Tạp chí CƠ HỌC 1979 số 3 - 4 (trang 57 - 64)

CƠ SỞ PHƯƠNG PHÁP TIỆM CẬN TRONG HỆ PHI TUYẾN MẠNH CÓ CHẬM

NGUYỄN KHẮC LÂN

LẦN đầu tiên hệ có chậm, mà độ chậm được xác định bởi phương trình vi phân, đã được nghiên cứu trong công trình [1]. Độ chậm được giả thiết như trên khác về chất với các độ chậm đã được nghiên cứu trước đây (độ chậm Δ — không đổi, Δ — là hàm của thời gian, Δ — là hàm của hàm cần tìm và đạo hàm của nó). Sự khác biệt đó thể hiện ở chỗ Δ là hàm cho trước đều có thể giả thiết nó là một hàm dương trên một miền nào đó, còn nếu Δ coi như nghiệm của phương trình vi phân thì giả thiết trên bị phá vỡ và trong khi nghiên cứu cần chỉ ra những điều kiện để Δ là nghiệm dương của hệ phương trình vi phân, đó là một khó khăn lớn khi giải quyết bài toán này.

Trong bài này chúng tôi trình bày phương pháp xây dựng nghiệm gần đúng tiệm cận và chứng minh cơ sở toán học của phương pháp đó trong hệ phi tuyến mạnh có chậm, mà độ chậm phụ thuộc vào trạng thái của hệ dao động. Sự phụ thuộc đó được biểu diễn bằng phương trình vi phân.

§1. TA KHẢO SÁT DAO ĐỘNG CỦA HỆ CÓ CHẬM ĐƯỢC XÁC ĐỊNH BỞI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(\tau, x, \frac{dx}{dt}\right) = \varepsilon F_1\left(\tau, x, x_\Delta, \frac{dx}{dt}, \frac{dx_\Delta}{dt}, \varepsilon\right),$$

$$\frac{d_\Delta}{dt} = \varepsilon F_2\left(\tau, x, \frac{dx}{dt}, \Delta, \varepsilon\right).$$

trong đó ta kí hiệu $x_\Delta = x(t - \Delta)$, $\tau = \varepsilon t$ — tham số biến đổi chậm, ε — tham số bé, Δ — đặc trưng cho độ lệch của thời gian.

1) Giả sử: các hàm F_1, F_2 giải tích đối với tham số ε và có thể khai triển thành chuỗi lũy thừa của ε, mà các hệ số là các đa thức đối với đối số của mình.

2) Hệ suy biến:

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + f\left(\tau, x_0, \frac{dx_0}{dt}\right) = 0 \tag{1.2}$$

Khi đó τ = const, phương trình (1.2) có nghiệm dạng:

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} a^n z_n(\tau, \psi). \qquad (1.3)$$

$$\psi = \int \omega(\tau, a)\, dt + \varphi.$$

trong đó $z_n(\tau, \psi)$ — tuần hoàn theo ψ với chu kỳ 2π; a, φ là các hằng số tùy ý, a — nhỏ; chuỗi (1.3) hội tụ đều trong miền $|a| \leqslant 1$.

3) Xác định được nghiệm gần đúng của hệ suy biến và ký hiệu nó qua $z(\tau, a, \psi)$.

$$x = z(\tau, a, \psi) = \sum_{n=1}^{k} a^n z_n(\tau, \psi) \qquad (1.4)$$

và thực hiện điều kiện:

$$A(\tau, a, \psi) = \begin{vmatrix} z'_a & z'_\psi \\ z''_{a\psi} & z''_{\psi^2} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (1.5)$$

Khi xây dựng nghiệm, chúng ta coi rằng nghiệm $\Delta(t)$ của hệ (1.1) là hàm dương. Điều kiện dương của hàm $\Delta(t)$ sẽ chỉ ra ở dưới.

