Tạp chí CƠ HỌC 1979 số 3–4 (trang 1–11)

VỀ CƠ SỞ CỦA PHƯƠNG PHÁP GIẢ ĐỊNH CHUẨN TRONG LÝ THUYẾT DAO ĐỘNG NGẪU NHIÊN

NGUYỄN CAO MỆNH

CHO đến nay phương pháp « Giả định chuẩn » được dùng khảo sát những hệ phi tuyến yếu, một bậc tự do chịu tác dụng của quá trình ngẫu nhiên chuẩn [1,2]. Nội dung chính của phương pháp này là, nếu quá trình vào là chuẩn thì, đối với hệ phi tuyến yếu, quá trình ra được giả thiết là chuẩn với giá trị trung bình và hàm tương quan bậc hai cần tìm. Từ đó lập được hệ phương trình kín để xác định các đại lượng ấy. Với các ví dụ bằng số người ta thấy rằng phương pháp này đưa đến kết quả khá gần với kết quả thu được bởi mô hình.

Tuy nhiên chưa có tài liệu nào chứng minh cơ sở toán học của phương pháp « giả định chuẩn » và đánh giá một cách tổng quát độ chính xác của phương pháp ấy.

Trong bài này chúng tôi sẽ đề cập đến các vấn đề trên.

§1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM VA NHẬN XÉT

Cho quá trình ngẫu nhiên X(t) và n thời điểm $t_1, t_2, \ldots, t_n$ bất kỳ, người ta định nghĩa hàm đặc trưng bậc n của quá trình ngẫu nhiên X(t) là hàm số sau đây

$$\varphi_n(u_1, \ldots, u_n; t_1, \ldots, t_n) = \langle \exp \{ i \sum_{j=1}^{n} u_j X(t_j) \} \rangle \tag{1.1}$$

trong đó ký hiệu $\langle \ldots \rangle$ chỉ phép lấy trung bình theo xác suất. Nếu ký hiệu

$$m_s(t_1, \ldots, t_s) = \langle X(t_1) \ldots X(t_s) \rangle \tag{1.2}$$

là mô men hỗn hợp s biến ngẫu nhiên $X(t_1), \ldots, X(t_s)$, công thức (1.1) có thể viết dưới dạng

$$\varphi_n(u_1, \ldots, u_n; t_1, \ldots, t_n) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{\alpha_1, \ldots, \omega=1}^{n} m_s(t_\alpha, \ldots, t_\omega) u_\alpha \ldots u_\omega \tag{1.3}$$

Ta sẽ dùng khái niệm hàm tương quan bậc n như sau [3].

Hàm tương quan bậc n của quá trình ngẫu nhiên X(t) tại n thời điểm $t_1, t_2, \ldots, t_n$ bất kỳ là đại lượng $k_n(t_1, \ldots, t_n)$ mô tả sự liên hệ thống kê của các biến ngẫu nhiên $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ và đại lượng này sẽ triệt tiêu nếu dù chỉ một trong số các biến ngẫu nhiên độc lập đối với các biến còn lại.

Dùng khái niệm này, hàm đặc trưng (1.1) có thể viết dưới dạng [3]

$$\varphi_n(u_1, \ldots, u_n; t_1, \ldots, t_n) = \exp\left\{\sum_{s=1}^{\infty} \frac{i^s}{s!} \sum_{\alpha, \ldots, \omega=1}^{n} k_s(t_\alpha, \ldots, t_\omega) u_\alpha \ldots u_\omega\right\} \quad (1.4)$$

So sánh (1.3) và (1.4) ta tìm được mối liên hệ giữa mô men và hàm tương quan

$$\begin{aligned}
m_1(t_1) &= k_1(t_1) \\
m_2(t_1, t_2) &= k_2(t_1, t_2) + k_1(t_1)\, k_1(t_2) \\
m_3(t_1, t_2, t_3) &= k_3(t_1, t_2, t_3) + 3\,\{k_1(t_1)\, k_2(t_2, t_3)\}_s + k_1(t_1)\, k_1(t_2)\, k_1(t_3) \\
m_4(t_1, t_2, t_3, t_4) &= k_4(t_1, t_2, t_3, t_4) + 3\,\{k_2(t_1, t_2)\, k_2(t_3, t_4)\}_s + \\
&\quad + 4\,\{k_1(t_1)\, k_3(t_2, t_3, t_4)\}_s + 6\,\{k_1(t_1)\, k_1(t_2)\, k_2(t_3, t_4)\}_s \\
&\quad + k_1(t_1)\, k_1(t_2)\, k_1(t_3)\, k_1(t_4)
\end{aligned} \quad (1.5)$$

. . . .

