Tạp chí CƠ HỌC 1979 số 3-4 (trang 49-56)

PHƯƠNG PHÁP TRUYỀN NHẢY NÚT MÔ MEN KHÔNG CÂN BẰNG ÁP DỤNG CHO HỆ KHUNG PHẲNG LIÊN TỤC

VŨ NHƯ CẦU

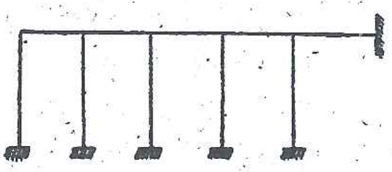
ỐI với hệ khung có bậc siêu tĩnh cao, trong quá trình tính nội lực, ta phải giải một hệ phương trình đại số tuyến tính gồm nhiều ẩn số và sự hội tụ m có thể xảy ra khi giải theo phương pháp tính lặp. Tác giả bài báo nêu lên t phương pháp tính toán nhằm giải quyết 2 vấn đề:

— Giảm số lượng các ẩn số đến mức đáng kể.

— Tăng nhanh tốc độ hội tụ trong quá trình tính lặp

Phương pháp của tác giả có thể áp dụng trực tiếp cho hệ dầm liên tục, khung liên tục, hệ khung nhiều tầng 1 nhịp và 2 nhịp đối xứng chịu các trọng đối xứng. Đồng thời, phương pháp cũng có thể mở rộng cho hệ khung ı tục gồm các xà ngang có dạng thanh cong hoặc thanh gãy khúc, hệ khung ều tầng nhiều nhịp có nút chuyển vị thẳng mà trong phạm vi một bài báo giả không thể đề cập đến.

Giả sử có một hệ khung liên tục với nút ɔng có chuyển vị thẳng gồm các phần tử có độ ıg thay đổi như trên hình 1. Tại mỗi nút của khung đó, chỉ có một thành phần chuyển vị là xoay. Ta sẽ chọn giá trị mô men không cân g tại mỗi nút làm ẩn số.



Hình 1

Để áp dụng phương pháp truyền nhảy nút mô men không cân bằng, trước ta hãy phân tích sự phân phối và truyền nội lực trên một phần tử tính n cơ bản (hình 2). Gọi:

i — nút trung tâm hay nút chính;

j — nút trung gian:

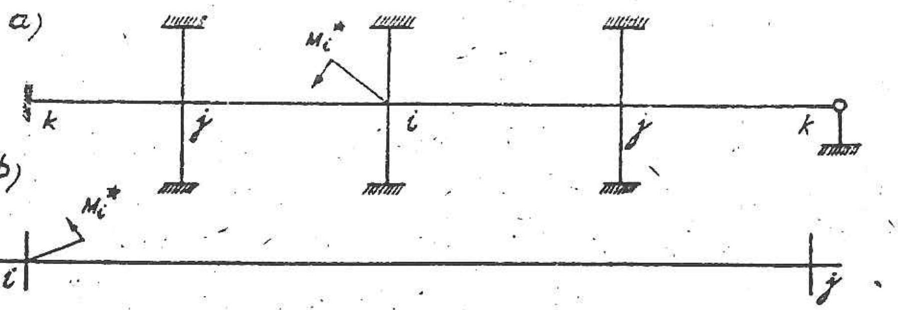
k — nút biên (có thể ngàm hoặc khớp);

μ_{ij} — hệ số phân phối mô men tại đầu i của thanh i j:

C_{ij} — hệ số truyền mômen từ đầu i đến đầu j của thanh i j.

Giả sử nút i chịu tác dụng của một mômen không cân bằng nào đó M_i^*.