Để xây dựng nghiệm hệ (1.1) ta sẽ áp dụng phương pháp tiệm cận. Theo lược đồ của phương pháp đó trên đoạn [0, L] sẽ tìm nghiệm đúng của hệ (1.1) cấp nhỏ $0(a^k)$ theo tham số a và cấp $0(\varepsilon^k)$ theo tham số ε trong dạng

$$x = z(\tau, a, \psi) + \varepsilon U_1(\tau, a, \theta, \psi) + \varepsilon^2 U_2(\tau, a, \theta, \psi) + \ldots$$

$$\Delta = \theta + \varepsilon v_1(\tau, a, \theta, \psi) + \varepsilon^2 v_2(\tau, a, \theta, \psi) + \ldots \qquad (1.6)$$

trong đó các đại lượng a, ψ, θ thỏa mãn hệ phương trình

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau, a, \theta) + \varepsilon^2 A_2(\tau, a, \theta) + \ldots$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(\tau, a) + \varepsilon B_1(\tau, a, \theta) + \varepsilon^2 B_2(\tau, a, \theta) + \ldots$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon C_1(\tau, a, \theta) + \varepsilon^2 C_2(\tau, a, \theta) + \ldots \qquad (1.7)$$

Các hàm U_i, v_i tuần hoàn theo ψ với chu kỳ 2π.

Như vậy bài toán tìm nghiệm gần đúng hệ (1.1) được đưa về bài toán xác định các hàm $U_i(\tau, a, \theta, \psi)$, $V_i(\tau, a, \theta, \psi)$, $A_i(\tau, a, \theta)$, $B_i(\tau, a, \theta)$, $C_i(\tau, a, \theta)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$

Gần đúng thứ nhất hoàn thiện theo tham số ε được xác định theo công thức:

$$x^{(1)} = z(\tau, a, \psi) + \varepsilon U_1(\tau, a, \theta, \psi) \qquad (1.8)$$

$$\Delta^{(1)} = \theta(t) + \varepsilon V_1(\tau, a, \theta, \psi).$$

$U_1(\tau, a, \psi)$, $V_1(\tau, a, \psi)$ tuần hoàn theo ψ với chu kỳ 2π. Các đại lượng a, ψ, θ thỏa mãn hệ phương trình:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau, a, \theta)$$

$$\frac{d\Psi}{dt} = \omega(\tau, a) + \varepsilon B_1(\tau, a, \theta). \tag{1.9}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon C_1(\tau, a, \theta)$$

Bây giờ tìm hàm $U_1(\tau, a, \theta, \psi)$, $V_1(\tau, a, \theta, \psi)$, và $A_1(\tau, a, \theta)$, $B_1(\tau, a, \theta)$, $C_1(\tau, a, \theta)$. Với mục đích đó ta vi phân biểu thức (1.8), khi vi phân có kể tới các phương trình (1.9). Sau đó thế những kết quả nhận được vào phương trình (1.1), khai triển hai vế theo chuỗi lũy thừa của ε, cho các hệ số của ε^0 và ε^1 ở 2 vế bằng nhau. Ta nhận được các phương trình:

$$\omega^2 z''_{\psi 2} + f(\tau, z, \omega z'_\psi) = 0,$$

$$\omega^2 \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi^2} + \omega\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_o \frac{\partial U_1}{\partial \psi} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o U_1 =$$

$$= \Phi_1((\tau, a, \theta, \psi) - \left[\omega'_a z'_\psi + 2\omega z''_{a\psi} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o z'_a\right] A_1 - \left[2\omega z''_{\psi 2} + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_o z'_\psi\right] B_1$$

$$\omega \frac{\partial V_1}{\partial \psi} = F_2(\tau, z, \omega z'_\psi, \theta) - C_1(\tau, a, \theta) \tag{1.10}$$