Ở đây ký hiệu $\{\ldots\}_s$ là phép tính đối xứng của các hàm trong ngoặc đối với tất cả các đối số của nó, những số hạng trùng nhau chỉ lấy một lần, sau đó chia cho số các số hạng khác nhau.

Nếu $X^o(t)$ là quá trình ngẫu nhiên chuẩn có cùng giá trị trung bình và hàm tương quan bậc hai như quá trình ngẫu nhiên X(t) khi đó hàm đặc trưng $\varphi_n^o(u_1, \ldots, u_n; t_1, \ldots, t_n)$ của X(t) sẽ có dạng:

$$\varphi_n^o(u_1, \ldots, u_n; t_1, \ldots, t_n) = \exp\left\{i \sum_{j=1}^{n} k_1(t_j) u_j - \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{n} k_2(t_j, t_l) u_j u_l\right\} \quad (1.6)$$

Như vậy, *đối với quá trình ngẫu nhiên chuẩn, các hàm tương quan bậc s ($s \geqslant 3$) sẽ bằng không.*

Ta cũng sẽ dùng khái niệm hàm tựa mô men $b_s(t_1, \ldots, t_s)$ xác định bởi đẳng thức sau

$$\exp\left\{\sum_{s=3}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{\alpha, \ldots, \omega=1}^{n} k_s(t_\alpha, \ldots, t_\omega) z_\alpha \ldots z_\omega\right\} = 1 + \sum_{s=3}^{\infty} \frac{1}{s!} \sum_{\alpha, \ldots, \omega=1}^{n} b_s(t_\alpha, \ldots, t_\omega)\, z_\alpha \ldots z_\omega \quad (1.7)$$

Hệ thức này cho ta mối liên hệ giữa hàm tương quan và hàm tựa mô men. Cụ thể là, các hàm tựa mô men b_3, b_4, b_5 trùng với các hàm tương quan, bắt đầu từ b_6 trở đi mới khác hàm tương quan.

$$\begin{aligned}
b_3 &= k_3, \quad b_4 = k_4, \quad b_5 = k_5 \\
b_6 &= k_6 + 10\,\{k_3\, k_3\}_s \\
b_7 &= k_7 + 35\,\{k_3\, k_4\}_s
\end{aligned} \quad (1.8)$$

. . . .

Ở đây ký hiệu $\{ - \}_s$ cũng là phép tính đối xứng

Rõ ràng rằng đối với các quá trình ngẫu nhiên chuẩn, các hàm tựa mômen đều bằng không.

Giả sử hàm mật độ phân bố n chiều của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ là $W_n(x_1,\dots, x_n; t_1,\dots, t_n)$ và hàm mật độ phân bố của quá trình ngẫu nhiên chuẩn tương ứng là $W_n^0(x_1,\dots,x_n; t_1,\dots, t_n)$. Sau khi đưa vào khái niệm hàm tựa mômen, ta có thể biểu diễn hàm mật độ phân bố n chiều qua hàm đặc trưng và từ hàm đặc trưng qua hàm tựa mômen, ta nhận được:

$$W_n(x_1,\dots, x_n; t_1,\dots, t_n) = W_n^0(x_1,\dots, x_n; t_1,\dots, t_n) - $$

$$-\frac{1}{3!}\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{n} b_3(t_\alpha, t_\beta, t_\gamma)\frac{\partial^3 W_n^0}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} + \dots \tag{1.9}$$

Trong trường hợp một chiều

$$W(x,t) = W^0(x,t) - \frac{b_3(t)}{3!}\cdot\frac{d^3W^0(x,t)}{dx^3} + \frac{b_4(t)}{4!}\,\frac{d^4W^0(x,t)}{dx^4}\dots \tag{1.10}$$

Từ các công thức (1.9) và (1.10) ta thấy rằng ta có thể khai triển hàm mật độ phân bố của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ bất kỳ qua hàm mật độ phân bố của quá trình ngẫu nhiên chuẩn tương ứng và các đạo hàm của nó, quá trình ngẫu nhiên chuẩn có cùng giá trị trung bình và hàm tương quan bậc hai với quá trình $X(t)$. Các hệ số $b_s(t_\alpha,\dots, t_\omega)$ phụ thuộc vào các mômen bậc không lớn hơn s của $X(t)$.

