Tạp chí CƠ HỌC 1980 số 2 (trang 1 – 8)

CƠ SỞ LÝ THUYẾT THỨ NGUYÊN VÀ ĐỒNG DẠNG

RYCHLEWSKI J.

(Dịch từ tiếng Nga: **NGUYỄN TRƯỜNG**; hiệu đính: **PHẠM HỮU HÙNG**)

LTS. *Cuối năm 1979, Viện sĩ thông tấn Viện Hàn lâm Khoa học Ba Lan, giáo sư J. Rychlewski đã sang thăm Việt Nam. Giáo sư đã đọc một số bài giảng về Cơ học và Vật lý. Dưới đây chúng tôi xin trân trọng giới thiệu tóm tắt với bạn đọc một trong các bài giảng đó.*

VIỆC sử dụng lý luận thứ nguyên và đồng dạng nhiều khi đưa đến những kết quả vô cùng đẹp đẽ và mạnh mẽ (chẳng hạn xem [1], [2]).

Sự không phù hợp giữa các kết quả này với các kết quả thu được bằng các phép tính đại số đơn giản có thể gây ra sự hoài nghi. Nhưng nếu xem xét kỹ hơn, ta có thể thấy sau cái đơn giản của các tính toán bao giờ cũng ẩn náu một nội dung vật lý sâu sắc. Cách trình bày lý thuyết thứ nguyên và đồng dạng một cách sơ lược và không chính xác như thường làm không cho phép thấy rõ điều đó.

Trong [3] chúng tôi đã xây dựng một hệ tiên đề theo tinh thần toán học hiện đại. Nó đặt cơ sở chặt chẽ cho việc tính toán các đại lượng thứ nguyên, có nghĩa là cho toàn bộ lý thuyết thứ nguyên và đồng dạng. Tuy vậy ở đây chúng tôi không biện giải cho các tiên đề đã được công nhận.

Mục đích của bài này là bằng phác họa toán học mô tả con đường mà chúng tôi đi từ quan sát các đối tượng thực đến xây dựng lý thuyết bằng các đại lượng thứ nguyên.

§1. SO SÁNH ĐỊNH TÍNH CÁC ĐỐI TƯỢNG THỰC

Xét một tập hợp nào đó **W** của thực tiễn làm đối tượng cho một lý thuyết khoa học (vật lý, sinh vật,...). Trước hết ta tách nó ra thành các phần tử A, B,... (gọi là các đối tượng thực).

Ở đây đòi hỏi phải có phương pháp để phân biệt sự khác nhau ($A \neq B$), hay đồng nhất ($A = B$). Ở một số ngành khoa học ngay giai đoạn này cũng chưa vượt qua, hoặc không thể vượt qua.

Bước tiếp theo là lập các tập con những đối tượng thực có tính chất chung $\mathbf{K} \subset \mathbf{W}$, đưa vào quan hệ hai ngôi tựa thứ tự (xem [4]), tức có tính chất:

1. Phản xạ: $A \leqslant A$ với mọi $A \in \mathbf{K}$.
2. Bắc cầu: $A \leqslant B$ và $B \leqslant C$ kéo theo

   $A \leqslant C$ với mọi $A, B, C \in \mathbf{K}$.

Chỉ riêng việc đưa vào cấu trúc yếu này đã là một cách hình thức hóa có ích để so sánh định tính các hiện tượng và quá trình.

Nói chung quan hệ tựa thứ tự không thỏa mãn điều kiện: nếu $A \leqslant B$ và $B \leqslant A$ thì $A = B$.

Xét quan hệ tương đương $\sim$: $A \sim B$ khi và chỉ khi $A \leqslant B$ và $B \leqslant A$. Các lớp tương đương của nó gọi là các lớp không phân biệt được. Ta ký hiệu lớp không phân biệt được của A là $\underline{A}$, tập tất cả các lớp đó là $\underline{\mathbf{K}}$ rồi xây dựng quan hệ thứ tự $\leqslant$ như sau: $\underline{A} \leqslant \underline{B}$ nếu $A \leqslant B$. Tức nó có tính chất phản xạ, phản xứng và bắc cầu.