Ở đây biểu thức lấy giá trị tại nghiệm của hệ suy biến được ký hiệu qua dấu móc $(.)_o$ và

$$\Phi_1(\tau, a, \theta, \psi) = F_1(\tau, z(\tau, a, \psi), z(\tau, a, \psi - \omega\triangle),$$

$$\omega z'_\psi(\tau, a, \psi), \omega z'_\psi(\tau, a, \psi, \omega\triangle), C) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_o z'_\tau - 2\omega z''_{\tau\psi} - \omega'_\tau z'_\psi.$$

Trước hết từ phương trình thứ ba của (1.10) ta xác định được hàm $V_1(\tau, a, \theta, \psi)$. Hàm này tuần hoàn theo ψ với chu kỳ 2π khi có hệ thức

$$C_1(\tau, a, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_2(\tau, z, \omega z'_\psi, \theta, C) d\psi. \tag{1.11}$$

và hàm V_1 có dạng

$$V_1 = \frac{1}{\omega}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{F_{2n}}{n}\sin n\psi - \frac{F^*_{2n}}{n}\cos n\psi\right]. \tag{1.12}$$

trong đó F_{2n}, F^*_{2n} là hệ số Phua-ri-ê của hàm F_2.

Từ phương trình thứ hai của (1.10) ta thấy rằng, phương trình thuần nhất tương ứng với nó trùng với phương trình biến phân của hệ suy biến ($\varepsilon = 0$).

theo giả thiết và kết quả của lý thuyết phương trình vi phân dễ dàng biết 2 nghiệm độc lập của nó. Sau đó dễ dàng tìm được hàm $U_1(\tau, a, \theta, \psi)$ nhờ phương pháp biến thiên hằng số La-grăng. Ta có:

$$U_1 = z'_a(\tau, a, \psi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}[P_n(\tau, a, \theta)\sin\psi - Q_n(\tau, a, \theta).\cos n\psi] +$$

$$+ z'_\psi(\tau, a, \psi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}[P^*_n(\tau, a, \theta)\sin\psi - Q^*_n(\tau, a, \theta)\cos n\psi] \quad (1.12)$$

trong đó $P_n(\tau, a, \theta)$, $Q_n(\tau, a, \theta)$, $P^*_n(\tau, a, \theta)$, $Q^*_n(\tau, a, \theta)$ là những đại lượng đã được xác định. Các đại lượng A_1, B_1 được xác định từ hệ phương trình.

$$S_{11}A_1 + S_{12}B_1 = \int_0^{2\pi} \frac{z'_\psi \Phi_1}{\omega^2 \mathcal{D}} d\psi,$$

$$S_{21}A_1 + S_{22}B_1 = \int_0^{2\pi} \frac{z'_a \Phi_1}{\omega^2 \mathcal{D}} d\psi, \quad (1\cdot13)$$

Trong đó:

$$S_{11} = \int_0^{2\pi} \frac{z'_\psi}{\omega^2 \mathcal{D}} \left[\omega'_a z'_\psi + 2\omega z''_{a\psi} + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_0 z'_a\right] d\psi,$$

$$S_{12} = \int_0^{2\pi} \frac{z'_\psi}{\omega^2 \mathcal{D}} \left[2\omega z''_{\psi^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_0 z'_\psi\right] d\psi.$$

$$S_{21} = \int_0^{2\pi} \frac{z'_a}{\omega^2 \mathcal{D}} \left[\omega'_a z'_\psi - 2\omega z''_{a\psi} + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_0 z'_a\right] d\psi, \quad (1.13)$$

$$S_{22} = \int_0^{2\pi} \frac{z'_a}{\omega^2 \mathcal{D}} \left[2\omega z''_{\psi^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_0 z'_\psi\right] d\psi.$$

Nếu định thức:

$$S = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

thì A_1, B_1 được xác định một cách duy nhất và bài toán giải được, nếu định thức đó bằng không thì bài toán không giải được bằng phương pháp trên. Nhưng đối với nhiều bài toán thực tế định thức trên khác không.

