Tạp chí CƠ HỌC 1979 số 3-4 (trang 31-37)

VỀ MỘT PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU DAO ĐỘNG NGẪU NHIÊN CÁC HỆ ĐÀN - NHỚT TUYẾN TÍNH

NGUYỄN TIẾN KHIÊM, NGUYỄN ĐÔNG ANH

TRONG lý thuyết các hệ cơ học đàn-nhớt, rất nhiều bài toán dẫn đến việc giải phương trình vi tích phân sau đây:

$$\dot{X} = AX + \varepsilon \int_0^t K(t, s) X(s)\, ds + f(t), \quad X(o) = X_o \tag{1}$$

A, K là các ma trận hàm, ε — tham số bé, f(t) hàm véc tơ, X — véc tơ n chiều. Trong trường hợp f(t) là kích động tiền định, phương trình này đã được nhiều tác giả nghiên cứu. Khi f(t) là kích động ngẫu nhiên phương trình (1) còn ít được quan tâm. Mục đích của bài báo này là đưa ra một phương pháp nghiên cứu trường hợp cuối. Ý tưởng của phương pháp là dùng một phép biến đổi đưa phương trình vi tích phân ngẫu nhiên về phương trình vi tích phân tiền định. Sau khi giải phương trình tiền định, trở lại biến cũ ta được phương trình vi phân ngẫu nhiên, mà các công cụ nghiên cứu nó đã quen thuộc với chúng ta, ví dụ: Phương pháp phương trình Fokker-Planck-Kolmôgôrốv. Như vậy bằng phương pháp nêu trên có thể thay (một cách gần đúng) phương trình vi tích phân ngẫu nhiên bằng phương trình vi phân ngẫu nhiên.

Xét phương trình (1) với A = A(t), f(t) là quá trình ngẫu nhiên bất kỳ. Ta sẽ sử dụng phép biến đổi dạng:

$$X(t) = V(t, o) X_o + \int_0^t V(t, s) f(s)\, ds \tag{2}$$

Chú ý: Phép biến đổi này khá đặc biệt ở chỗ ta thay véc tơ X(t) bằng một ma trận V(t, s) và trong biểu thức của phép biến đổi có cả X_o, f(t).

Thay (2) vào (1) ta sẽ được phương trình để xác định V(t, s).

Đặt V(t, t) = I, khi đó:

$$\dot{X} = \dot{V}_t(t, 0) X_o + V(t, t) f(t) + \int_0^t \dot{V}_t(t,s) f(s) ds = A(t) [V(t, 0) X_o +$$
$$+ \int_0^t V(t, s) f(s)\, ds] + \varepsilon \int_0^t K(t, \sigma) [V(\sigma, 0) X_o + \int_0^\sigma V(\sigma, s) f(s)\, ds] + f(t)$$

hoặc là:

$$[\dot{V}_t(t, 0) - A(t) V(t, 0) - \varepsilon \int_0^t K(t, \sigma) V(\sigma, 0) d\sigma] X_o +$$

$$\int_0^t [\dot{V}_t(t, s) - A(t) V(t, s) - \varepsilon \int_s^t K(t, \sigma) V(\sigma, s) d\sigma] f(s) ds = 0$$

Phương trình cuối thỏa mãn với mọi X_o và $f(t)$ khi và chỉ khi $V(t, s)$ là nghiệm của phương trình:

$$\dot{V}_t(t, s) = A(t) V(t, s) + \int_0^t K(t,\sigma) V(\sigma, s) d\sigma; \; V(t, t) = I \quad (3)$$

Trong các biến đổi trên ta đã sử dụng công thức đổi chỗ dấu tích phân và ký hiệu $\dot{V}_t$ là đạo hàm riêng theo t của $V(t, s)$.