Sau khi đóng tất cả các nút (giữ cho nút không có chuyển vị xoay) ta lần lượt mở (để cho nút chuyển vị xoay) và đóng các nút i, j. Qua nhiều chu trình tính toán, ta sẽ được một sơ đồ phân phối và truyền mômen (sơ đồ truyền biểu thị bằng các đường thẳng có mũi tên) như trên hình 2 (tại nút i thực ra có nhiều thanh quy tụ nhưng để hình vẽ được đơn giản, chỉ biểu thị tượng trưng 1 thanh ij). Trong đó, các biểu thức có gạch ở dưới biểu thị các giá trị mômen không cân bằng tại nút i lần lượt xuất hiện qua các chu trình tính toán (thực ra có



$$
\begin{array}{lcl}
M_i^*\mu_{ij} & \longrightarrow & M_i^*\mu_{ij}C_{ij} \\
M_i^*\mu_{ij}\mu_{ji}C_{ij}C_{ji} & \longleftarrow & M_i^*\mu_{ij}\mu_{ji}C_{ij} \\
\underline{(M_i^*\sum_i \mu_{ij}\mu_{ji}C_{ji}C_{ji})\mu_{ij}} & \longrightarrow & (M_i^*\sum_i \mu_{ij}\mu_{ji}C_{ij}C_{ji})\mu_{ij}C_{ij} \\
(M_i^*\sum_i \mu_{ij}\mu_{ji}C_{ij}C_{ji})\mu_{ij}\mu_{ji}C_{ij}C_{ji} & \longleftarrow & (M_i^*\sum_i \mu_{ij}\mu_{ji}C_{ij}C_{ji})\,\mu_{ij}\mu_{ji}C_{ij} \\
\underline{[M_i^*(\sum_i \mu_{ij}\mu_{ji}C_{ij}C_{ji})^2]\mu_{ij}} & \longrightarrow & \ldots\ldots \\
 & \longleftarrow\ \ldots\ldots &
\end{array}
$$

Hình 2

nhiều thanh quy tụ tại nút i nên các biểu thức này mang dấu tổng $\sum_i$). Những đại lượng này xuất hiện có quy luật. Sau vô số các chu trình tính toán, tổng giá trị mômen không cân bằng tích lũy tại nút i có thể viết:

$$M_i^{*T} = M_i^*(1 + k_i + k_i^2 + k_i^3 + k_i^4 + \ldots); \tag{a}$$

$$k_i = \sum_i \lambda_{ij}\lambda_{ji} \quad (1); \qquad \lambda_{mn} = \mu_{mn}C_{mn}. \tag{2}$$

Dấu tổng Σ_i áp dụng cho toàn bộ các thanh quy tụ tại nút i (trừ những thanh liên kết ngàm hoặc khớp).

Biểu thức trong dấu ngoặc ở vế phải của công thức (a) là tổng của một cấp số nhân lùi có công bội bằng k. Vì các hệ số μ và C đều nhỏ hơn 1 nên k nhỏ hơn 1, do đó tổng của cấp số đó bằng $1/1 - k_i$. Vậy với số chu trình tính toán vô cùng lớn, biểu thức (a) có thể viết:

$$M_i^{*T} = M_i^*\eta_i \tag{3}$$

M_i^{*T} — tổng giá trị mômen không cân bằng tích lũy tại nút i;

M_i^* — giá trị mômen không cân bằng ban đầu tại nút i;

η_i — hệ số tích lũy tại nút i.

$$\eta_i = \frac{1}{1 - ki} \tag{4}$$

ong đó: ki tính theo công thức (1).

Trong trường hợp tổng quát, tại các nút trung gian j có thể tồn tại các ômen ngàm $\overline{M}_j$ do tải trọng cục bộ gây ra. Khi đó, ta mở các nút trung gian để cho chúng cân bằng rồi đóng chúng lại. Sau đó, thực hiện các chu trình nh toán như đã trình bày ở trên, ta được:

$$M_i^{*T} = (M_i^* + M_i^o)\eta_i \quad (5); \qquad M_i^o = \sum_i \overline{M}_j \lambda_{ji} \quad (6)$$

M_i^o — giá trị mômen không cân bằng bổ sung tại nút i do các mômen ngàm $\overline{M}_j$ i các nút trung gian lân cận truyền đến. Dấu tổng $\sum_i$ áp dụng cho các thanh có $\overline{M}_j$ tác dụng quy tụ tại nút i.

