Tạp chí CƠ HỌC 1980 số 1 (trang 16 — 22)

DAO ĐỘNG CỦA HỆ ĐỘNG LỰC CHỨA ĐẶC TRƯNG TRỄ CHỊU KÍCH ĐỘNG NGẪU NHIÊN CỦA THAM SỐ VÀ LỰC NGOÀI. II

NGUYỄN CAO MỆNH

SAU khi đã khảo sát phương pháp tổng quát trong phần thứ nhất [1], trong bài này ta sẽ nghiên cứu một số tính chất của hệ trong các trường hợp riêng và xét dao động của dầm có ma sát trong dưới tác dụng của tải trọng ngẫu nhiên dừng chuẩn theo dọc trục và tải trọng ngẫu nhiên phân bố theo chiều dài của dầm.

Các kết quả thu được cho phép ta đánh giá được ảnh hưởng của đặc trưng trễ và của tham số đến đặc trưng xác suất của đại lượng cần tìm.

§ 2. MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP RIÊNG

1) Trường hợp không có cản nhớt ($h = 0$)

Khi đó, từ công thức (1.52) trong phần thứ nhất [1] ta nhận được hàm mật độ phổ $S_{XX}(\omega)$ và theo công thức (1.55) ta tính được hàm tương quan $R_{XX}(\tau)$ của quá trình nghiệm. Phương sai của nghiệm được tính theo công thức sau đây:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha^2\omega_0^4 m^2 S_{GG}(\omega) + S_{FF}(\omega) + \alpha\omega_0^2 m[S_{FG}(\omega) + S_{FG}(-\omega)]}{(\omega_0^2 - \omega^2 + \beta Q_1)^2 + \beta^2 Q_2^2}\, d\omega \qquad (2.1)$$

Rõ ràng rằng, nếu kí hiệu

$$\mu = \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 + \beta Q_1)^2 + \beta^2 Q_2^2} \qquad (2.2)$$

thì hệ thức này không phụ thuộc trực tiếp vào đặc trưng của quá trình kích động, tương tự như trong trường hợp tiền định, ta có thể gọi μ là hệ số động lực, phụ thuộc vào bản chất của hệ. Hệ số μ lấy giá trị cực đại khi

$$\omega^2 = \omega_r^2 = \omega_0^2 + \beta Q_1 \qquad (2.3)$$

Vì vậy, ta có thể coi $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 + \beta Q_1}$ là tần số riêng của hệ. Vì Q_1 là hàm của m và σ nên ω_r không phải là hằng số như trong trường hợp tuyến tính mà phụ thuộc vào đặc trưng của quá trình nghiệm. Đồng thời do ảnh hưởng của ma sát trong hệ số động lực không lấy giá trị vô hạn khi tần số kích động biến thiên qua giá trị tần số riêng.

2) Trường hợp không kể đến kích động tham số ($\alpha = 0$).

Khi đó từ công thức (1.52) trong [1] ta có

$$S_{XX}(\omega) = \frac{(A + D)S_{FF}(\omega) - (B + C)S_{EF}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - (2hi\omega + \beta Q_1)^2 + \beta^2 Q_2^2} \qquad (2.4)$$

Nếu hệ số cản nhớt bằng không, ta dễ dàng biến đổi (2.4) và tìm được công thức đơn giản sau

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{FF}(\omega)}{(\omega_o^2 - \omega^2 + \beta Q_1)^2 + \beta^2 Q_2^2} d\omega \tag{2.5}$$

Kết hợp phương trình này với phương trình (1.9) trong [1] khi

$$m = -\beta P(m, \sigma) / \omega_0^2 \tag{2.6}$$

ta sẽ tìm được giá trị trung bình m, và phương sai σ^2 của quá trình cần tìm.