Trong trường hợp riêng, khi A là ma trận hằng và K chỉ phụ thuộc vào hiệu: $t-\sigma$, ta có thể dùng phép biến đổi:

$$X(t) = u(t)X_o + \int_0^t u(t - s)f(s) ds \quad (4)$$

Khi đó phương trình để xác định $u(t)$ sẽ có dạng:

$$\dot{u}(t) = Au(t) + \varepsilon \int_0^t K(t - \sigma) u(\sigma) d\sigma; \quad u(o) = I \quad (5)$$

Chúng ta chỉ hạn chế việc nghiên cứu tiếp theo trong trường hợp riêng này.

Dễ dàng nhận thấy rằng (5) là phương trình vi tích phân tiền định có chứa tham số bé ε. Để nghiên cứu phương trình này tồn tại nhiều phương pháp, một trong những phương pháp đó là phương pháp làm cứng của PHILATOP A.N. [4] Chúng ta sẽ áp dụng phương pháp này.

Đặt:
$$u(t) = H(t) W(t) \quad (6)$$

trong đó $H(t)$ là ma trận cơ bản của hệ: $\dot{X} = AX$ tức là $H(t)$ thỏa mãn:

$$\dot{H}(t) = AH(t); \; H(0) = I \quad (7)$$

Thay (6) vào (5) ta được:

$$\dot{H} W + H\dot{W} = AHW + \varepsilon \int_0^t K(t - \sigma) H(\sigma) W(\sigma) d\sigma \quad (8)$$

hay (7) vào (8), đơn giản các số hạng đồng dạng, cuối cùng ta được:

$$\dot{W}(t) = \varepsilon H^{-1}(t)\int_0^t K(t-\sigma)H(\sigma)W(\sigma)d\sigma \tag{9}$$

hương trình (9) có dạng chuẩn, vì vậy nếu áp dụng phương pháp làm cứng ı sẽ được phương trình gần đúng sau đây:

$$\dot{\overline{W}}(t) = \varepsilon H^{-1}(t)\,.\,\overline{K}\,.\,H(t)\overline{W}(t) \tag{10}$$

ong đó: $\overline{K} = \int_0^\infty K(\sigma)H(-\sigma)d\sigma$. Thay (10) vào (8), trở lại $u(t)$ ta có phương trình

ần đúng để xác định $u(t)$ là:

$$\dot{\overline{u}}(t) = (A + \varepsilon\overline{K})\overline{u}(t) = B\overline{u}(t);\quad u(o) = I \tag{11}$$

ới

$$B = A + \varepsilon\overline{K} = \{b_{ij}\}_{ij=1}^{n}$$

ı $\overline{u}(t)$ thỏa mãn phương trình vi phân với ma trận hệ số hằng nên nó có tính ıất:

$$\overline{u}(t-S) = \overline{u}(t)\,.\,\overline{u}^{-1}(S)$$

ı do đó:

$$\overline{X}(t) = \overline{u}(t)X_o + \int_0^t \overline{u}(t-S)f(S)dS. \tag{12}$$

nghiệm phương trình vi phân:

$$\dot{\overline{X}}(t) = (A + \varepsilon\overline{K})\,\overline{X}(t) + f(t) \tag{13}$$

ới: $\overline{K} = \int_0^\infty K(\sigma)H(-\sigma)d\sigma$ và $H(\sigma)$ tìm được từ (7).

Như vậy, phương trình (1) khi A là ma trận hằng và $K = K(t-\sigma)$ đã được ay bằng phương trình (13). Sự gần nhau giữa nghiệm của các phương trình ıy được chứng minh bằng định lý sau đây:

Định lý.