Sau khi kết thúc quá trình phân phối và truyền mômen tại các nút i và giá trị mômen xuất hiện tại nút biên là (hình 2b):

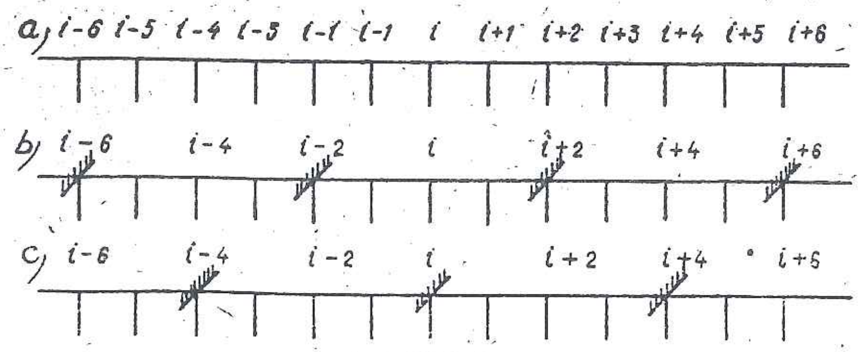
$$M_{kj} = M_i^{*T}\lambda_{ij}\lambda_{jk} + \overline{M}_{kj} + M_{kj}^o \tag{7}$$

$\overline{M}_{kj}$ — giá trị mômen ngàm tại đầu k của thanh jk do tải trọng cục bộ gây ra;

M_{kj}^o — giá trị mômen không cân bằng tại đầu k của thanh jk do mômen ngàm $\overline{M}_j$ tại nút trung gian j lân cận truyền đến.

$$M_{kj}^o = \overline{M}_j \lambda_{ik} \tag{8}$$

Trên cơ sở các công thức (5) và (7) ta có thể thành lập hệ phương trình mômen không cân bằng để giải theo phương pháp tính lặp đơn giản như sau:



Hình 3

Tập hợp một số nút của hệ khung biểu thị trên hình 3a. Giả sử ở chu ình tính toán thứ m, ta đóng các nút (i — 6), (i — 2), (i + 2) và (i + 6) để tạo ành các phần tử tính toán cơ bản (i — 6), (i — 2); (i — 2), (i + 2); (i + 2),

$(i+6)$ (hình 3b) và tại các nút trung tâm i, $(i-4)$, $(i+4)$ tồn tại các mô men không cân bằng $M_i^{*(m)}$, $M_{i-4}^{*(m)}$, $M_{i+4}^{*(m)}$. Từ các công thức (5) và (7), giá trị mômen không cân bằng xuất hiện ở chu trình tính toán thứ m tại các nút biên $(i-2)$ và $(i+2)$ bằng:

$$M_{i-2}^{*(m)} = (M_{i-4}^{*(m)} + M_{i-4}^{o})\,\eta_{i-4}\lambda_{i-4,\,i-3}\lambda_{i-3,\,i-2} +$$

$$+ (M_i^{*(m)} + M_i^{o})\,\eta_i\lambda_{i,\,i-1}\lambda_{i-1,\,i-2} + \overline{M}_{i-2}; \qquad \text{(b)}$$

$$M_{i+2}^{*(m)} = (M_i^{*(m)} + M_i^{o})\,\eta_i\lambda_{i,\,i+1}\lambda_{i+1,\,i+2} +$$

$$+ (M_{i+4}^{*(m)} + M_{i+4}^{o})\,\eta_{i+4}\lambda_{i+4,\,i+3}\lambda_{i+3,\,i+2} + \overline{M}_{i+2}; \qquad \text{(c)}$$

$\overline{M}_{i-2}$, $\overline{M}_{i+2}$ — tổng giá trị mô men ngàm tại các nút $(i-2)$ và $(i+2)$ do tải trọng cục bộ gây ra.