Ví dụ: Khảo sát phương trình

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda^2 x - \gamma x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx(t-\triangle)}{dt}, \quad \frac{d\triangle}{dt} = \varepsilon x^2. \quad (1.14)$$

Đối với phương trình (1.14) ma trận S có dạng:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega^2}\left(\omega + \frac{a\omega_a'}{2} - \frac{\gamma\omega_a^2}{4} + \frac{11\gamma\omega_a^2}{64\lambda}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\omega}\left(1 - \frac{11\gamma_a^2}{64\lambda}\right) \end{pmatrix}$$

và hệ phương trình (1.9) có dạng:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon \frac{a\omega\left(1 - \frac{a^4}{8} + \frac{5\gamma_a^2}{256\lambda}\right)\cos\omega\triangle}{\omega + \frac{a\omega_a'}{2} - \frac{\gamma\omega_a^2}{4} + \frac{11\gamma\omega_a^2}{64\lambda}} \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega - \varepsilon\omega \frac{\left(1 - \frac{3a^2}{4} - \frac{7\gamma\omega_a^2}{64\lambda}\right)\sin\omega\triangle}{\left(1 - \frac{11\gamma_a^2}{64\lambda}\right)} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \varepsilon\frac{a^2}{2} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Nghiệm của hệ (1.14) với độ chính xác a^4 theo tham số a và ε^1 theo tham số ε có dạng:

$$x = a\cos\psi - \frac{\gamma a^3}{32\lambda}(\cos\psi - \cos 3\psi),$$

$$\triangle = \theta + \varepsilon\frac{a^2}{4\omega}\sin 2\psi,$$

trong đó a, ψ, θ thỏa mãn hệ phương trình (1.15).

§2. Trong phần này ta chứng minh cơ sở của phương pháp tiệm cận đối với phương trình có chậm gần tích phân được, tức là ta chứng minh rằng nghiệm gần đúng mà tìm được bằng phương pháp tiệm cận trên một khoảng thời gian đủ lớn với độ chính xác cần thiết là nghiệm của phương trình tương ứng. Để đơn giản cho sự trình bày, và không hạn chế tổng quát, ta chứng minh định lý về cơ sở của phương pháp tiệm cận đối với nghiệm gần đúng thứ nhất hoàn thiện của phương trình (1.1).

Có thể khẳng định rằng lược đồ chứng minh và những kết quả dưới đây cũng đúng đối với trường hợp biết nghiệm chính xác của phương trình suy biến và độ chậm là hằng số hoặc là hàm của thời gian.

Với mục đích trên ta phát biểu không chứng minh định lý sau:

Định lý: *Giả sử hệ (1.1) thỏa mãn các điều kiện 1) — 3) trong mục 1 và*

a) Hệ phương trình (1.9) thỏa mãn điều kiện

$$|A_1(\tau, a, \theta)| \leqslant D_1 a + D_3\theta + D_5 \qquad (2.1)$$
$$|C_1(\tau, a, \theta)| \leqslant D_2 a + D_4\theta + D_6$$

b) Nghiệm $a(t)$, $\theta(t)$ của hệ (1.9) thỏa mãn bất đẳng thức

$$|a(-T)| + |\theta(-T)| \leqslant \rho < \alpha, \qquad (2.2)$$

$$c)\ T = \alpha e^{\varepsilon(D'+D'')(L+T)} + \frac{D_5 + D_6}{D' + D''}\left(e^{\varepsilon(D'+D'')(L+T)} - 1\right). \qquad (2.3)$$

trong đó $D' = max\,(D_1, D_3)$, $D'' = max(D_2, D_4)$.

