac{\pi-\varphi}{3}\right)^{2\lambda}, \tag{2.13}$$

$$\varphi=\arccos\left(\frac{2a}{h}-1\right);\quad n=1,2,3,\ldots$$

Nếu $\lambda = 0$:

$$\nu_n \approx n - 1 + \frac{1}{2\ln\left(\frac{2}{\pi - \varphi}\right)}$$

Nhận xét: Ta thấy rằng nghiệm (2.12) khác phức tạp. Tuy nhiên nó được biểu diễn dưới các hàm siêu việt đã được khảo sát rất tốt; chuỗi các số hạng hội tụ, cho nên khi cho các giá trị của các tham số ta có thể lập chương trình tính trên máy tính.

PHỤ LỤC

1. Tính trực giao của các hàm $P_{\nu_n}^{-\lambda}$.

Kí hiệu $P = P_{\nu}^{-\lambda}(2y-1)$; $P_n = P_{\nu_n}^{-\lambda}(2y - 1)$. Khi đó P_n và P thỏa mãn các phương trình:

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dp}{dz}\right] + [(1+\nu)\nu - \lambda^2(1-z^2)^{-1}]P = 0;$$

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dP_n}{dz}\right] + [(1+\nu_n)\nu_n - \lambda^2(1-z^2)^{-1}]P_n = 0$$

với $z = 2y - 1$; $z \in \left[\frac{2a}{h} - 1, 1\right]$.

Nhân phương trình đầu với P_n, phương trình thứ hai với P, trừ đi nhau rồi tích phân theo z ta được:

$$(1-z^2)\left[\frac{dP_n}{dz}P - \frac{dP}{dz}P_n\right]\Bigg|_{\frac{2a}{h}-1}^{1} = (\nu - \nu_n)(\nu + \nu_n + 1)\int_{\frac{2a}{h}-1}^{1} P_nPdz.$$

Chú ý rằng $P_n\left(\frac{2a}{h} - 1\right) = 0$; $P(1) = P_n(1) = 0$, ta có:

$$\frac{4a}{h}\left(1 - \frac{a}{h}\right)\frac{dP_n}{dz}P\Bigg|_{z=\frac{2a}{h}-1} = -(\nu - \nu_n)(\nu + \nu_n + 1)\int_{\frac{2a}{h}-1}^{1} P_nPdz. \quad \text{(P.1)}$$

Nếu $\nu = \nu_m$ $(m \neq n)$ thì $P_{\nu_m}^{-\lambda}\left(\frac{2a}{h} - 1\right) = 0$,

do đó

$$\int_{\frac{2a}{h}-1}^{1} P_nP_mdz = 0 \quad \text{(P.2)}$$

Từ (P. I) cho $\nu \to \nu_n$ dùng qui tắc Lôpital để tính giới hạn ta được:

$$-\frac{4a}{h}\left(1-\frac{a}{h}\right)\frac{1}{2\nu_n+1}\frac{dP_n}{dz}\frac{\partial}{\partial\nu}P_\nu^{-\lambda}\Bigg|_{z=\frac{2a}{h}-1;\ \nu=\nu_n} = \int_{\frac{2a}{h}-1}^{1}(P_n)^2dz =$$

$$= 2\int_{\frac{a}{h}}^{1}\left[P_{\nu_n}^{-\lambda}(2y-1)\right]^2 dy \stackrel{df}{=} 2Nn, \qquad \text{(P.3)}$$

trong đó:

$$\frac{d}{dz}P_{\nu_n}^{-\lambda}(z)\Bigg|_{\frac{2a}{h}-1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^{\lambda/2}\left(1-\frac{a}{h}\right)^{\lambda/2}\frac{(1+\lambda+\nu_n)(\lambda-\nu_n)}{1+\lambda}F\left(2+\lambda+\nu_n,1+\lambda-\nu_n,2+\lambda,1-\frac{a}{h}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}P_{\nu_n}^{-\lambda}(z) = \frac{1}{\Gamma(\lambda+2)}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{\lambda/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-\nu_n(1-\nu_n)\dots(k-1-\nu_n)}{(\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+k)}\cdot\frac{(\nu_n+1)\dots(\nu_n+k)}{k!}\cdot$$
$$[\psi(\nu_n+k+1)-\psi(\nu_n-k+1)]\left(\frac{1-z}{2}\right)^k;$$

$$N_n = \frac{a}{h}\left(1-\frac{a}{h}\right)^{\lambda+1}\frac{1}{\Gamma(\lambda+2)}\frac{(1+\lambda+\nu_n)(\lambda-\nu_n)}{2\nu_n+1}F\left(2+\lambda+\nu_n,\ 1+\lambda-\nu_n,\ 2+\lambda,\ 1-\frac{a}{h}\right)\sigma_n,$$

với

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-\nu_n(1-\nu_n)\dots(k-1-\nu_n)(\nu_n+1)\dots(\nu_n+k)}{k!\ (\lambda+1)(\lambda+2)\dots(\lambda+k)}[\psi(\nu_n+k+1)-\psi(\nu_n-k+1)]\left(1-\frac{a}{h}\right)^k,$$

(P.4)

ψ là hàm đạo hàm lôga của hàm gama.