Bây giờ đến chu trình tính toán thứ $(m+1)$ ta lại đóng các nút i, $(i-4)$, $(i+4)$ để tạo thành các phần tử tính toán cơ bản $(i-4)$, i và i, $(i+4)$ (hình 3c). Cũng từ các công thức (5) và (7) giá trị mô men không cân bằng xuất hiện ở chu trình tính toán thứ $(m+1)$ tại nút biên i bằng:

$$M_i^{*(m+1)} = (M_{i-2}^{*(m)} + M_{i-2}^{o})\,\eta_{i-2}\lambda_{i-2,\,i-1}\lambda_{i-1,\,i} +$$

$$+ (M_{i+2}^{*(m)} + M_{i+2}^{o})\,\eta_{i+2}\lambda_{i+2,\,i+1}\lambda_{i+1,\,i} + \overline{M}_i. \qquad \text{(d)}$$

Thay giá trị của $M_{i-2}^{*(m)}$ và $M_{i+2}^{*(m)}$ từ các biểu thức (b) và (c) vào biểu thức (d) và tiến hành chỉnh lý, rút gọn, ta được:

$$M_i^{*(m+1)} = \gamma_{i-4,\,i}M_{i-4}^{*(m)} + \gamma_{i,\,i}M_i^{*(m)} + \gamma_{i+4,\,i}M_{i+4}^{*(m)} + a_i; \qquad (9)$$

Trong đó: $\gamma_{ki}(k = i-4,\ i+4)$ — hệ số truyền mô men không cân bằng từ nút k đến nút i cách nhau 4 nhịp gọi là hệ số truyền nhảy nút.

$$\gamma_{i-4,\,i} = \eta_{i-2}\eta_{i-4}\lambda_{i-4,\,i}; \qquad (10)$$

$$\gamma_{i,\,i} = \eta_i(\eta_{i-2}\lambda_{i,\,i-2}\lambda_{i-2,\,i} + \eta_{i+2}\lambda_{i,\,i+2}\lambda_{i+2,\,i}); \qquad (11)$$

$$\gamma_{i+4,\,i} = \eta_{i+2}\eta_{i+4}\lambda_{i+4,\,i}. \qquad (12)$$

Trong các công thức (10) – (12), ta ký hiệu:

$$\lambda_{k,\,k+n} = \prod_{j=0}^{n-1}\lambda_{k+j,\,k+j+1}; \qquad (13)$$

$$\lambda_{k,\,k-n} = \prod_{j=0}^{n-1}\lambda_{k-j,\,k-j-1}; \qquad (14)$$

Các giá trị λ được tính theo công thức (2).

a_i — số hạng tải trọng.

$$a_i = \gamma_{i-4,\,i}M_{i-4}^{o} + \gamma_{i,\,i}M_i^{o} +$$

$$+ \eta_{i-2}\lambda_{i-2,\,i}\left(\overline{M}_{i-2} + M_{i-2}^{o}\right) + \gamma_{i+4,\,i}M_{i+4}^{o} + \eta_{i+2}\lambda_{i+2,\,i}\left(\overline{M}_{i+2} + M_{i+2}^{o}\right) + \overline{M}_i; \qquad (15)$$

ong đó: $$M_s^o = \overline{M}_{s-1}\lambda_{s-1,s} + \overline{M}_{s+1}\lambda_{s+1,s} \qquad (16)$$

Ta gọi các nút (i), (i − 4), (i + 4) trong phương trình (9) là các nút chính: t nằm giữa hai nút chính (chẳng hạn các nút (i − 2), (i + 2) trên hình 3) là t phụ; nút nằm giữa một nút chính và một nút phụ lân cận (chẳng hạn các t (i − 1), (i + 1)... trên hình 3) là nút trung gian.

Ta giải hệ phương trình mô men không cân bằng (9) theo phương pháp h lặp đơn giản (chỉ số i áp dụng cho toàn bộ các nút chính của hệ khung) tìm giá trị mô men không cân bằng M_i^* tại các nút chính i.

Tổng giá trị mô men không cân bằng tích lũy tại các nút chính i tính eo công thức (5).