$$d)\ \alpha + \frac{D_5 + D_6}{D' + D''} < \tau\ . \qquad (2.4)$$

Khi đó với L đủ lớn và các hằng số S; M có thể xác định các số dương K, ε_0 để cho $\forall\varepsilon < \varepsilon_0$ và trên đoạn $[0, L]$ sẽ có bất đẳng thức:

$$|x^{(1)}(t) - x(t)| < \varepsilon K.$$
$$|\dot{x}^{(1)}(t) - \dot{x}(t)| < \varepsilon K, \qquad (2.5)$$
$$|\Delta^{(1)}(t) - \Delta(t)| < \varepsilon K.$$

trong đó $x^{(1)}(t)$, $\Delta^{(1)}(t)$ là nghiệm gần đúng thứ nhất hoàn thiện được xác định bởi công thức (1.8) và (1.9), còn $x(t)$ và $\Delta(t)$ là nghiệm chính xác của phương trình (1.1). Chúng thỏa mãn điều kiện ban đầu.

$$x(t) = \varphi(t),\ \dot{x}(t) = \dot{\varphi}(t) \text{ trên đoạn } (-\infty, 0).$$

$x^{(1)}(t) = \varphi^{(1)}(t), \dot{x}^{(1)}(t) = \dot{\varphi}^{(1)}(t)$ *trên tập E_0, E_0 là tập ban đầu xác định từ quan hệ với $\Delta^{(1)}(t)$.*

$$x(o) = \varphi(o),\ \dot{x}(o) = \dot{\varphi}(o): \quad x^{(1)}(o) = \varphi^{(1)}(o), \quad \dot{x}^{(1)}(o) = \dot{\varphi}^{(1)}(o)$$
$$|\varphi(t) - \varphi^{(1)}(t)| \leqslant \varepsilon S, \quad |\varphi^{(1)}(t)| < M.$$
$$|\dot{\varphi}(t) - \dot{\varphi}^{(1)}(t)| \leqslant \varepsilon S, \quad |\dot{\varphi}^{(1)}(t)| < M.$$

trên tập E_0 và

$$|\Delta(o) - \Delta^{(1)}(o)| \leqslant \varepsilon S, \quad |\Delta^{(1)}(t)| < \Delta_1.$$

các hàm $\varphi(t)$, $\varphi^{(1)}(t)$ đủ số lần khả vi trên miền xác định của mình.

Sau đây ta nêu những bước cơ bản của lược đồ chứng minh định lý trên. Khi chứng minh chúng ta sử dụng lược đồ của Mi-to-rô-pôn-xki để chứng minh định lý cơ bản của phương pháp tiệm cận (xem [2]). Để sử dụng lược đồ đó ta lần lượt chứng minh các bổ đề sau đây.

Bổ đề 1: *Giả sử hệ phương trình (1.9) thỏa mãn điều kiện (2.1) thì nghiệm $a(t)$, $\theta(t)$ giới nội trên đoạn $-T \leqslant t \leqslant L$.*

Bổ đề 2: *Nếu có điều kiện (2.4), thì phương trình (2.3) có ít nhất một nghiệm nhỏ hơn τ.*

Bây giờ ta giả sử $t_0 = 0$ là thời điểm ban đầu. Từ quan hệ của $\Delta^{(1)}(t)$ ta xác định tập hợp ban đầu E_0. Tập hợp này bao gồm điểm $t_0 = 0$ và tất cả các giá trị $t - \Delta^{(1)}(t)$ mà $t - \Delta^{(1)}(t) < 0$ khi $t > 0$; đồng thời $t_0 = 0$ là điểm biên bên phải của tập E_0. Ký hiệu đoạn bao gồm tất cả các giá trị t ở E_0 và $[0, L]$ qua đoạn $[t^*, L]$. Khi đó ta có:

Bổ đề 3: *Giả sử có điều kiện (2.1), (2.2) và $\theta(-T) > 0$, trong đó T là nghiệm của phương trình (2.3) thì:*

a) $\Delta^{(1)}(t)$ giới nội và $\Delta^{(1)}(t) < T < \tau$, nếu $\tau \leqslant 2\pi$ thì $\Delta^{(1)}(t) < 2\pi$; đồng thời $\Delta^{(1)}(t)$ là hàm dương trên đoạn $[t^*, L]$

b) $x^*(t)$ là hàm giới nội trên đoạn $[t^*, L]$.