Trong các trường hợp riêng ta có thể xây dựng để quan hệ thứ tự trở thành tuyến tính, trù mật, liên tục hoặc xây dựng quan hệ n ngôi.

Tuy vậy muốn phát triển lý thuyết cần phải so sánh định lượng.

§ 2. SO SÁNH ĐỊNH LƯỢNG CÁC ĐỐI TƯỢNG THỰC

Đo là đặt tương ứng cặp đối tượng (A, B) một số thực, trong đó A là đối tượng được đo, B là mẫu. Sự so sánh được tiến hành nhờ các phương pháp thực nghiệm áp dụng cho các đối tượng thuộc $\mathbf{K}$. Ta bắt đầu hình thức hóa toán học từ đây.

Định nghĩa: Gọi là tính chất vật lý định lượng tập các đối tượng thực $\mathbf{K} \subset \mathbf{W}$ mang cấu trúc sau:

1. Ánh xạ:

$$(A, B) \to A : B;\ A : B \in R \tag{2.1}$$

thỏa mãn các điều kiện:

α) $(A, B) \in \mathbf{K} \times \mathbf{K}_* = \mathrm{Dom}(:)$ (1),

$\mathbf{K}_* \subset \mathbf{K}$, tập con không rỗng sao cho $A : B \neq 0$ chỉ khi $A \in \mathbf{K}_*$.

β) Với mỗi $A \in \mathbf{K}$; $B, C \in \mathbf{K}_*$,

$$(A : B)(B : C) = A : C. \tag{2.2}$$

2. Tựa thứ tự $\leqslant$ được xác định như sau:

$A \leqslant B$ khi và chỉ khi $A : W \leqslant B : W$ với $W \in \mathbf{K}_*$.

R là tập các số thực.

Như vậy với quan điểm toán học, tính chất vật lý định lượng là cấu trúc $(\mathbf{K}, :, \leqslant)$. Ánh xạ $(:)$ là phép so sánh số, $\mathbf{K}_*$ là tập các đối tượng khác không.

Từ định nghĩa ta rút ra các hệ quả sau:

$$A : A = 1 \quad , \qquad A \in \mathbf{K}_*; \tag{2.3}$$

$$A : B = \frac{1}{B : A}, \ A, B \in \mathbf{K}_* \tag{2.4}$$

Xét quan hệ tương đương $\approx$ trong $\mathbf{K}_*$:

$A \approx B$ khi và chỉ khi $A : B > 0$. Nó phân hoạch $\mathbf{K}_*$ thành không hơn 2 lớp: lớp các đối tượng dương $\mathbf{K}_+$ và lớp các đối tượng âm $\mathbf{K}_-$;

$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K} - \mathbf{K}_*$ gọi là lớp các đối tượng không.
Vậy là:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_+ \cup \mathbf{K}_- \cup \mathbf{K}_0. \tag{2.5}$$

---

(1) Dom (:) là miền xác định của (:)

Trong khoa học thực nghiệm chúng ta nghiên cứu chính các đối tượng thực và cấu trúc $(\mathbf{K}, :, \leqslant)$.

Trong khoa học lý thuyết ta trừu tượng hóa một bước nữa bằng xây dựng trong $\mathbf{K}$ quan hệ tương đương $\sim$: $A \sim B$ khi và chỉ khi $A : w = B : w$; $w \in \mathbf{K}_*$. Lớp tương đương của nó trong $\mathbf{K}$ gọi là lớp không phân biệt được đối với phép so sánh số (:) hoặc các đại lượng vật lý. Đại lượng vật lý của A Ký hiệu là $\underline{A}$, tập tất cả các đại lượng vật lý Ký hiệu là $\underline{\mathbf{K}}$. Như vậy đại lượng vật lý $\underline{A}$ là tập hợp tất cả các đối tượng thuộc $\mathbf{K}$ mà $A : w$ bằng nhau ; $w \in \mathbf{K}_*$.