3) Trường hợp không kể đến ma sát trong ($\beta = 0$)
Khi đó, từ công thức (1.53) trong [1] ta có

$$A = 1,\ B = C = D = O \tag{2.7}$$

và công thức (1.52) trở thành

$$S_{xx}(\omega) = \frac{[S_{FG}(\omega) + S_{FG}(-\omega)]\,\alpha\omega_0^2 m + \alpha^2\omega_0^4 m^2 S_{GG}(\omega) + S_{FF}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} \tag{2.8}$$

a) Giả sử G(t) và F(t) là các quá trình tương quan toàn phần

$$F(t) = \Upsilon G(t) \tag{2.9}$$

ta sẽ có

$$S_{xx}(\omega) = \frac{(\alpha\omega_0^2 m + \Upsilon)^2 S_{GG}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} \tag{2.10}$$

và

$$\sigma^2 = (\alpha\omega_o^2 m + \Upsilon)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{GG}(\omega)\, d\omega}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} \tag{2-11}$$

hay

$$\sigma^2 = (\alpha\omega_0^2 m + \Upsilon)^2 \sigma_{tt}^2 \tag{2.12}$$

trong đó

$$\sigma_{tt}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{GG}(\omega)\, d\omega}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}$$

là phương sai của nghiệm hệ tuyến tính tương ứng dưới tác dụng của tải trọng ngẫu nhiên G(t). Để tìm giá trị của m và σ^2 ta tính biểu thức sau đây

$$m = \alpha R_{GX}(t,\ t) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} S_{GX}(\omega)\, d\omega = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\alpha\omega_o^2 m + \Upsilon)(\omega_o^2 - \omega^2) S_{GG}(\omega)}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} d\omega$$

và nhận được

$$m = (\alpha^2\omega_0^2 m + \alpha\Upsilon)\ (\omega_0^2 \sigma_{tt}^2 - J) \tag{2.13}$$

trong đó

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 S_{GG}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} d\omega$$

là phương sai đạo hàm của quá trình nghiệm hệ tuyến tính dưới tác dụng của tải trọng ngẫu nhiên G(t).

Từ (2.13) giải ra đối với m ta có

$$m = \frac{\alpha\Upsilon (\omega_0^2 \sigma_{tt}^2 - J)}{1 - \alpha^2 \omega_0^2 (\omega_0^2 \sigma_{tt}^2 - J)} \tag{2.14}$$

Thay (2.14) vào (2.12) ta tìm được

$$\sigma^2 = \frac{\Upsilon^2 \sigma_{tt}^2}{[1 - \alpha^2 \omega_0^2 (\omega_0^2 \sigma_{tt}^2 - J)]^2} \tag{2.15}$$

Trong các công thức (2.14) và (2.15), ta đánh giá được ảnh hưởng của kích động tham số đến giá trị trung bình và phương sai của quá trình nghiệm. Nếu không tồn tại kích động tham số, từ hai công thức trên ta có

$$m = 0 \quad , \quad \sigma^2 = \Upsilon^2 \sigma_{tt}^2$$

Đó chính là kết quả đối với hệ tuyến tính.

b) Giả sử G(t) và F(t) là hai quá trình độc lập, khi đó (2.8) có dạng

$$S_{XX}(\omega) = \frac{\alpha^2 \omega_0^2 m^2 S_{GG}(\omega) + S_{FF}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}$$

Từ đó suy ra

$$\sigma^2 = \alpha^2 \omega_0^4 m^2 I_1 + I_2 \tag{2.16}$$

trong đó

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{GG}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} d\omega \quad ; \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{FF}(\omega) d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2}$$

là phương sai của nghiệm hệ tuyến tính dưới tác dụng tương ứng của các quá trình G(t) và F(t). Trong trường hợp này, chú ý đến (1.25) trong [1], phương trình $m = \alpha R_{GX}(t, t)$ cho ta

$$m = 0 \tag{2.17}$$

Thay (2.17) vào (2.16) ta có

$$\sigma^2 = I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{FF}(\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4h^2\omega^2} d\omega \tag{2.18}$$

Như vậy, bằng phương pháp «giả định chuẩn» đối với hệ tuyến tính chịu kích động tham số, trong trường hợp quá trình kích động tham số và ngoại lực độc lập với nhau ta không phát hiện được ảnh hưởng của kích động tham số. Khi đó hàm mật độ phổ thu được có dạng như đối với hệ tuyến tính thông thường chịu tác dụng của quá trình ngẫu nhiên chuẩn dừng có kỳ vọng bằng không.