Theo kết quả của bổ đề 1 nghiệm $\theta(t)$ giới nội trên đoạn $[-T, L]$ và theo bổ đề 3 $\Delta^{(1)}(t) < T$, do đó ta có thể suy ra rằng đoạn $[t^*, L]$ nằm trong đoạn $[-T, L]$. Cho nên $\theta(t)$ cũng giới nội trên đoạn $[t^*, L]$.

Bổ đề 4: *Nếu điều kiện (2.1) được thực hiện và*

$$\frac{D_3N + D_5}{D_1} < \sigma \ll 1,$$

rong đó: $N = \max\theta(t)$ trên $[t^*, L]$. Khi đó

$$|a(t)| < M < 1.$$

ếu $a(t^*) = \Upsilon \ll 1$.

Bổ đề 5: *Giả sử các điều kiện của định lý được thực hiện khi đó nghiệm ần đúng thứ nhất hoàn thiện $x^{(1)}$, $\Delta^{(1)}$ thỏa mãn phương trình (1.1) với sai số ^{2}, tức là có các bất đẳng thức*

$$\left|\frac{d^2x^{(1)}}{dt^2} - f\left(\tau, x^{(1)}, \frac{dx^{(1)}}{dt}\right) - \varepsilon F_1\left(\tau, x^{(1)}, x^{(1)}_\Delta, \frac{dx^{(1)}}{dt}, \frac{dx^{(1)}_\Delta}{dt}, \varepsilon\right)\right| \leqslant \varepsilon^2 F_{1*},$$

$$\left|\frac{d^{(1)}_\Delta}{dt} - \varepsilon F_2\left(\tau, x^{(1)}, \frac{dx^{(1)}}{dt}, \Delta^{(1)}, \varepsilon\right)\right| \leqslant \varepsilon^2 F_{2*}$$

rong đó F_{1*}, F_{2*} là những số xác định.

Sau khi chứng minh các bổ đề trên và nhờ phương pháp bước ta có thể ṛ dụng sơ đồ của Mi-tơ-rô-pôn-xki [2] để chứng minh định lý. Ở đây ta hông trình bày sơ đồ chứng minh các bổ đề và định lý đã nêu ở trên.

Địa chỉ
Trường Đại học Tổng hợp

Nhận ngày 5-5-1979

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. МИТРОПОЛЬСКИЙ Ю. А., НГУЕН КХАК ЛАН. О колебаниях систем с запаздыванием, зависящим от состояния системы, УМЖ, ТОМ 29, №3, 1977, С. 398—404.

2. МИТРОПОЛЬСКИЙ Ю. А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, «Наука» М., 1964, 341С.

RÉSUMÉ

FONDEMENT DE LA MÉTHODE ASYMPTOTIQUE DANS UN SYSTÈME NON LINÉAIRE AVEC RETARDEMENT

Dans ce travail se propose un schéma de construction d'une solution approximative asymptotiquement d'une système non linéaire au sens fort avec retardement dépendant de l'état du système. La relation entre le retardement et l'état du système est exprimée par une équation differentielle.

KÍNH BÁO

Năm 1979 Tạp chí Cơ Học cho đóng gộp, số 1—2 ra tháng 8, số 3—4 ra tháng 12, với giá 0đ30 × 2 = 0đ60.

Năm 1980 Tạp chí Cơ Học sẽ ra 3 tháng một kì vào các tháng 3 6 9 và 12 với giá 0đ30.

Xin mời Bạn đọc đặt mua tại các Ty, Sở bưu điện gần nhất.