Chuyển cấu trúc từ $\mathbf{K}$ sang $\underline{\mathbf{K}}$, ta có phép so sánh số các đại lượng vật lý.

$$\underline{A} \,\underline{:}\, \underline{B} = A : B ;\ \text{với mỗi } A \in \underline{A} \text{ và } B \in \underline{B} \tag{2.6}$$

$$\underline{\mathbf{K}} = \underline{\mathbf{K}}_+ \cup \underline{\mathbf{K}}_- \cup \underline{\mathbf{K}}_0 , \tag{2.7}$$

trong đó $\underline{\mathbf{K}}_+$, $\underline{\mathbf{K}}_-$ và $\underline{\mathbf{K}}_0$ tập các đại lượng vật lý dương, âm và không.

Ta có :

1. $\mathrm{Dom}(:) = \underline{\mathbf{K}} \times \underline{\mathbf{K}}_*$; $\underline{\mathbf{K}}_* = \underline{\mathbf{K}}_+ \cup \underline{\mathbf{K}}_-$.

2. Với mỗi $\underline{A} \in \underline{\mathbf{K}}$; $\underline{B}$, $\underline{C} \in \underline{\mathbf{K}}_*$,

$$(\underline{A} : \underline{B})\,(\underline{B} : \underline{C}) = \underline{A} : \underline{C}. \tag{2.8}$$

Hơn nữa $\underline{A} \leqslant \underline{B}$ khi và chỉ khi $A \leqslant B$ với $A \in \underline{A}$, $B \in \underline{B}$.

Định nghĩa : *Khái niệm vật lý định lượng là tập các đại lượng vật lý* $\underline{\mathbf{K}}$ *với phép so sánh số (:) xác định trong (2.6) và thứ tự* $\leqslant$.

Trong thực tế phép so sánh số thực nghiệm chỉ cho các khoảng của trục số ngay cả với thiết bị chính xác nhất. Việc thay vào đó một số đã làm xuất hiện trong vật lý toán hàng loạt khó khăn và kết luận sai, ví dụ như sự bất thường trong thuyết tương đối. Nhưng đó là cách để có thể sử dụng số học các số thực và cả giải tích toán để mô tả thiên nhiên.

§ 3. CÁC ĐỊNH LUẬT VẬT LÝ SƠ CẤP (CƠ BẢN)

Định nghĩa : *Một tập đo được của thực tiễn là cấu trúc* $(\mathbf{W} ; \mathcal{F})$, *trong đó* $\mathcal{F}$ *là họ các tính chất vật lý định lượng* $(\mathbf{K}, :, \leqslant)$, $\mathbf{K} \subset \mathbf{W}$, $\mathbf{W} = \bigcup_{\mathcal{F}} \mathbf{K}$.

Ta thường xét đối tượng $A \in \mathbf{W}$ theo những mặt khác nhau, vì vậy A có thể thuộc những $\mathbf{K}$ khác nhau. Ví dụ trang giấy có thể so sánh với các đối tượng khác theo trọng lượng, thể tích, tỷ khối, v,v...

Mỗi cấu trúc $(\mathbf{K}, :, \leqslant)$ được đặt tương ứng cấu trúc $(\underline{\mathbf{K}}, :, \leqslant)$ các khái niệm vật lý.

Định nghĩa : *ta gọi là hệ các khái niệm vật lý họ* $(\underline{\mathbf{K}}, :, \leqslant)$, *trong đó mỗi* $(\underline{\mathbf{K}}, :, \leqslant)$ *tương ứng với* $(\mathbf{K}, :, \leqslant)$ *của họ* $\mathcal{F}$ *thuộc cấu trúc* $(\mathbf{W}, \underline{\mathcal{F}})$.

Một khoa học thực nghiệm có cấu trúc $(\mathbf{W}, \mathcal{F})$, tức chứa một hệ tương ứng các khái niệm vật lý. Ví dụ Cơ học chứa các khái niệm độ dài, diện tích, thể tích, khối lượng, v.v...

