Tạp chí CƠ HỌC 1979 số 3 – 4 (trang 12 – 20)

DAO ĐỘNG CƯỠNG BỨC THỨ ĐIỀU HÒA TRONG HỆ CẤP BA

NGUYỄN VĂN ĐẠO

TIẾP theo những nghiên cứu tổng quát về dao động phi tuyến trong hệ cấp ba trước đây [1, 2, 3, 4, 5], trong bài này xét dao động cưỡng bức thứ điều hòa với tần số nhỏ thua tần số ngoại lực một số nguyên lần. Họ nghiệm riêng tuần hoàn phụ thuộc hai thông số được xây dựng bằng phương pháp tiệm cận. Sự ổn định của dao động dừng cũng đã được nghiên cứu.

§1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Qua các bài báo trước [1, 2], chúng ta đã thấy rằng trong hệ á tuyến cấp ba chịu tác dụng của ngoại lực tuần hoàn có cường độ $0(\varepsilon)$, có thể phát sinh dạng dao động cưỡng bức với biên độ bậc 1. Đó là trường hợp cộng hưởng chính, xảy ra khi tần số ngoại lực γ bằng tần số dao động riêng Ω. Dưới đây ta sẽ chứng minh rằng dao động cưỡng bức mạnh (biên độ của nó bằng $o(1)$) trong hệ á tuyến cấp ba có thể xảy ra với tần số dao động riêng cả khi tần số của ngoại lực (có cường độ bậc $o(\varepsilon)$) gần với $n\Omega$, trong đó n là số nguyên nào đó.

Để làm ví dụ ta hãy xét phương trình cấp ba sau đây:

$$\dddot{x} + \xi\ddot{x} + \Omega^2\dot{x} + \xi\Omega^2 x = \varepsilon P_0 \cos\gamma t + \varepsilon p x + \varepsilon q \dot{x} - \varepsilon\beta X^3, \qquad (1.1)$$

trong đó ξ, Ω, P_0, p, q, β là các thông số. Dễ dàng thử lại rằng với những giá trị xác định của các thông số, ở đây tồn tại nghiệm tuần hoàn với tần số bằng một số nguyên lần nhỏ thua γ.

Thực vậy, phương trình (1.1) có nghiệm sau đây:

$$x = a\cos\frac{\gamma}{3}t, \qquad (1.2)$$

với:

$$a = \sqrt[5]{\frac{4P_0}{\beta}},$$

$$\gamma^2 = 9(\Omega^2 - \varepsilon q), \qquad (1.3)$$

$$q = \frac{1}{\xi}\left(p - \frac{3}{4}\beta a^2\right),$$

hoặc
$$x = \sqrt[3]{\frac{4P_o}{\beta}} \cos \frac{\gamma}{3} t, \tag{1.4}$$

$$\gamma^2 = 9\left[\Omega^2 - \frac{\varepsilon}{\xi}\left(p - \frac{3}{4}\sqrt[3]{16\beta P_o^2}\right)\right],$$

$$q = \frac{1}{\xi}\left(p - \frac{3}{4}\sqrt[3]{16\beta P_o^2}\right).$$

§2. ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI CỦA DAO ĐỘNG THUẦN TÚY THỨ ĐIỀU HÒA

Dao động thứ điều hòa được gọi là thuần túy thứ điều hòa nếu khai triển Phuariê của nó không chứa các điều hòa cấp cao. Dao động này có thể biểu diễn chỉ bằng một hàm côsin. Trong trường hợp ngược lại ta có dao động thứ điều hòa hỗn hợp.

Dưới đây sẽ xét xem với những điều kiện nào trong hệ cấp ba dưới tác động của lực điều hòa nhỏ $\varepsilon P_o \cos \gamma t$ có thể xảy ra dao động thuần túy thứ điều hòa với tần số $\frac{\gamma}{n}$ (n là số nguyên).