Như vậy, về mặt hình thức, để tìm hàm mật độ phân bố, ta có thể tìm giá trị xấp xỉ của nó bằng cách lấy một số thành phần trong chuỗi khai triển của nó theo hàm mật độ phân bố chuẩn tương ứng.

§2. ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

Xét phương trình chuyển động cho bởi dạng

$$\ddot{X} + 2h\dot{X} + \omega^2 X + \varepsilon F(X, \dot{X}) = \xi(t) \tag{2.1}$$

trong đó h, ω là các hằng số, ε là tham số bé, $\xi(t)$ là quá trình ngẫu nhiên chuẩn

$$\langle \xi(t)\rangle = m(t), \ \langle [\xi(t_1) - m(t_1)][\xi(t_2) - m(t_2)]\rangle = k(t_1, t_2) \tag{2.2}$$

Các điều kiện ban đầu là

$$X(0) = \dot{X}(0) = 0 \tag{2.3}$$

Vấn đề đặt ra là với điều kiện nào ta có thể xấp xỉ hàm mật độ phân bố của $X(t)$, thỏa mãn (2.1), (2.3) bởi hàm mật độ phân bố chuẩn, và bằng cách xấp xỉ như vậy ta đã phạm phải sai số như thế nào.

Phương trình (2.1) – (2.3) tương ứng với phương trình tích phân sau đây

$$X(t) = \int_0^t K(t-\tau)\xi(\tau)\,d\tau - \varepsilon \int_0^t K(t-\tau)\,F[X(\tau), \dot{X}(\tau)]\,d\tau \tag{2.4}$$

trong đó

$$K(u) = \frac{1}{\lambda} e^{-hu} \sin \lambda u, \quad \lambda = \sqrt{\omega^2 - h^2}$$

Từ (2.4) ta suy ra

$$m_1(t) = \langle X(t)\rangle = \int_0^t K(t-\tau)\,\langle \xi(\tau)\rangle\,d\tau - \varepsilon \int_0^t K(t-\tau)\,\langle F[X(\tau), \dot{X}(\tau)]\rangle\,d\tau \tag{2.5}$$

Trong công thức này, nếu $F(X, \dot{X})$ có khai triển theo X và $\dot{X}$ bậc lớn hơn một và mômen bậc cao của các quá trình ngẫu nhiên này hữu hạn thì $m_1(t)$ phụ thuộc yếu vào mômen bậc cao khi ε nhỏ. Đầu tiên ta chứng minh bổ đề sau đây.

Bổ đề. *Mômen bậc n của các biến ngẫu nhiên $X(t_1), \ldots, X(t_n)$ của quá trình $X(t)$ thỏa mãn phương trình (2.1) – (2.3) tìm được theo công thức sau đây*

$$\langle X(t_1)\ldots X(t_n)\rangle = \int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_n} K(t_1-u_1)\ldots K(t_n-u_n)\,\langle \xi(u_1)\ldots\xi(u_n)\rangle\,du_1\ldots du_n$$

$$-\varepsilon \int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_n} K(t_1-u_1)\ldots K(t_n-u_n)\,\langle F(u_n)\,\xi(u_1)\ldots\xi(u_{n-1})\rangle\,du_1\ldots du_n$$

$$-\varepsilon \int_0^{t_1}\ldots\int_0^{t_{n-1}} K(t_1-u_1)\ldots K(t_{n-1}-u_{n-1})\,\langle F(u_{n-1})X(t_n)\xi(u_1)\ldots\xi(u_{n-2})\rangle\,du_1\ldots du_{n-1}$$

. . . .

$$-\varepsilon \int_0^{t_1} K(t_1-u_1)\,\langle F(u_1)\,X(t_2)\ldots X(t_n)\rangle\,du_1 \tag{2.6}$$

trong đó $F(u) = F[X(u), \dot{X}(u)]$

Chứng minh. Ta dùng phương pháp quy nạp. Rõ ràng rằng công thức này đúng cho trường hợp $n = 1$ (công thức (2.5)). Giả sử công thức (2.6) đúng cho n, ta sẽ chứng minh công thức này đúng cho $n+1$. Bỏ dấu trung bình trong (2.6), nhân hai vế với $X(t_{n+1})$ sau đó lại lấy trung bình hai vế, ta tìm được:

$$\langle X(t_1)\dots X(t_{n+1})\rangle = \int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_n}\prod_{j=1}^{n}K(t_j-u_j)\,\langle\xi(u_1)\dots\xi(u_n)X(t_{n+1})\rangle\,du_1\dots du_n$$