Nếu $f(t)$ *là ồn trắng, khi đó:* $\forall\eta > 0\ \exists\varepsilon_o,\ L > 0$ *sao cho:* $\forall\varepsilon < \varepsilon_o$, $\in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *ta có:* $M[X(t) - \overline{X}(t)]^2 < \eta$ *trong đó* $X(t)$ *là nghiệm của (1) và* t) *là nghiệm của (13).*

Chứng minh: Giả sử $u(t)$ là nghiệm đúng của (5), khi đó nghiệm đúng của) sẽ là:

$$X(t) = u(t)X_o + \int_0^t u(t-S)f(S)dS \tag{14}$$

$f(t)$ là ồn trắng nên ta có thể viết (14) về dạng:

$$X(t) = u(t)X_o + \int_0^t u(t-S)\,dB(S) \tag{15}$$

B(S) là quá trình Viner. Nếu $\overline{u}(t)$ là nghiệm của (11), tương tự như trên, nghiệm của (13) sẽ có dạng:

$$\overline{X}(t) = \overline{u}(t)X_0 + \int_0^t \overline{u}(t-S)\,dB(S) \tag{16}$$

Sử dụng tính chất của tích phân ngẫu nhiên [5] ta có thể nhận được bất đẳng thức:

$$M[X(t) - \overline{X}(t)]^2 \leqslant \| u(t) - \overline{u}(t)\|^2 . \| x_0\|^2 + \max_{0\leqslant t\leqslant L\varepsilon^{-1}} \int_0^t \| u(S) - \overline{u}(S)\|^2 dS \tag{17}$$

Mặt khác $\overline{u}(t)$ nhận được từ phương trình (5) bằng phương pháp làm cứng, theo [4] ta có:

$$\| u(t) - \overline{u}(t) \| = 0(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0 \ \forall t \in [0, L\varepsilon^{-1}] \tag{18}$$

thay (18) vào (17) và tính đến đẳng thức: $\varepsilon^{-1}[0(\varepsilon)]^2 = (0)\varepsilon$

ta được: $$M[X(t) - \overline{X}(t)]^2 = 0(\varepsilon), \ \varepsilon \to 0 \ \forall t \in [0, L\varepsilon^{-1}] \tag{19}$$

Từ (19) suy ra điều cần phải chứng minh.

Để đơn giản trong khi viết, ta bỏ gạch ngang ở trên u(t) khi cần chúng ta tự hiểu rằng u(t) tìm được từ (11). Như vậy với sai số (tỷ lệ với ε^2) của phương pháp làm cứng, ta có thể thay phương trình (1) bằng phương trình (13). Việc nghiên cứu phương trình (13) rất dễ dàng, thật vậy, kỳ vọng và hàm tương quan có thể viết:

$$m_x(t) = u(t)X_0 + \int_0^t u(t-S)m_f(S)dS \tag{20}$$

$$K_{xx}(t_1, t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} u(t_1 - S_1) K_{ff}(S_1, S_2) u^*(t_2 - S_2) dS_1 dS_2 \tag{21}$$

(Trong trường hợp kỳ vọng của f(t) bằng 0).

Nếu f(t) là ồn trắng có nghĩa là: $K_{ff}(S_1, S_2) = \sigma\delta(S_1 - S_2)$ khi đó (20) và (21) đơn giản thành:

$$m_x(t) = u(t)\, X_0. \tag{20'}$$

$$K_{xx}(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} u(t_1 - s_2)\, \sigma\, u^*(t_2 - s_2)\, dS_2 \tag{21'}$$

Phương trình PPK trong trường hợp này có dạng:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial X_i}(b_{ij} X_j P) - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \sigma_{ij} \frac{\partial^2 P}{\partial X_i \partial X_j} \tag{22}$$

Đối với quá trình dừng, (22) trở thành:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial X_i}\left[b_{ij} X_i P - \frac{1}{2}\sigma_{ij}\frac{\partial P}{\partial X_j}\right] = 0. \qquad (23)$$

Lời giải của (22) hoặc (23) có thể tìm trong [7]. Chúng ta sẽ xét kỹ vấn đề này trong ví dụ sau.