Ta hãy xuất phát từ phương trình vi phân cấp ba sau đây:

$$\dddot{x} + \xi \ddot{x} = F(x, \dot{x}) + \varepsilon P_o \cos \gamma t. \tag{2.1}$$

Giả thử rằng dao động thuần túy thứ điều hòa có dạng

$$x = a\cos \frac{\gamma}{n} t. \tag{2.2}$$

Rõ ràng là
$$\dddot{x} + \xi \ddot{x} = -\frac{\gamma^2}{n^2}\dot{x} - \xi \frac{\gamma^2}{n^2} x.$$

Do vậy ta có:
$$F(x, \dot{x}) = -\left(\varepsilon P_o \cos \gamma t + \xi \frac{\gamma^2}{n^2} x + \frac{\gamma^2}{n^2}\dot{x}\right). \tag{2.3}$$

Để có sự phụ thuộc của $\cos \gamma t$ theo x ta dùng biểu diễn Sêbưxep [6]

$$\cos \gamma t = T_n\left(\frac{x}{a}\right).$$

Với n lẻ $T_n\left(\frac{x}{a}\right)$ có dạng

$$T_n\left(\frac{x}{a}\right) = c_{1n}\frac{x}{a} + c_{3n}\frac{x^3}{a^3} + c_{5n}\frac{x^5}{a^5} + \dots + c_{nn}\frac{x^n}{a^n}, \tag{2.4}$$

$c_{11} = 1,\ c_{13} = -3,\ c_{33} = 4,\ c_{15} = 5,\ c_{35} = -20,\ c_{55} = 16, \dots$

Biểu thức (2.3) khi đó sẽ là

$$-F(x, \dot{x}) = \frac{\gamma^2}{n^2}\dot{x} + \left(\xi\frac{\gamma^2}{n^2} + \frac{\varepsilon}{a}\cdot c_{1n}\cdot P_o\right)x + \frac{\varepsilon}{a^3}c_{3n}P_o x^3 + \dots +$$
$$+ \frac{\varepsilon}{a^n}c_{nn}P_o x^n. \tag{2.5}$$

Vậy điều kiện cần để có dao động thuần túy thứ điều hòa với tần số $\frac{\gamma}{n}$ là : hàm $F(x, \dot{x})$ trong (2.1) có dạng bậc nhất với $\dot{x}$ và là đa thức gồm toàn số hạng bậc lẻ đối với x.

Ngược trở lại, ta hãy tìm các điều kiện để có dao động thuần túy thứ điều hòa, với tần số $\frac{\gamma}{n}$ khi hàm $F(x, \dot{x})$ có dạng sau đây với n lẻ:

$$-F(x, \dot{x}) = \alpha \dot{x} + b_1 x + b_3 x^3 + b_5 x^5 + \dots + b_n x^n. \tag{2.6}$$

So sánh các hệ số của $x, \dot{x}$ có cùng lũy thừa trong (2.5), (2.6) ta được:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\gamma^2}{n^2}, \\ b_1 &= \xi \frac{\gamma^2}{n^2} + \frac{\varepsilon}{a} c_{1n} P_0, \dots \\ b_3 &= \frac{\varepsilon}{a^3} c_{3n} P_0, \dots \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ta có cả thảy $\frac{1}{2}(n + 3)$ phương trình ràng buộc các hệ số của hàm $F(x, \dot{x})$.

Ví dụ: với $n = 3$ và hàm $F(x, \dot{x})$ có dạng (1.1), nghĩa là $F(x, \dot{x}) = (-\Omega^2 + \varepsilon q)\dot{x} + (-\xi\Omega^2 + \varepsilon p)x - \varepsilon\beta x^3$, các công thức (2.7) sẽ là:

$$\begin{aligned} \Omega^2 - \varepsilon q &= \frac{\gamma^2}{9}, \\ \xi\Omega^2 - \varepsilon p &= \xi \frac{\gamma^2}{9} - \frac{3\varepsilon}{a} P_0, \\ \varepsilon\beta &= 4 \frac{\varepsilon}{a^3} P_0. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ở đây ta có lại kết quả (1.3) — các hệ thức mà những thông số của hệ (1.1) phải thỏa mãn.

Để có dao động thuần túy thứ điều hòa trong trường hợp n chẵn cần có các điều kiện ràng buộc khắt khe hơn đối với các thông số của hệ mô tả bởi phương trình (2.1).