§ 3. VÍ DỤ

Xét dầm có chiều dài l, gối khớp ở hai đầu, có thiết diện ngang hình chữ nhật hiều cao h, chiều rộng b, chịu tác dụng của tải trọng ngẫu nhiên phân bố theo chiều ài của dầm $K(x, t)$ và lực nén dọc ngẫu nhiên $G(t)$. Giả sử dầm làm bằng loại vật liệu ó quan hệ giữa ứng suất và biến dạng biểu diễn bởi đường cong khép kín, theo)avidencov [2], có dạng

$$\overrightleftarrows{\sigma} = E\left\{\varepsilon \mp \frac{\nu}{3}\left[\left(\varepsilon_2 \pm \varepsilon\right)^3 - 4\varepsilon_2^3\right]\right\} \tag{3.1}$$

rong đó σ là ứng suất, ε là biến dạng, ε_2 là giá trị cực đại của ε tại điểm khảo sát theo hời gian, ν là hằng số phụ thuộc vào vật liệu.

Ký hiệu $W(x, t)$ là độ võng ngang của dầm, ta có phương trình chuyển động au đây

$$\rho bh\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + EI_1\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + G\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \mp \frac{\nu EI_2}{3}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(\widetilde{\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}} \pm \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^3 - 4\left(\widetilde{\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}}\right)\right] = K(x, t) \tag{3.2}$$

rong đó ρ là mật độ khối lượng trên một đơn vị độ dài, $\widetilde{\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}}$ là giá trị cực đại của $\dfrac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ theo t

$$I_1 = \iint_F z^2\,dydz \quad , \quad I_2 = \iint_F z^4\,dydz$$

ới F là thiết diện ngang, y và z là các trục nằm trong mặt phẳng của thiết diện, đi qua tâm, trục z hướng thẳng đứng. Các điều kiện biên là

$$W(0, t) = W(l, t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 W(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 W(l,t)}{\partial x^2} = 0 \tag{3.3}$$

Ta tìm nghiệm của phương trình (3.2) – (3.3) dưới dạng

$$W(x, t) = Z(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{3.4}$$

thỏa mãn điều kiện biên (3.3). Dùng phương pháp Galerkin [3] và giả thiết rằng ngoại lực phân bố được biểu diễn dưới dạng

$$K(x, t) = \xi(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{3.5}$$

Thay (3.4) và (3.5) vào phương trình (3.2) ta nhận được phương trình

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \omega_n^2\,(1 + \alpha G(t))\,Z + \beta\,\overrightleftarrows{\Phi}(A, Z) = F(t) \tag{3.6}$$

trong đó

$$F(t) = \frac{\xi(t)}{\rho hb}\ ;\ \alpha = \frac{1}{EI_1\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2},\ \overrightleftarrows{\Phi} = \mp\left[(A \pm Z)^3 - 4A^3\right],\ \beta = \frac{\nu EI_2}{4\rho bh}\left(\frac{\pi n}{l}\right)^8 \tag{3.7}$$

A là độ lệch cực đại của $Z(t)$, α chính là nghịch đảo của lực tới hạn Euler.

Giả sử F(t) và G(t) là các quá trình ngẫu nhiên chuẩn dừng, có kỳ vọng bằng không, dựa vào phương pháp trong [1] ta tính các tích phân sau

$$P(m, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \overrightarrow{\Phi}(a, a\cos\varphi + m) f(a)\, da\, d\varphi$$

$$Q_1(m, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \overleftrightarrow{\Phi}(a, a\cos\varphi + m)\, a\cos\varphi\, f(a)\, da\, d\varphi \tag{3.8}$$

$$Q_2(m, \sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \overleftrightarrow{\Phi}(a, a\cos\varphi + m)\, a\sin\varphi \,.\, f(a)\, da\, d\varphi$$

trong đó

$$f(a) = \frac{a}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right\}$$

là phân bố Rayleigh.

Sau khi tính toán ta tìm được

$$P(m,\sigma) = -\, m\,(9\sigma^2 + m^2)$$
$$Q_1(m,\sigma) = -\,(15\sigma^2 + 3m^2)$$
$$Q_2(m,\sigma) = -\frac{2}{\pi}(8\sigma^2 - 3m^2) \tag{3.9}$$

Giả sử F(t) và G(t) là các quá trình ngẫu nhiên độc lập, khi đó từ phương trình (1.9) trong [1] ta nhận được

$$m_1 = 0\,; \quad m_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\beta}\left[1 - \alpha^2\omega_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{GG}(\omega)(\omega_0^2 - \omega^2 + \beta Q_1)}{(\omega_0^2 - \omega^2 + \beta Q_1)^2 + \beta^2 Q_2^2}\, d\omega\right] - 9\sigma^2} \tag{3.10}$$

Ở đây ta chỉ khảo sát nghiệm m_1. Đối với nghiệm này công thức (2.1) cho ta

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{FF}(\omega)\, d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2 + \beta Q_1)^2 + \beta^2 Q_2^2} \tag{3.11}$$

Như vậy, trong trường hợp này ta sẽ không phát hiện được ảnh hưởng của kích động tham số.