Tổng giá trị mô men không cân bằng tích lũy tại các nút phụ và các nút ung gian tính như sau:

it phụ k: $$M_k^{*T} = \eta_k\left(M_{k-2}^{*T}\lambda_{k-2,k} + M_{k+2}^{*T}\lambda_{k+2,k} + \overline{M}_k + M_k^o\right). \qquad (17)$$

it trung gian j: $$M_j^{*T} = M_{j-1}^{*T}\lambda_{j-1,j} + M_{j+1}^{*T}\lambda_{j+1,j} + \overline{M}_j. \qquad (18)$$

Giá trị mômen cuối cùng tại các đầu thanh quy tụ tại các nút tính như sau:

ẳng hạn đối với thanh ik, $$M_{ik} = M_{ik}^f + M_{ik}^T + \overline{M}_{ik}; \qquad (19)$$

$_k$ — giá trị mô men phân phối; $$M_{ik}^f = M_i^{*T}\mu_{ik}; \qquad (20)$$

^T_k — giá trị mô men truyền từ đầu k đến đầu i của thanh ik;

$$M_{ki}^T = M_k^{*T}\lambda_{ki}; \qquad (21)$$

$_k$ — giá trị mô men ngàm do tải trọng cục bộ gây ra.

Trong trường hợp khung gồm các phần tử có độ cứng không đổi, vì hệ truyền $C_{ij} = 0{,}5$ nên các công thức (10) — (21) cần sửa đổi lại như sau:

ng thức (10):

$$\gamma_{i-4,i} = 0{,}0625\eta_{i-2}\eta_{i-4}\mu_{i-4,i}; \qquad (10a)$$

ng thức (11):

$$\gamma_{i,i} = 0{,}0625\eta_i(\eta_{i-2}\mu_{i,i-2}\mu_{i-2,i} + \eta_{i+2}\mu_{i,i+2}\mu_{i+2,i}). \qquad (11a)$$

ng thức (12):

$$\gamma_{i+4,i} = 0{,}0625\eta_{i+2}\eta_{i+4}\mu_{i+4,i}; \qquad (12a)$$

ong đó:

$$\mu_{k,k+n} = \prod_{j=0}^{n-1}\mu_{k+j,k+j+1}; \qquad (13a)$$

$$\mu_{k,k-n} = \prod_{j=0}^{n-1}\mu_{k-j,k-j-1}; \qquad (14a)$$

ng thức (15):

$$a_i = \gamma_{i-4,i}M_{i-4}^o + \gamma_{i,i}M_i^o + 0{,}25\eta_{i-2}\mu_{i-2,i}(\overline{M}_{i-2} + M_{i-2}^o) +$$
$$+ \gamma_{i+4,i}M_{i+4}^o + 0{,}25\eta_{i+2}\mu_{i+2,i}(\overline{M}_{i+2} + M_{i+2}^o) + \overline{M}_i \qquad (15a)$$

Công thức (16):
$$M_s^o = 0,5(\overline{M}_{s-1}\mu_{s-1} + \overline{M}_{s+1}\mu_{s+1});\tag{16a}$$
Công thức (17):
$$M_k^{*T} = \eta_k\{0,25[M_{k-2}^{*T}\mu_{k-2,k} + M_{k+2}^{*T}\mu_{k+2,k}] + \overline{M}_k + M_k^o\};\tag{17a}$$
Công thức (18):
$$M_j^{*T} = 0,5(M_{j-1}^{*T}\mu_{j-1,j} + M_{j+1}^{*T}\mu_{j+1,j}) + \overline{M}_j;\tag{18a}$$
Các công thức (19), (20) không có gì thay đổi.
Công thức (21):
$$M_{ik}^{T} = 0,5M_k^{*T}\mu_{ki}.\tag{21a}$$
Trên đây tác giả đã trình bày phương pháp tính toán áp dụng cho hệ khung với nút không có chuyển vị thẳng. Trong trường hợp nút có chuyển vị thẳng, cách tính tương tự như đã trình bày ở trên. Ta tiến hành tính toán theo các bước sau đây:

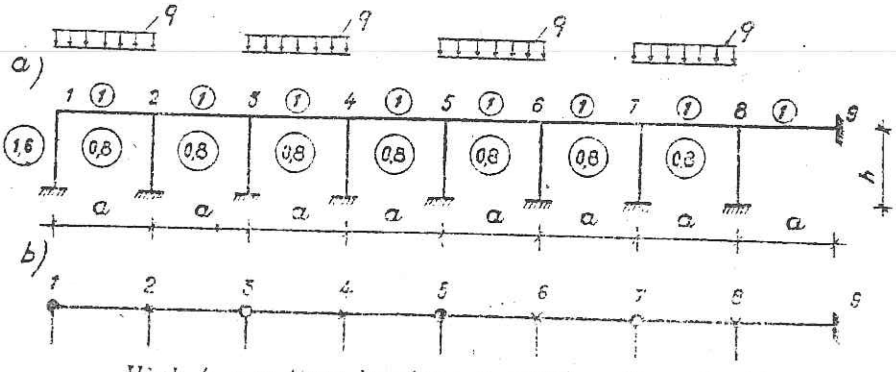
1. Cố định hệ khung bằng liên kết phụ để ngăn cản chuyển vị thẳng và áp dụng phương pháp trên đây để tính tổng giá trị mô men không cân bằng tích lũy tại các nút $M_s^{'*T}$.

2. Cho toàn bộ khung chuyển vị thẳng một đoạn $\Delta = 1$ và áp dụng phương pháp trên đây để tính tổng giá trị mô men không cân bằng tích lũy tại các nút $M_s^{''*T}$.

3. Từ điều kiện tổng phản lực tại liên kết phụ bằng không, tính chuyển vị thẳng thực tế Δ_t.

4. Từ nguyên lý công tác dụng, tổng giá trị mô men không cân bằng tích lũy cuối cùng tại các nút bằng:
$$M_s^{*T} = M_s^{'*T} + \Delta_t M_s^{''*T}.\tag{22}$$
Các bước còn lại tính hoàn toàn như đã trình bày ở trên.

Thí dụ đối với hệ khung với nút không có chuyển vị thẳng cho trên hình 4a, sơ đồ tính biểu thị như trên hình 4b trong đó chỉ có 2 nút chính (nút 3 và 7). Từ công thức (9), hệ phương trình mô men không cân bằng có dạng:



Hình 4. a = 10m; h = 3m; q = 12t/m; O — nút chính; ● — nút phụ; X — nút trung gian.

$$\left.\begin{aligned} M_3^{*(m+1)} &= \gamma_{3,3} M_3^{*(m)} + \gamma_{7,3} M_7^{*(m)} + a_3; \\ M_7^{*(m+1)} &= \gamma_{3,7} M_3^{*(m)} + \gamma_{7,7} M_7^{*(m)} + a_7. \end{aligned}\right\} \qquad (e)$$

Từ các công thức (10) – (12) và (15), ta tính được:

$\gamma_{3,3} = 0{,}0024$; $\gamma_{7,3} = 0{,}0012$; $a_3 = -108{,}94$ t – m;

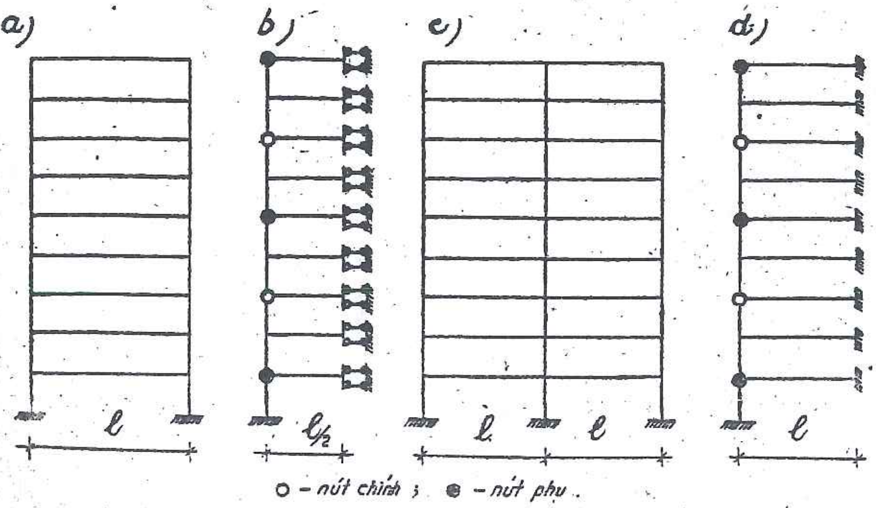
$\gamma_{3,7} = 0{,}0012$; $\gamma_{7,7} = 0{,}0012$; $a_7 = -104{,}70$ t – m.