Lý thuyết mô tả một tập khá lớn của thực tiễn chứa một hệ khá lớn các khái niệm vật lý tương ứng với nó một hệ khá lớn phép so sánh số. Như vậy thật là phức tạp. Sử dụng các quy luật nhân quả ta có thể đưa về một số lượng không lớn lắm các phép so sánh được gọi là cơ bản. Ví dụ các phép so sánh trong cơ học đưa về 3 phép cơ bản : thời gian, khối lượng và độ dài.

Phần lớn các luật nhân quả có thể biểu thị bằng hàm

$$f : \underline{\mathbf{K}}^1 \times \ldots \times \underline{\mathbf{K}}^n \to \underline{\mathbf{K}} \tag{3.1}$$

được gọi là định luật vật lý. Ta viết:

$$\underline{A} = f(\underline{A}_1, \ldots, \underline{A}_n) \tag{3.2}$$

Một lớp tương đối hẹp các định luật vật lý sau đây có vai trò cơ bản

Định nghĩa: *Định luật vật lý (3.1) gọi là sơ cấp (cơ bản) nếu:*

1. Dom $f = \underline{K}^1_* \times \ldots \times \underline{K}^n_*$.

   Range f(1) $\subset \underline{K}_*$.

2. *Tồn tại hàm thực n biến thực*

$$\psi : R^n \to R \tag{3.3}$$

gọi là phép số học hóa tổng hợp (toàn năng) của f sao cho với mọi $\underline{A}_i \in \underline{K}^i_*$, $\underline{\rho}_i \in \underline{K}^i_*$, $i = 1, \ldots, n$;

$$f(\underline{A}_1, \ldots, \underline{A}_n) : f(\underline{\rho}_1, \ldots, \underline{\rho}_n) = \psi(\underline{A}_1 : \underline{\rho}_1, \ldots, \underline{A}_n : \underline{\rho}_n) \tag{3.4}$$

Điều kiện (3.4) có tính nguyên tắc, không phải mỗi định luật vật lý đều tuân theo. Nội dung vật lý của nó là; nếu (3.4) được thỏa mãn thì phép so sánh số của khái niệm vật lý $\underline{K}$ có thể quy về phép so sánh số các khái niệm $\underline{K}_1, \ldots, \underline{K}_n$

Bổ đề 1. *Phép số học hóa tổng hợp* ψ *của bất kỳ định luật vật lý sơ cấp nào thỏa mãn điều kiện sau:*

1. Dom $\psi = \underbrace{R_* \times \ldots \times R_*}_{\text{n lần}}$, Range $\psi \subset R_*$, $R_* = R - \{0\}$.

2. *Với mỗi* $x_i, y_i \in R_*$

$$\psi(x_1 y_1, \ldots, x_n y_n) = \psi(x_1, \ldots, x_n)\, \psi(y_1, \ldots, y_n) \tag{3.5}$$

Chứng minh. Điều kiện 1 suy ra từ điều kiện 1 của định nghĩa trên. Điều kiện 2 suy ra từ các đẳng thức:

$$\begin{gathered}\Psi\,[(\underline{A}_1 : \underline{B}_1)\,(\underline{B}_1 : \underline{C}_1), \ldots] = \Psi(\underline{A}_1 : \underline{C}_1, \ldots) = f(\underline{A}_1, \ldots) : f(\underline{C}_1, \ldots) = \\ [f(\underline{A}_1, \ldots) : f(\underline{B}_1, \ldots)]\,[f(\underline{B}_1, \ldots) : f(\underline{C}_1, \ldots)] = \\ \Psi(\underline{A}_1 ; \underline{B}_1, \ldots)\,\Psi(\underline{B}_1 : \underline{C}_1, \ldots).\end{gathered} \tag{3.6}$$

Ký hiệu $x_i = \underline{A}_i : \underline{B}_i$, $y_i = \underline{B}_i : \underline{C}_i$, $i = 1, \ldots, n$ ta nhận được (3.5)