§ 3. DAO ĐỘNG THỨ ĐIỀU HÒA HỖN HỢP

Bây giờ ta xét dao động mô tả bởi phương trình sau đây

$$\dddot{x} + \xi \ddot{x} + \Omega^2 \dot{x} + \xi\Omega^2 x = P\cos n\gamma t + Q\sin n\gamma t + \varepsilon F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t), \tag{3.1}$$

trong đó n là số nguyên, $F(\dot{x}, \ddot{x}, x, t)$ là đa thức của $x, \dot{x}, \ddot{x}$ và là hàm tuần hoàn của t với chu kỳ $\frac{2\pi}{n\gamma}$. Ta tìm điều kiện để trong nghiệm của (3.1) có thành phần điều hòa chu kỳ $\frac{2\pi}{\gamma}$ lớn gấp n lần chu kỳ của ngoại lực.

Dưới đây sẽ xét trường hợp cộng hưởng thứ điều hòa cấp n:

$$\Omega^2 = \gamma^2 + \varepsilon\sigma.$$

Họ nghiệm tuần hoàn hai thông số của (3.1) được biểu diễn nhờ khai triển tiệm cận dưới dạng:

$$x = a\cos(\gamma t + \psi) + M\cos n\gamma t + N\sin n\gamma t + \varepsilon u_1(a, \psi, \gamma t) + \varepsilon^2 u_2(a, \psi, \gamma t) + \ldots, \quad (3.2)$$

trong đó $u_i(a, \psi, \gamma t)$ là những hàm tuần hoàn chu kỳ 2π theo ψ và γt, còn M, N là các hằng số xác định như sau:

$$M = \frac{\xi P - n\gamma Q}{(1-n^2)\gamma^2(\xi^2+n^2\gamma^2)}, \quad N = \frac{n\gamma P + \xi Q}{(1-n^2)\gamma^2(\xi^2+n^2\gamma^2)}. \quad (3.3)$$

Các hàm chưa biết a và ψ là những nghiệm của hệ phương trình

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a, \psi) + \varepsilon^2 A_2(a, \psi) + \ldots,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \varepsilon B_1(a, \psi) + \varepsilon^2 B_2(a, \psi) + \ldots \quad (3.4)$$

Để xác định các hàm $u_i(a, \psi, \gamma t)$, $A_i(a, \psi)$, $B_i(a, \psi)$, trước hết ta thay (3.2), (3.4) vào (3.1) với chú ý rằng

$$\dot{x} = \varepsilon A_1\cos\varphi - aB_1\sin\varphi - a\gamma\sin\varphi - n\gamma M\sin n\gamma t + n\gamma N\cos n\gamma t + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon^2\ldots,$$

$$\ddot{x} = -2\varepsilon\gamma A_1\sin\varphi - 2a\gamma\varepsilon B_1\cos\varphi - a\gamma^2\cos\varphi - n^2\gamma^2 M\cos n\gamma t - n^2\gamma^2 N\sin n\gamma t + \varepsilon\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \varepsilon^2\ldots;$$

$$\dddot{x} = -3\gamma^2\varepsilon A_1\cos\varphi + 3a\gamma^2\varepsilon B_1\sin\varphi + a\gamma^3\sin\varphi + n^3\gamma^3 M\sin n\gamma t - n^3\gamma^3 N\cos n\gamma t + \varepsilon\frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3} + \varepsilon^2\ldots,$$

$$\varphi = \gamma t + \psi.$$

Kết quả ta được:

$$\varepsilon\Big[2\gamma(a\gamma B_1 - \xi A_1)\sin\varphi - 2\gamma(\gamma A_1 + a\xi B_1)\cos\varphi + \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3} + \xi\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \gamma^2\frac{\partial u_1}{\partial t} + \xi\gamma^2 u_1\Big] + \varepsilon^2\ldots =$$

$$= \varepsilon[F(x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, t) - \sigma\dot{x}_0 - \xi\sigma x_0] + \varepsilon^2\ldots, \quad (3.5)$$

Trong đó:

$$x_0 = a\cos\varphi + M\cos n\gamma t + N\sin n\gamma t,$$

$$\dot{x}_0 = -a\gamma\sin\varphi - n\gamma M\sin n\gamma t + n\gamma N\cos n\gamma t, \quad (3.6)$$

$$\ddot{x}_0 = -a\gamma^2\cos\varphi - n^2\gamma^2 M\cos n\gamma t - n^2\gamma^2 N\sin n\gamma t.$$