Kết quả giải hệ phương trình (e) theo phương pháp tính lặp đơn giản i trong bảng 1.

Bảng 1

Thứ tự chu trình	$M_3^{*(m)}$	$M_7^{*(m)}$
1	– 109,30 t – m	– 104,94 t – m
2	– 109,32	– 104,95

Phương pháp tính toán trên đây có thể áp dụng trực tiếp cho hệ dầm :n tục, hệ khung nhiều tầng 1 nhịp và 2 nhịp đối xứng chịu các tải trọng đối :ng (hình 5a, 5c). Sơ đồ tính tương ứng của chúng như trên các hình 5b ı 5d.



Hình 5

KẾT LUẬN

Ta có thể rút ra mấy kết luận sau đây:

1. Phương pháp của tác giả có thể áp dụng trực tiếp cho hệ dầm liên tục, khung liên tục, hệ khung nhiều tầng 1 nhịp và 2 nhịp đối xứng chịu các tải ọng đối xứng. Đồng thời, phương pháp cũng có thể mở rộng cho hệ khung

liên tục phức tạp gồm các xà ngang có dạng thanh cong hoặc thanh gãy khúc hệ khung nhiều tầng 1 nhịp đối xứng chịu các tải trọng bất kỳ, hệ khung nhiều nhịp nhiều tầng với nút có chuyển vị thẳng.

2. Trong cách tính này, số lượng các ẩn số đã được giảm bớt một cách đáng kể. Chẳng hạn đối với hệ khung liên tục và hệ dầm liên tục trên dưới 10 nhịp hoặc hệ khung (hình 5a, 5c) trên dưới 10 tầng, số lượng các ẩn số chỉ vào khoảng từ 2 đến 3.

3. Vì các hệ số phụ (hệ số truyền nhảy nút trong các công thức (10) — (12)) trong hệ phương trình (9) là những đại lượng bé bậc 8 nên dẫn đến một điều tất yếu là giá trị tùyệt đối của chúng nhỏ đi một cách đáng kể. Do đó, quá trình tính lặp hội tụ rất nhanh chóng, việc giải phương trình rất đơn giản.

4. Khối lượng tính phụ tuy có tăng lên song sự tăng lên đó là không đáng kể so với sự giảm bớt số lượng các ẩn số và sự tăng nhanh tốc độ hội tụ trong quá trình tính lặp nên tổng khối lượng tính toán đã được giảm bớt một cách đáng kể.

Địa chỉ
Trường đại học vừa học vừa làm

Nhận ngày 30-4-1979

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Fischer A.** Calcul des cadres par la métthode des déformations, Paris, 1950.
2. **Klouček C.V.** Distribution of deformation, Prague, 1950.
3. **Charen P.** Simplifications et améliorations à la méthode de Cross, Paris, 1966.
4. ФАДДЕЕВ Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры, М., 1963.
5. СНИТКО Н.К. Расчет рамных сооружений интерационными методами на прочность и устойчивость. М., 1962.
6. СОСИС П. Статически неопределимые системы, Киев, 1968.

RÉSUMÉ

LA MÉTHODE DE TRANSMISSION D'UN NOEUD À L'AUTRE NON CONSÉCUTIF DES MOMENTS NON ÉQUILIBRÉS APPLIQUÉS AU CALCUL DES PORTIQUES CONTINUS

Dans le calcul des structures hautement hyperstatiques, on doit résoudre un système d'équations linéaires à plusieurs inconnues et la méthode des itérations pourrait présenter l'inconvénient d'une convergence lente.

Dans cet article, l'auteur expose une méthode de calcul simplifiée et caractérisée par la réduction considérable du nombre d'inconnues hyperstatiques et par la rapidité de convergence dans la méthode des itérations.

La méthode exposée peut être appliquée directement aux poutres continues, aux portiques continus à traverses droites, aux portiques étagés symétriques à une travée et à deux travées symétriquement chargés. Cette méthode s'étend également au cas des portiques continus à traverses curvilignes ou brisées et des portiques étagés à plusieurs travées susceptibles de subir des deplacements latéraux.