Ví dụ:

Xét phương trình:

$$\ddot{Z} + \omega^2 Z = \varepsilon\omega^2 \int_0^t R(t-s)\, X(s)\, dS + \xi(t) \qquad (24)$$

Nếu đưa (24) về dạng ma trận (1), đặt:

$$X = \begin{pmatrix} Z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z \\ \dot{Z} \end{pmatrix}$$

khi đó:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}; \quad K(t) = \begin{pmatrix} 0 & ; 0 \\ \omega^2 R(t); & 0 \end{pmatrix}; \quad f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi(t) \end{pmatrix} \qquad (25)$$

Đối với ma trận A này H(t) sẽ có dạng:

$$H(t) = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{\omega}\sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \qquad (26)$$

lúc này có thể tính được:

$$\overline{K} = \int_0^\infty K(\sigma) H(-\sigma)\, d\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\omega^2 R_c & -\omega R_s \end{pmatrix} \qquad (27)$$

trong đó: $R_c = \int_0^\infty R(\sigma)\cos\omega\sigma\, d\sigma$; $R_s = \int_0^\infty R(\sigma)\sin\omega\sigma\, d\sigma$

Cuối cùng:

$$B = A + \varepsilon\overline{K} = \begin{pmatrix} 0 & ; & 1 \\ -\omega^2(1-\varepsilon R_c); & & -\varepsilon\omega R_s \end{pmatrix} \qquad (28)$$

Vì vậy phương trình (13) sẽ là:

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2(1-\varepsilon R_c) Z - \varepsilon\omega R_s y + \xi(t) \end{aligned} \qquad (29)$$

Đưa (29) về một phương trình bậc hai:

$$\ddot{Z} + \varepsilon\omega R_s \dot{Z} + \omega^2(1-\varepsilon Re) Z = \xi(t) \qquad (30)$$

Như vậy, bằng phương pháp nêu trên, ta đã thay (23) bằng (29). Trường hợp $\xi(t) = 0$ (tức (23) là phương trình vi tích phân tiền định) ta nhận được kết quả của PHILATOP A.N [4].

Nếu đặt: $\beta = \frac{1}{2}\varepsilon\omega R_s$, $\omega^2(1-\varepsilon R_c) = \omega_1^2$; $\omega_0^2 = \omega_1^2 - \beta^2$

thì nghiệm của (30) sẽ bằng:

$$Z = e^{-\beta t}\left(Z_o \cos\omega_o t + \frac{\dot{Z}_o + Z\beta_o}{\omega_o}\sin\omega_o t\right) + \frac{1}{\omega_o}\int_0^t \xi(s)e^{-\beta(t-s)}\sin\omega_o(t-s)\,ds \quad (31)$$

Từ đây dễ dàng tìm được kỳ vọng và hàm tương quan:

$$m_z(t) = e^{-\beta t}\left(Z_o\cos\omega_o t + \frac{\dot{Z}_o + \beta Z_o}{\omega_o}\sin\omega_o t\right) + \frac{1}{\omega_o}\int_0^t m_\xi(s)e^{-\beta(t-s)}\sin\omega_o(t-s)ds \quad (32)$$

$$K_{zz}(t_1,t_2) = \frac{1}{\omega_0^2}\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_{\xi\xi}(S_1,S_2)e^{-\beta(t_1+t_2-s_1-s_2)}.\sin\omega_o(t_1-s_1)\sin\omega_o(t_2-s_2)ds_1ds_2 \quad (33)$$

thêm vào đó, nếu $\xi(t)$ là ồn trắng (32) và (33) sẽ trở thành:

$$m_z(t) = e^{-\beta t}\left(Z_o\cos\omega_o t + \frac{\dot{Z}_o + \beta Z_o}{\omega_o}\sin\omega_o t\right) \quad (32')$$

$$K_{zz}(t_1,t_2) = \frac{\sigma^2}{\omega_0^2}e^{-\beta(t_1+t_2)}\int_0^{t_2} e^{2\beta s}\sin\omega_o(t_1-s)\sin\omega_o(t_2-s)\,ds \quad (33')$$