So sánh các hệ số của ε trong (3.5) sẽ có:

$$2\gamma(a\gamma B_1 - \xi A_1)\sin\varphi - 2\gamma(\gamma A_1 + a\xi B_1)\cos\varphi + \frac{\partial^3 u_1}{\partial t^3} + \xi\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \gamma^2\frac{\partial u_1}{\partial t} + \xi\gamma^2 u_1 =$$

$$= F(x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, t) - \sigma\dot{x}_0 - \xi\sigma x_0 \quad (3.7)$$

Khai triển vế phải của (3.7) thành chuỗi Phuarie

$$F(x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, t) - \sigma\dot{x}_0 - \xi\sigma x_0 = \sum_i (c_i\cos i\varphi + s_i\sin i\varphi) \tag{3.8}$$

và tìm hàm u_1 cũng dưới dạng chuỗi Phuariê:

$$u_1 = \sum_{j\neq 1} (u_j\cos j\varphi + v_j\sin j\varphi). \tag{3.9}$$

Thay thế (3.8), (3.9) vào (3.7) rồi so sánh các hệ số của $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ ta được:

$$\begin{aligned} -2\Upsilon(\Upsilon A_1 + a\xi B_1) &= c_1, \\ 2\Upsilon(a\Upsilon B_1 - \xi A_1) &= s_1. \end{aligned} \tag{3.10}$$

So sánh các hệ số của những hàm điều hòa khác sẽ có:

$$\begin{aligned} \Upsilon^2(1 - j^2)(\xi u_j + j\Upsilon v_j) &= c_j, \\ \Upsilon^2(1 - j^2)(\xi v_j - j\Upsilon u_j) &= s_j, \quad j \neq 1. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Các phương trình (3.10), (3.11) cho ta:

$$A_1 = -\frac{\Upsilon c_1 + \xi s_1}{2\Upsilon(\Upsilon^2 + \xi^2)}, \qquad B_1 = \frac{-\xi c_1 + \Upsilon s_1}{2a\Upsilon(\Upsilon^2 + \xi^2)}, \tag{3.12}$$

$$u_j = \frac{\xi c_j - j\Upsilon s_j}{\Upsilon^2(1 - j^2)(\xi^2 + j^2\Upsilon^2)}, \qquad v_j = \frac{j\Upsilon c_j - \xi s_j}{\Upsilon^2(1 - j^2)(\xi^2 + j^2\Upsilon^2)}, \; (j \neq 1).$$

Vậy là trong xấp xỉ thứ nhất, ta có các phương trình sau đây để xác định biên độ a và pha Ψ của thành phần dao động thứ điều hòa cấp n:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{2\Upsilon(\Upsilon^2 + \xi^2)}(\Upsilon c_1 + \xi s_1), \\ \frac{d\Psi}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2a\Upsilon(\Upsilon^2 + \xi^2)}(-\xi c_1 + \Upsilon s_1). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Nghiệm của phương trình (3.1) trong xấp xỉ thứ nhất là

$$x = a\cos(\Upsilon t + \psi) + M\cos n\Upsilon t + N\sin n\Upsilon t, \tag{3.14}$$

và trong xấp xỉ thứ nhất được hoàn thiện có dạng

$$x = a\cos(\Upsilon t + \Psi) + M\cos n\Upsilon t + N\sin n\Upsilon t + \varepsilon u_1 .$$

hoặc:

$$x = a\cos(\Upsilon t + \Psi) + M\cos n\Upsilon t + N\sin n\Upsilon t + \varepsilon \sum_{j\neq 1} \frac{(\xi c_j - j\Upsilon s_j)\cos j\varphi + (j\Upsilon c_j - \xi s_j)\sin j\varphi}{\Upsilon^2(1 - j^2)(\xi^2 + j^2\Upsilon^2)} \tag{3.15}$$

ở đây a và Ψ được xác định từ hệ phương trình (3.13). Nghiệm dừng $a = a_0 = \text{const}$, $\Psi = \Psi_0 = \text{const}$ của (3.13) được cho bởi các hệ thức (do $\Upsilon^2 + \xi^2 \neq 0$)

$$c_1(a_0, \Psi_0) = s_1(a_0, \Psi_0) = 0 \tag{3.16}$$

§ 4. SỰ ỔN ĐỊNH CỦA DAO ĐỘNG THỨ ĐIỀU HÒA

ọi a_o, ψ_o là nghiệm của hệ phương trình (3.16). Ta đặt trong (3.13):