Bổ đề 2. *Hàm thực* ψ *thỏa mãn điều kiện bổ đề 1 khi và chỉ khi tồn tại các hàm thực một biến*

$\chi_i : R \to R$, $i = 1, \ldots, n$ *thỏa mãn các điều kiện:*

1. Dom $\chi_i = R_*$, Range $\chi_i \subset R_*$.

2. *Với mỗi* $x, y \in R_*$

$$\chi_i(xy) = \chi_i(x)\,\chi_i(y) \tag{3.7}$$

và với mỗi $x_1, \ldots, x_n \in R_*$

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = \chi_1(x_1) \ldots \chi_n(x_n). \tag{3.8}$$

Chứng minh. Điều kiện đủ là hiển nhiên.

Điều kiện cần: Nếu ψ thỏa mãn (3.5) thì với mỗi $x_1, \ldots, x_n \in R_*$ ta có:

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = \psi(x_1, 1, \ldots, 1)\,\psi(1, x_2 \ldots, x_n) = \tag{3.9}$$

$$\psi(x_1, 1, \ldots, 1)\,\psi(1, x_2, 1, \ldots, 1)\,\psi(1, 1, x_3, \ldots, x_n) = \psi(x_1, 1, \ldots, 1)\,\psi(1, x_2, 1, \ldots, 1) \ldots \psi(1, \ldots, 1, x_n).$$

Ký hiệu

$$\chi_i(z) = \psi(1, \ldots, 1, z, 1, \ldots, 1) \tag{3,10}$$

Trong đó z là đối thứ i của χ ta có (3.8). Phần còn lại là hiển nhiên.

---

(1) Range f Ký hiệu của f ($\underline{K}^1_* \times \ldots \times \underline{K}^n_*$)

Bổ đề 3. *Hàm thực χ thỏa mãn bổ đề 2 khi và chỉ khi với mỗi $x \in R_*$*

$$\chi(x) = (\mathrm{Sgn}x)^m \chi_+(|x|) \tag{3.11}$$

$m = 1$ hoặc $m = 2$ sao cho

1. Dom $\chi_+ = R_+ = (0, \infty)$, Range $\chi_+ \subset R_+$.

2. *Với mỗi $x, y \in R_+$*

$$\chi_+(xy) = \chi_+(x)\, \chi_+(y). \tag{3.12}$$

Chứng minh. Điều kiện đủ : Nếu (3.11) và (3.12) thỏa mãn tất nhiên Dom $\chi = R_*$, Range $\chi \subset R_*$ và với mỗi $x, y \in R_*$

$$\chi(xy) = (\mathrm{sgn}x)^m (\mathrm{sgn}y)^m \chi_+(|x|)\, \chi_+(|y|) = \chi(x)\, \chi(y) \tag{3.13}$$

Điều kiện cần : Nếu χ thỏa mãn bổ đề 2 thì với mỗi $x \in R_*$ ta có

$$\chi(x) = \chi((\mathrm{sgn}x)\,|x|) = \chi(\mathrm{sgn}x)\, \chi_+(|x|) \tag{3.14}$$

với

$$\chi_+ = \chi|_{R_+} \tag{3.15}$$

vì $\chi(1) = \chi(1)\,\chi(1)$ nên $\chi(1) = 1$ và vì

$1 = \chi(1) = \chi(-1)\,\chi(-1)$ nên $\chi(-1) = \pm 1$ vậy

$$\chi(\mathrm{sgn}x) = \mathrm{sgn}x \ \text{ hoặc } \ \chi(\mathrm{sgn}x) = (\mathrm{sgn}x)^2 = 1 \tag{3.16}$$

Phần còn lại là hiển nhiên.

Ta xét các định luật vật lý sơ cấp liên tục, nghĩa là các định luật mà ψ là liên tục. Giả thiết về tính liên tục là kết quả của ngoại suy, trong một số trường hợp dẫn đến kết quả sai.