Giả sử quá trình tác dụng bên ngoài có hàm mật độ phổ biểu diễn dưới dạng

$$S_{FF}(\omega) = \sigma_F^2\, a\,[\pi(a^2 + \omega^2)]^{-1} \quad (a > 0) \tag{3.12}$$

ứng với hàm tương quan

$$R_{FF}(\tau) = \sigma_F^2 \exp(-a|\tau|) \tag{3.13}$$

Thay (3.12) vào (3.11) ta có

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_F^2\, a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{[(\omega_0^2 - \omega^2 + \beta Q_1)^2 + \beta^2 Q_2^2]\,[a^2 + \omega^2]} \tag{3.14}$$

Ta tính tích phân này bằng phương pháp thặng dư [4]. Các cực điểm của hàm dưới dấu tích phân ở nửa mặt phẳng phức phía trên là

$$\omega_1 = ia\,; \quad \omega_2 = \sqrt{r}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}\,; \quad \omega_3 = \sqrt{r}\, e^{i\left(\pi - \frac{\varphi}{2}\right)} \tag{3.15}$$

trong đó

$$r^2 = (\omega_o^2 + \beta Q_1)^2 + \beta^2 Q_2^2\,; \quad tg\varphi = -\frac{\beta Q_2}{\omega_o^2 + \beta Q_1} \tag{3.16}$$

Từ đó theo công thức tính thặng dư, ta tìm được

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_F^2\left[\sqrt{r}\,\beta Q_2 - a(a^2 + \omega_o^2 + \beta Q_1)\cos\frac{\varphi}{2} + \beta Q_2 a \sin\frac{\varphi}{2}\right]}{\sqrt{r}\,\beta Q_2[(\omega_o^2 + a^2 + \beta Q_1)^2 + \beta^2 Q_2^2]} \tag{3.17}$$

Bây giờ giả sử β khá nhỏ, từ các công thức (3.16) và (3.17) khai triển theo β, bỏ đi các thành phần bậc cao hơn β ta nhận được

$$\sigma^2 = -\frac{a\sigma_F^2}{\beta Q_2\omega_o(\omega_o^2 + a^2)} + \frac{\sigma_F^2(\omega_o Q_2 + aQ_1)}{Q_2\omega_o(\omega_o^2 + a^2)^2} - \frac{2\sigma_F^2\beta Q_1(\omega_o Q_2 - aQ_1)}{Q_2\omega_o(\omega_o^2 + a^2)^3} \tag{3.18}$$

Thay $Q_1 = -15\sigma^2$; $Q_2 = -16\sigma^2/\pi$ vào (3.18) ta được phương trình bậc hai đối với σ^2, giải phương trình này ta được

$$\sigma^2 = A_1\,\sigma_F + A_2\,\sigma_F^2 + A_3\,\sigma_F^3 \tag{3.19}$$

với

$$A_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi a}{\beta\omega_o(\omega_o^2 + a^2)}}\,; \quad A_2 = \frac{16\omega_o + 15a\pi}{32\omega_o(\omega_o^2 + a^2)^2}\,; \quad A_3 \approx \frac{\omega_o^2 + 29{,}4\omega_o a - 56a^2}{3{,}5\,\omega_o^{3/2}(\omega_o^2 + a^2)^{7/2}}\sqrt{\beta} \tag{3.20}$$

Từ công thức (3.20) ta thấy rằng A_3 có thể lấy giá trị âm khi a đủ lớn. Khi đó dễ dàng thấy rằng σ^2 sẽ đạt cực đại khi

$$\sigma_F = \frac{-A_2 - \sqrt{A_2^2 - 3A_1A_3}}{A_3}\ (> 0) \tag{3.21}$$

Hơn nữa, từ (3.19) ta nhận thấy rằng, σ^2 sẽ bằng không khi σ_F bằng không và khi

$$\sigma_F = \frac{-A_2 - \sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3}}{2A_3}$$

Như vậy, trong trường hợp này với gần đúng đến bậc $\sqrt{\beta}$, ta có thể chọn được σ_F để cho phương sai của quá trình nghiệm nhận giá trị bằng không.