$$a = a_o + \delta a, \qquad \psi = \psi_o + \delta\psi.$$

au những biến đổi đơn giản sẽ được hệ phương trình biến phân:

$$\frac{d\delta a}{d\tau} = -\left(\Upsilon \frac{\partial c_1}{\partial a_o} + \xi \frac{\partial s_1}{\partial a_o}\right)\delta a - \left(\Upsilon \frac{\partial c_1}{\partial \psi_o} + \xi \frac{\partial s_1}{\partial \psi_o}\right)\delta\psi, \tag{4.1}$$

$$a_0 \frac{d\delta\psi}{d\tau} = \left(-\xi \frac{\partial c_1}{\partial a_o} + \Upsilon \frac{\partial s_1}{\partial a_o}\right)\delta a + \left(-\xi \frac{\partial c_1}{\partial \psi_o} + \Upsilon \frac{\partial s_1}{\partial \psi_o}\right)\delta\psi,$$

$$\tau = \varepsilon t / 2\Upsilon(\Upsilon^2 + \xi^2).$$

ương trình đặc trưng của hệ (4.1) có dạng:

$$a_o\lambda^2 + H\lambda + I = 0, \tag{4.2}$$

ong đó

$$H = \xi \frac{\partial c_1}{\partial \psi_o} - \Upsilon \frac{\partial s_1}{\partial \psi_o} + a_o\left(\Upsilon \frac{\partial c_1}{\partial a_o} + \xi \frac{\partial s_1}{\partial a_o}\right), \tag{4.3}$$

$$I = (\Upsilon^2 + \xi^2)\left(\frac{\partial c_1}{\partial \psi_o} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial a_o} - \frac{\partial c_1}{\partial a_o} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial \psi_o}\right) \tag{4.4}$$

Bây giờ điều kiện ổn định sẽ là:

$$H > 0, \qquad I > 0. \tag{4.5}$$

§ 5 — VÍ DỤ

Ta xét một trường hợp đơn giản của phương trình (3.1)

$$\dddot{x} + \xi \ddot{x} + \Omega^2 \dot{x} + \xi\Omega^2 x = P\cos n\Upsilon t + Q\sin n\Upsilon t - \varepsilon\beta x^3 \tag{5.1}$$

ư vậy $\qquad F(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = -\beta x^3.$

ểu thức (3.8) bây giờ có dạng

$$-\beta x_o^3 - \sigma x_o - \xi\sigma x_o = c_1\cos\varphi + s_1\sin\varphi + \ldots$$

ng đó x_o, $\dot{x}_o$ được thay bằng các hàm (3.6). Từ đây tìm được:

$$c_1 = -a\left[\xi\sigma + \frac{3}{4}\beta a^2 + \frac{3}{2}\beta(M^2 + N^2) + \frac{3}{4}\beta aM\cos 3\psi - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{4}\beta aN\sin 3\psi\right],\ s_1 = -a\left(-\Upsilon\sigma + \frac{3}{4}\beta a \,.\, M\sin 3\psi + \frac{3}{4}\beta aN\cos 3\psi\right) \tag{5.2}$$

Nghiệm dừng được cho bởi hệ phương trình (3.16). Sau khi khử pha ψ_o ra chúng, ta được

$$W(a_o^2, \Upsilon) = 0, \tag{5.3}$$

lây

$$W(a_o^2, \Upsilon) = a_o^2\left[\Upsilon^2\sigma^2 + \frac{9}{16}\beta^2\left(\frac{4\xi\sigma}{3\beta} + a_o^2 + 2D^2\right)^2 - \frac{9}{16}\beta^2 D^2 a_o^2\right] \tag{5.4}$$

$$D^2 = M^2 + N^2$$

Dễ dàng thử lại rằng các biểu thức H (4.3) và I (4.4) trong trường hợp này có dạng

$$H = -3\gamma\beta a_0 (a_0^2 + D^2),$$

$$I = -3a_0(\gamma^2 + \xi^2)\left[\gamma^2\sigma^2 + \frac{9}{16}\beta^2\left(\frac{4}{3\beta}\xi\sigma + a_0^2 + 2D^2\right)\left(\frac{4}{3\beta}\xi\sigma - a_0^2 + 2D^2\right)\right],$$

hoặc

$$I = 3a_0^3(\gamma^2 + \xi^2)\frac{\partial W_1}{\partial a_0^2},$$

$$W_1 = \gamma^2\sigma^2 + \frac{9}{16}\beta^2\left(\frac{4}{3\beta}\xi\sigma + a_0^2 + 2D^2\right)\left(\frac{4\xi\sigma}{3\beta} - a_0^2 + 2D^2\right).$$