Tính liên tục của ψ tương đương tính liên tục của χ_+

Bổ đề 4. *Hàm thực liên tục χ_+ thỏa mãn bổ đề 3 khi và chỉ khi nó là hàm lũy thừa, nghĩa là*

$$\chi_+(x) = x^a; \quad a \in R, \quad x \in R_+. \tag{3.17}$$

Chứng minh : Đây là kết quả của giải tích cổ điển từ thời Côsi

Ta có kết quả chung sau

Định lý : *Với mỗi định luật vật lý sơ cấp liên tục.*

$$f : \underline{K}^1_* \times \dots \times \underline{K}^n_* \to \underline{K} \tag{3.18}$$

tồn tại các số $m_i \in \{1, 2\}$ và $a_i \in R$ sao cho với mỗi $\underline{A}_i, \underline{\rho}_i \in \underline{K}^i_*$; $i = 1, \dots, n$:

$$f(\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_n) : f(\underline{\rho}_1, \dots, \underline{\rho}_n) = \tag{3.19}$$
$$(\mathrm{sgn}(\underline{A}_1 : \underline{\rho}_1))^{m_1} \dots (\mathrm{sgn}(\underline{A}_n : \underline{\rho}_n))^{m_n} \cdot (\underline{A}_1 : \underline{\rho}_1)^{a_1} \dots (\underline{A}_n : \underline{\rho}_n)^{a_n}.$$

Chứng minh : Thật vậy, theo các bổ đề đã chứng minh

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = (\mathrm{sgn}x_1)^{m_1} \dots (\mathrm{sgn}x_n)^{m_n} x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} \tag{3.20}$$

Ta thường gặp trường hợp $\mathrm{sgn}\,(\underline{A}_i : \underline{\rho}_i) = 1$ với mỗi $i = 1, \dots, n$. Khi đó

$$f(\underline{A}_1, \dots, \underline{A}_n) : f(\underline{\rho}_1, \dots, \underline{\rho}_n) = (\underline{A}_1 : \underline{\rho}_1)^{a_1} \dots (\underline{A}_n : \underline{\rho}_n)^{a_n} \tag{3.21}$$

Như vậy đã giải thích được điều kỳ lạ tại sao nhiều định luật vật lý sơ cấp (cơ bản) có dạng đơn thức lũy thừa.

§4. (CHUYỀN SANG) KHÔNG GIAN CÁC VÔ HƯỚNG THỨ NGUYÊN

Để tránh dùng ký hiệu $\underline{A} : \underline{B}$ không thuận tiện khi tính toán ta xây dựng không gian các vô hướng thứ nguyên trong [3]. Chúng tôi nhắc lại định nghĩa này:

Định nghĩa: *không gian các vô hướng thứ nguyên là tập $\mathcal{D}$ mang cấu trúc thỏa mãn các tiên đề sau:*

A 1. $R \subset \mathcal{D}$ *cùng với các phép tính của nó.*

A 2. *Một phép nhân giao hoán trong $\mathcal{D}$.*

$$(XY) \to XY \qquad XY = YX; \tag{4.1}$$

nếu X, Y $\in$ R *thì đây là phép nhân các số.*

A 3. $\mathcal{D}_+ \subset \mathcal{D}$, *mỗi phần tử của $\mathcal{D}_+$ gọi là mẫu sao cho:*

1. $\mathcal{D}_+ \cap R = R_+$

2. $\mathcal{D}_+$ *cùng với phép nhân (4.1) là một nhóm.*

3. *Với mọi* $X \in \mathcal{D}_+$, *với mọi* $a \in R$ *định nghĩa phép lũy thừa:*

$$(X, a) \to X^a \in \mathcal{D}_+ \tag{4.2}$$

sao cho

$$X^{a+b} = X^a X^b; \quad (X^a)^b = X^{ab}; \qquad (XY)^a = X^a Y^a; \tag{4.3}$$

nếu $X \in R$ *đó là lũy thừa số thực.*

A 4. $\mathcal{D} = \mathcal{D}_+ \cup \mathcal{D}_- \cup \mathcal{D}_o$;

$\mathcal{D}_- = (-1)\mathcal{D}_+$; $\mathcal{D}_o = o\mathcal{D}_+$.