Vấn đề chưa được giải quyết ở đây là, khi tìm được nhiều giá trị của kỳ vọng và phương sai, ta phải nghiên cứu xem với điều kiện nào sẽ xảy ra một trong các giá trị ấy và giá trị nào là ổn định. Những vấn đề đó không nằm trong khuôn khổ của bài này.

Địa chỉ
Viện Cơ học, Viện KHVN

Nhận ngày 18-9-1979

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Cao Mệnh. Dao động của hệ động lực chứa đặc trưng trễ chịu kích động ngẫu nhiên của tham số và lực ngoài. I. Tạp chí CƠ HỌC số 1-2/1979.

2. ПИСАРЕНКО Г.С. Колебания механических систем с учетом несовершенной чпругости материала. Киев 1970.

3. КАУДЕРЕР Г. Нелинейная механика. М. 1960.

4. ПРИВАЛОВ И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М. 1967.

SUMMARY

THE OSCILLATIONS OF THE DYNAMICAL SYSTEMS WITH HYSTERESIS CHARACTERISTICS EXCITED STOCHASTIC PARAMETER AND FORCES. II

In this paper, the problem in [1] is continued studying. The some special cases of the general problem are considered. The beam with internal friction under stochastic forces is analized. In this example the influence of the hysteresis character in material and the parameter in the system on the oscillations of the beam are shown.

THÔNG BÁO

XÊ MI NA DAO ĐỘNG

Xê mi na dao động được thành lập từ năm 1975 nhằm trao đổi và thông báo các kết quả nghiên cứu trong lĩnh vực Cơ học lý thuyết, Dao động và Ổn định.

Xê mi na sinh hoạt mỗi tháng một lần vào ngày thứ 7 của tuần đầu tháng tại bộ môn Cơ lý thuyết trường Đại học Bách khoa (phòng 210, nhà C_5).

Các đồng chí Nguyễn Văn Đạo, Lê Xuân Cận, Phạm Huyễn, Nguyễn Xuân Hùng đã lần lượt chủ trì Xê mi na.

Ban thường trực Xê mi na gồm có các đồng chí: Nguyễn Văn Đạo, Nguyễn Cao Mệnh (thường trực), Đỗ Sanh, Nguyễn Khắc Lân.

Các đề tài muốn báo cáo ở Xê mi na cần được đăng ký trước với đồng chí thường trực tại phòng Dao động, Viện Cơ học, viện KHVN.

Trong thời gian qua một số đề tài sau đây đã được báo cáo:

1. Phương pháp tiệm cận khảo sát dao động cộng hưởng phức tạp. Nguyễn Văn Đình, Đại học Bách khoa.
2. Dao động phi tuyến của hệ không chứa thành phần tuyến tính. Nguyễn Cao Mệnh, viện KHVN.
3. Một số bài toán lưu biến. Nguyễn Anh Tuấn, Đại học Bách khoa.
4. Tính toán công trình làm từ vật liệu đàn–nhớt. Nguyễn Văn Vượng, Đại học Bách khoa.
5. Dao động của móng máy. Nguyễn Ngọc Quỳnh, Viện KHVN.
6. Dao động của khí quyển. Nguyễn Xuân Huy, Nha khí tượng.
7. Dao động của hệ có nhiều khâu nối. Nguyễn Lân, Đại học Mỏ – địa chất.
8. Dao động thông số trong hệ có tham số biến thiên. Lê Xuân Cận, Đại học Tổng hợp.
9. Tự động bộ cơ học. Nguyễn Văn Đình, Đại học Bách khoa.
10. Dao động phi tuyến cánh tuốc-bin. Phạm Hữu Hùng, Viện KHVN.
11. Phương pháp tiệm cận trong dao động ngẫu nhiên đối với hệ vô hạn bậc tự do. Nguyễn Khắc Lân, Đại học Tổng hợp.

. . . , . .