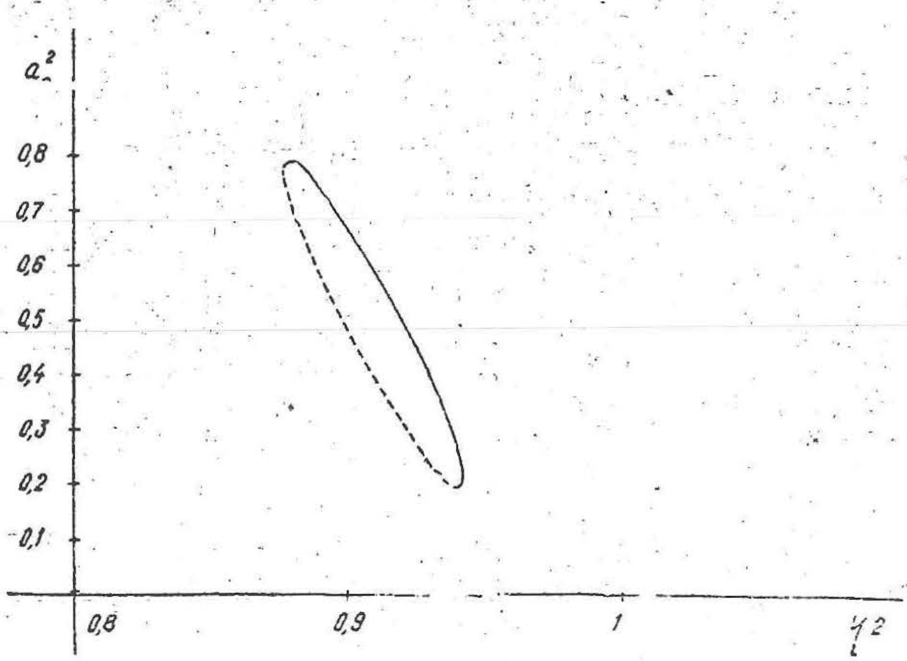
Do vậy điều kiện ổn định của dao động dừng sẽ là

$$\beta < 0, \quad \frac{\partial W_1}{\partial a_0^2} > 0. \tag{5.5}$$

Phương trình (5.3) còn có nghiệm $a_0 = 0$ tương ứng với trạng thái cân bằng $x = \dot{x} = \ddot{x} = 0$. Sự ổn định của nghiệm này được quyết định bởi nghiệm đặc trưng của phương trình biến phân dạng (4.1) với $a_0 = 0$:

$$\frac{d\delta a}{d\tau} = \frac{3}{2}\beta\gamma D^2 \cdot \delta a$$

Từ đây suy ra: nghiệm $a_0 = 0$ ổn định tiệm cận nếu $\beta < 0$ và không ổn định nếu $\beta > 0$.



Trên hình vẽ biểu diễn sự phụ thuộc của biên độ a_o vào tần số Υ của ngoại lực $\left(\eta = \frac{\Upsilon}{\Omega}\right)$ cho trường hợp $\xi^2 = 8$, $\Omega = 1$, $D^2 = 0{,}2$, $\varepsilon\beta = -0{,}42$. Đoạn vẽ đứt nét tương ứng với trạng thái không ổn định của dao động dừng, tại đó điều kiện ổn định thứ hai trong (5.5) không được thỏa mãn. Đường cộng hưởng được dựng nhờ công thức (5.3):

$$\eta^2 = 1 + \frac{3\varepsilon\beta}{4\Omega^2(\Omega^2+\xi^2)}\left[\xi(a_o^2 + 2D^2) \pm \sqrt{\xi^2 D^2 a_o^2 - \Omega^2(a_o^4 + 3D^2 a_o^2 + 4D^4)}\right] \quad (5.6)$$