A 5. *Với mọi* X, Y $\in \mathcal{D}_+$, o X = o Y *tương đương* $\exists\, a \in R$ *sao cho* X = a Y.

A 6. *Với mọi* $X \in \mathcal{D}_+$ *tập con* $[X] \subset \mathcal{D}$ *gồm các phần tử dạng* A = a X, $a \in R$ *gọi là thứ nguyên được trang bị cấu trúc sau:*

1. *Phép cộng. với mọi* A, B $\in$ [X]:

$$(A, B) \to A + B \in [X]$$

Thỏa mãn điều kiện

α) [X] *là nhóm giao hoán đối với phép cộng.*

β) *Với mọi* A, B $\in$ [X]; *với mọi* $Z \in \mathcal{D}$:

$$(A + B)\,Z = AZ + BZ. \tag{4.4}$$

(*vế phải là cộng trong thứ nguyên* [AZ], [BZ]).

γ) *Nếu* A, B *là số thì phép cộng trùng với cộng các số.*

2. *Quan hệ thứ tự liên tục* $\leqslant$

Với mọi A, B $\in$ [X], $A \leqslant B$ *khi và chỉ khi* $a \leqslant b$

ở đây A = a X, B = b X.

Từ 3 điều kiện (4.3) của tiên đề A3 dễ dàng chứng minh được rằng $X^o = 1$.

Bạn đọc thấy rằng định nghĩa này (trừ tiên đề A 5) tương ứng với quy tắc tính trong thực tiễn trên các đại lượng như A = cm, B = g, C = s, D = cal, E = K°, F = đ (Ký hiệu «đồng»). v.v...

Hệ này là đầy đủ và phi mâu thuẫn, nó được mô tả một cách chi tiết trong [3].

Một hệ các mẫu $W_1, \ldots, W_m \in \mathcal{D}_+$ được gọi là độc lập thứ nguyên nếu

$$W_1^{a_1} \ldots W_m^{a_m} \text{ là số khi và chỉ khi } a_1 = \ldots = a_m = 0. \tag{4.5}$$

Không gian các vô hướng thứ nguyên $\mathcal{D}$ có độ phức tạp hữu hạn $n = n(\mathcal{D})$ nếu chỉ tồn tại hệ độc lập thứ nguyên không quá n phần tử.

Cuối cùng ta chuyển đại lượng vật lý thành vô hướng thứ nguyên như sau:

Giả sử $(\underline{K}, :, \leqslant)$ là khái niệm vật lý, lấy $\underline{\rho} \in \underline{K}_*$ đặt tương ứng một vô hướng thứ nguyên $S \in \mathcal{D}_+$ (gọi là mẫu)

$$\underline{\rho} \rightarrow S \in \mathcal{D}_+ \tag{4.6}$$

với mọi $\underline{A} \in \underline{K}$ đặt tương ứng $A \in \mathcal{D}$ như sau:

$$\underline{A} \rightarrow A = (\underline{A} ; \underline{\rho}) S \tag{4.7}$$

Vậy ảnh của khái niệm $(\underline{K}, :, \leqslant)$ là thứ nguyên $[S] \subset \mathcal{D}$ trong đó phép chia là phép toán ngược của phép nhân (4.1):

$$AS^{-1} = \underline{A} : \underline{\rho} \tag{4.8}$$

và quan hệ thứ tự

$$A \leqslant B \Leftrightarrow \underline{A} \leqslant \underline{B}. \tag{4.9}$$

Không gian này rất rộng, ngoài ảnh của đại lượng vật lý còn chứa cả các phần tử không có thể hiện vật lý, ví dụ: $cm^{0,17}$. Vì vậy ta không đồng nhất đại lượng vật lý với vô hướng thứ nguyên.