Phương sai của Z sẽ tính được bằng:

$$\sigma_z^2(t) = K_{zz}(t,t) = \frac{\sigma^2}{4\beta\omega_1^2}\left[\frac{1}{\omega_o}e^{-2\beta t}\left(\frac{2\beta^2}{\omega_o}\sin^2\omega_o t + \beta\sin 2\omega_o t\right) + (1 - e^{-2\beta t})\right] \quad (34)$$

Trong trường hợp này phương trình PPK có dạng:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(\dot{z}p) - \frac{\partial}{\partial \dot{z}}[(\omega_1^2 z + 2\beta\dot{z})p] - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial \dot{z}^2} \quad (35)$$

Phương trình (35) có nghiệm dừng đối với z(t) là:

$$P(z) = \frac{\omega_1}{\sigma}\sqrt{\frac{2\beta}{\pi}}\exp\left(-2\beta\frac{\omega_1^2 z^2}{\sigma^2}\right) \quad (36)$$

Dễ dàng nhận thấy rằng phương sai, tính được từ (36) trùng với giá trị của (34) khi $t \to \infty$ bằng: $\sigma_z^2 = \frac{\sigma^2}{4\beta\omega_1^2}$.

Chú ý: Phương trình xét trong ví dụ trên tổng quát hơn phương trình được nghiên cứu trong [7]. Trong [7] đòi hỏi $\xi(t)$ có cường độ tỷ lệ với $\sqrt{\varepsilon}$. Mặt khác, phương pháp nghiên cứu ở đây hoàn toàn khác với [7] và kết quả nhận được bằng phương pháp này đơn giản hơn nhiều.

Kết luận: Ý tưởng chủ đạo của các tác giả là: Đưa phương trình vi tích phân ngẫu nhiên về phương trình vi phân ngẫu nhiên. Trong bài báo này ý tưởng trên được thực hiện đối với phương trình vi tích phân ngẫu nhiên tuyến tính và phương pháp đưa phương trình này về phương trình vi phân ngẫu nhiên tuyến tính là một phương pháp gần đúng.

Địa chỉ
Viện Cơ học, Viện KHVN

Nhận ngày 1-7-1979

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ИЛЬЮШИН А.А., ПОбЕДРЯ Б.Е. Основы математической теории термо-вязко-упругости, Москва, 1970.

2. ОГИбАЛОВ П.М., ДОМАКИН В.А., КИШИКИН Б.П. Механика полимеров, МГУ, 1975.

3. БОГОЛЮбОВ Н.Н., МИТРОПОЛЬСКИЙ Ю.А. Асимптотическпе метолы в теории нелинейных колебаний, Москва, 1974.

4. ФИЛАТОВ А.Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, Ташкент, 1974.

5. ГИХМАН И.И. СКОРОХОД А.В. Стохастические дифференциальные уравнения, Москва, 1968.

6. БЫКОВ Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений, фрунзе, 1959.

7. ШЕбЕКО С.А., КОЛТУНОВ М.А., МОРГУНОВ Б.И. Колебание вязкоупругого цилиндра с унругой оболочкой под действием случайных сил, Механика полимеров, N°5-1977.

8. **Nguyễn Đông Anh.** Khảo sát dao động ngẫu nhiên bằng phương pháp phương trình FPK. Tuyển tập các công trình nghiên cứu cơ học, Phòng nghiên cứu cơ học, Hà nội, 1978.

9. **Soong T.T.** Random differential equations in sciens and engineering. New York and London, 1973.

SUMMARY

ON A METHOD FOR INVESTIGATION OF RANDOM OSCILLATIONS OF THE LINEAR VISCO-ELASTIC SYSTEMS

The paper deals with the method for investigation of the random excited integro-differential equations, appeared frequantly in the theory of the visco-elastic systems.

By this method the linear random excited integro-differential equations can be approximated by a linear random excited differential one.

In the case of non-random excited systems the results coincide with the ones obtained by averaging method for the determined integro-differential equations.