Ở đây dễ thấy rằng dao động thứ điều hòa chỉ tồn tại khi $\xi^2 - 7\Omega^2 > 0$. Trong trường hợp ngược lại biểu thức dưới căn (5.6) sẽ âm. Đường cộng hưởng có dạng đóng kín. Các giá trị cực đại và cực tiểu của a_o^2 làm triệt tiêu biểu thức dưới căn (5.6):

$$a_{o\max}^2 = \frac{D^2}{2\Omega^2}\left[\xi^2 - 3\Omega^2 + \sqrt{(\xi^2+\Omega^2)(\xi^2 - 7\Omega^2)}\right],$$

$$a_{o\min}^2 = \frac{D^2}{2\Omega^2}\left[\xi^2 - 3\Omega^2 - \sqrt{(\xi^2+\Omega^2)(\xi^2 - 7\Omega^2)}\right]. \quad (5.7)$$

Như vậy cực trị của biên độ dao động thứ điều hòa tỷ lệ với biên độ của ngoại lực kích động.

§ 6. KẾT LUẬN

Trong bài này đã giải quyết được các vấn đề sau:

1. Tìm được các điều kiện (2.5), (2.7) mà hàm $F(x, \dot{x})$ phải thỏa mãn để phương trình (2.1) có nghiệm thuần túy thứ điều hòa lẻ.

2. Dùng phương pháp tiệm cận để xây dựng họ nghiệm riêng tuần hoàn hai thông số (3.2) của phương trình (3.1), trong đó có chứa thành phần thứ điều hòa tần số Υ, nhỏ thua n lần tần số ngoại lực. Các dao động dừng cho bởi công thức (3.14), (3.15) và (3.16).

3. Sự ổn định của dao động dừng được nghiên cứu dựa vào các tiêu chuẩn Liapunôp—Raoxơ—Huyêcvit. Nói chung, các điều kiện ổn định (4.5) dẫn đến những kết quả khác với các trường hợp tương ứng trong hệ cấp hai. Chẳng hạn ở ví dụ đơn giản của mục 5, ta thấy dao động thứ điều hòa chỉ tồn tại trong các hệ phi tuyến «mềm» ($\beta < 0$). Vấn đề này ta cũng đã gặp trước đây khi xét cộng hưởng chính [5].

Địa chỉ
Viện Cơ học Viện KHVN

Nhận ngày 12-2-1979

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Nguyễn Văn Đạo**. Non-linear Oscillations of third order Systems, Proceedings of VIII international conference on non-linear Oscillations, Prague, 1979.

2. **Nguyễn Văn Đạo**. Dao động cưỡng bức trong hệ phi tuyến cấp ba có tự kích thích, Tuyển tập các công trình nghiên cứu Cơ học, Viện khoa học V.N. xuất bản, 1978.

3. **Nguyễn Văn Đạo**. Dao động thông số trong hệ cấp ba dưới ảnh hưởng của ma sát phi tuyến, Tạp chí khoa học kỹ thuật, 5-1978, Viện K.H.V.N. xuất bản.

4. **Nguyễn Văn Đạo**. Dao động thông số trong hệ phi tuyến cấp ba, Tạp chí Toán học, 1-1979, Viện K.H.V.N. xuất bản.

5. **Nguyễn Văn Đạo**. Dao động tự kích thích trong hệ á tuyến cấp ba, Tập san khoa học kỹ thuật, 1+2-1979, Viện K.H.V.N. xuất bản.

6. **Kauderer H.** Nichtlinear Mechanik, Berlin, 1958.

SUMMARY

SUBHARMONIC OSCILLATION IN THIRD ORDER NON-LINEAR SYSTEMS

In this paper the subharmonic oscillation with frequency n times smaller than that of exciting force is considered. The first paragraph is devoted to the formulation of problem. Here an example of third order equation in which there exists pure subharmonic solution is given.

In the second paragraph the condition (2.5), (2.7) for the existence of pure odd subharmonic oscillation in the dynamical system governed by equation (2.1) are delived.

The mixed subharmonic oscillation is studied in the third paragraph. The family of two parameters solutions (3.2) of equation (3.1) with subharmonic term is found by means of asymptotic method. The stationary oscillations are given by formulae (3.14)—(3.16).

The stability of subharmonic oscillation is studied by Liapunov—Routh—Hurwitz criterium in the fourth paragraph. In general, the stability conditions (4.5) lead to the results which are different from those in second order system.

To illustrate the presented method a concrete example has been analysed in the fifth paragraph.