(P.2) và (P.3) chứng tỏ tính trực giao của hàm P_n.

2. Xác định hệ số A_n.

Tại $x = 0$ ta có điều kiện:

$$\left(\frac{a}{h-a}\right)^{\lambda}\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\lambda/2}\Gamma(1+\lambda)P_{\nu_n}^{-\lambda}(2y-1)$$

Nhân 2 vế với $\left(\frac{1-y}{y}\right)^{-\lambda/2}\frac{1}{\Gamma(1+\lambda)}P_{\nu_n}^{-\lambda}(2y-1)$ rồi tích phân theo y từ a/h đến 1, do (P.2) và (P.3) ta có:

$$\left(\frac{a}{h-a}\right)^{\lambda}\frac{1}{\Gamma(1+\lambda)}\int_{a/h}^{1}\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\lambda/2}P_{\nu_n}^{-\lambda}(2y-1)dy = A_n\int_{a/h}^{1}[P_{\nu_n}^{-\lambda}(2y-1)]^2dy.$$

Từ đó:

$$An = \frac{1}{Nn}\left(\frac{a}{h-a}\right)^{\lambda}\frac{1}{\Gamma(1+\lambda)}\int_{a/h}^{1}\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\lambda/2}P_{\nu_n}^{-\lambda}(2y-1)dy.$$

Mặt khác [8]:

$$\int_{a/h}^{1}\left(\frac{1-y}{y}\right)^{\lambda/2} P_{\nu_n}^{-\lambda}(2y-1)dy = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\int_{0}^{1}\left(1-\frac{a}{h}\right)^{\lambda+1} z^{\lambda} F\left(\alpha_n+\lambda,\ \beta_n+\lambda,\ 1+\lambda,\ \frac{h-a}{h}z\right)dz =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda+2)}\left(1-\frac{a}{h}\right)^{\lambda+1} F\left(\alpha_n+\lambda,\ \beta_n+\lambda,\ 2+\lambda,\ 1-\frac{a}{h}\right).$$

Do đó

$$An = \frac{1}{Nn}\left(1-\frac{a}{h}\right)\left(\frac{a}{h}\right)^{\lambda} \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)\Gamma(\lambda+2)} F\left(\alpha_n+\lambda,\ \beta_n+\lambda,\ 2+\lambda,\ 1-\frac{a}{h}\right) \qquad (P.5)$$

Địa chỉ:
Viện Cơ học Viện KHVN

Nhận ngày 10/7/1979

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. NGUYỄN TẤT ĐẮC. Về chuyển động của vật chất lơ lửng, Báo cáo tại hội nghị tính toán của Bộ Điện than, Hà nội tháng 3 năm 1979.

2. YALIN M.S. Mechanics of Sediment transport. New york 1972.

3. NGUYỄN VĂN GIA. Lời giải của một bài toán biên parabolic. Phương pháp toán lý, Viện toán học, số 2-1979.

4. LƯU CÔNG ĐÀO, NGUYỄN ĐÌNH HÙNG. Về khả năng áp dụng lý thuyết khuếch tán rối và các bài toán biến hình lòng dẫn của sông Đà. Phương pháp toán lý, Viện Toán học, số 2-1977.

5. LƯU CÔNG ĐÀO, NGUYỄN ĐÌNH HÙNG. Nghiên cứu sơ bộ về phân bố nồng độ theo thời gian trên cơ sở lý thuyết khuếch tán rối. Tạp chí khoa học kĩ thuật, Viện khoa học Việt Nam, N°36 (10-1977).

6. ГРИШАНИН К.В. Динамика русловых нотоков, Гидрометеорлогическое издателъство, Ленинград, 1969.

7. КАМКЕ З., Справочник по обыкновенным дифференинальным уравнениям, Москва, 1976.

8. ЬЕЙТМЕН Г. И., ЭРДЕЙН А. Высшие трансцендентные Функции Москва, 1973.

9. ГРАДШТЕЙН И.С. И РЫЖИК И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Москва 1971.

SUMMARY

SEDIMENT DISTRIBUTION IN TURBULENT FLOW

Using the classical diffusive equation with variable coefficent of diffusion the authors solve a problem concerning with sediment distribution in turbulent flow having construction. The sediment concentration distribution is pointed out in the paper.