Xét một hệ khái niệm vật lý, xây dựng không gian vô hướng thứ nguyên $\mathcal{D}$ sao cho chứa tất cả thứ nguyên tương ứng với các khái niệm của hệ này. Ta luôn cố gắng xây dựng không gian độ phức tạp hữu hạn bằng cách sử dụng các định luật vật lý sơ cấp.

Giả sử $W_1, \ldots, W_n$ là hệ độc lập của các mẫu của thứ nguyên $[W_1], \ldots, [W_n]$ và cùng với $[W]$ nó là ảnh của các khái niệm vật lý $\underline{K}, \underline{K}^1, \ldots, \underline{K}^n$.

Đã biết một định luật cơ cấp f:

$$\underline{A} = f(\underline{A}_1, \ldots, \underline{A}_n) \tag{4.10}$$

tương ứng có hàm F:

$$A = F(A_1, \ldots, A_n). \tag{4.11}$$

$A \in [W]$, $A_i \in [W_i]$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$\frac{F(A_1, \ldots, A_n)}{F(S_1, \ldots, S_n)} = \psi\left(\frac{A_1}{S_1}, \ldots, \frac{A_n}{S_n}\right), \tag{4.12}$$

Ở đây phân thức là phép chia các vô hướng thứ nguyên, mẫu thức không thuộc $\mathcal{D}_0$.

Để đơn giản ta xét các vô hướng thứ nguyên thuộc $\mathcal{D}_+$. Từ định lý về định luật vật lý sơ cấp rút ra:

$$A = F(A_1, \ldots, A_n) = cA_1^{a_1} \ldots A_n^{a_n}, \tag{4.13}$$

$$c = \frac{F(S_1, \ldots, S_n)}{S_1^{a_1} \ldots S_n^{a_n}}, \tag{4.14}$$

c không phụ thuộc $S_1, \ldots, S_n$ gọi là hằng tổng hợp (toàn năng) của f. Ví dụ hằng vạn vật hấp dẫn G_0, planck, v.v...

Có thể hiểu c theo 2 cách:

I. Nếu c là số, từ (4.13) rút ra hệ A, $A_1, \ldots, A_n$ phụ thuộc thứ nguyên và

$$[A] = [A_1^{a_1} \ldots A_n^{a_n}], \qquad (4.15)$$

$c \in R$ chọn tùy ý.

II. c là vô hướng thứ nguyên không thuộc R.

Từ (4.13) rút ra:

$$[c] = [AA_1^{-a_1} \ldots A_n^{-a_n}]. \qquad (4.16)$$

Kiểu I không tăng hệ các mẫu độc lập thứ nguyên và không gian có độ phức tạp hữu hạn.

Tác giả cám ơn Ban lãnh đạo của Viện Khoa học Việt nam và đặc biệt lấy làm vui sướng được cảm ơn đồng chí Nguyễn Văn Đạo đã ủng hộ giúp đỡ tác giả.

Địa chỉ:

Nhận ngày 5/12/1979

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. DROBOT S. O analizie Wymiarowy zastosowania matematyki *1*, (4), 233-72, 1954.

2. СЕДОВ Л.И. Методы подобия размерности в механике изд «Наука», Москва, 1972.

3. RYCHLEWSKI J. Mathematical foundations of the theory of dimensions, analogies and similarity. Trends in applications of pure mathematics to mechanics, Pitman. Publ., London—S.Francisco—Melbourne, 1976.

4. KURATOWSKI K. Set theory, PWN, Warsawa, 1968.

5. FEGERMAN R. The number svstems. Addison—Wesley. Reading, Mass., 1963.

SUMMARY

MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF THE THEORY OF DIMENSIONS AND SIMILARITY

In this work, we present a stringent axiomatic model of computation using dimentional quantities. This model is the dimensional scalar space. We use the axiomatic method to introduce the concept of dimentional scalar space, Then, the dimentional quantities will be not the aggregates of numbers with respect to a system of units assumed ad hoc, but elements of a set defined a priori.