$$-\varepsilon\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_n}\prod_{j=1}^{n}K(t_j-u_j)\,\langle F(u_n)\xi(u_1)\dots\xi(u_{n-1})X(t_{n+1})\rangle\,du_1\dots du_n$$

$$-\varepsilon\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_n}\prod_{j=1}^{n-1}K(t_j-u_j)\,\langle F(u_{n-1})X(t_n)X(t_{n+1})\xi(u_1)\dots\xi(u_{n-2})\rangle\,du_1\dots du_{n-1}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$-\varepsilon\int_0^{t_1}K(t_1-u_1)\,\langle F(u_1)X(t_2)\dots X(t_n)X(t_{n+1})\rangle\,du_1. \tag{2.7}$$

Ta viết lại công thức (2.4) như sau

$$X(t_{n+1}) = \int_0^{t_{n+1}}K(t_{n+1}-u_{n+1})\xi(u_{n+1})du_{n+1} - \varepsilon\int_0^{t_{n+1}}K(t_{n+1}-u_{n+1})F(u_{n+1})du_{n+1} \tag{2.8}$$

Nhân hai vế (2.8) với $\xi(u_1)\dots\xi(u_n)$ và lấy trung bình hai vế ta có

$$\langle\xi(u_1)\dots\xi(u_n)X(t_{n+1})\rangle = \int_0^{t_{n+1}}K(t_{n+1}-u_{n+1})\,\langle\xi(u_1)\dots\xi(u_{n+1})\rangle du_{n+1} -$$

$$-\varepsilon\int_0^{t_{n+1}}K(t_{n+1}-u_{n+1})\,\langle F(u_{n+1})\xi(u_1)\dots\xi(u_n)\rangle du_{n+1}, \tag{2.9}$$

Thay (2.9) vào (2.7) ta tìm được

$$\langle X(t_1)\dots X(t_{n+1})\rangle = \int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_{n+1}}\prod_{j=1}^{n+1}K(t_j-u_j)\,\langle\xi(u_1)\dots\xi(u_{n+1})\rangle du_1\dots du_{n+1}$$

$$-\varepsilon\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_{n+1}}\prod_{j=1}^{n+1}K(t_j-u_j)\,\langle F(u_{n+1})\xi(u_1)\dots\xi(u_n)\rangle du_1\dots du_{n+1}$$

$$-\varepsilon\int_0^{t_1}\dots\int_0^{t_n}\prod_{j=1}^{n}K(t_j-u_j)\,\langle F(u_n)\xi(u_1)\dots\xi(u_{n-1})X(t_{n+1})\rangle du_1\dots du_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$-\varepsilon\int_0^{t_1}K(t_1-u_1)\,\langle F(u_1)X(t_2)\dots X(t_{n+1})\rangle du_1 \tag{2.10}$$

Công thức (2.10) có dạng giống như (2.6) đối với trường hợp mômen bậc $n+1$. Bổ đề được chứng minh.

Định lý

Cho hệ (2.1). Nếu mômen hỗn hợp của các quá trình $X(t)$, $\dot{X}(t)$, $\xi(t)$ lấy giá trị hữu hạn, thì hàm tựa mômen $b_s(t_1, \ldots, t_s)$ của quá trình $X(t)$ có bậc nhỏ ε.

Chứng minh: Ta biết rằng các hàm tựa mômen b_s biểu diễn qua các hàm tương quan $k_s (s \geqslant 3)$, nên để chứng minh định lý này, đầu tiên ta sẽ chỉ ra rằng các hàm tương quan $k_s (s \geqslant 3)$ có bậc ε.

Từ công thức (1.5) giải ngược lại ta tìm được biểu diễn của các hàm tương quan qua các hàm mômen.

$$k_1(t_1) = m_1(t_1)$$

$$k_2(t_1, t_2) = m_2(t_1, t_2) - m_1(t_1)m_1(t_2)$$

$$k_3(t_1, t_2, t_3) = m_3(t_1, t_2, t_3) - 3\{m_1(t_1)m_2(t_2, t_3)\}_s + 2m_1(t_1)m_1(t_2)m_1(t_3)$$

$$\begin{aligned} k_4(t_1, t_2, t_3, t_4) = {} & m_4(t_1, t_2, t_3, t_4) - 3\{m_2(t_1, t_2)m_2(t_3, t_4)\}_s \\ & - 4\{m_1(t_1)m_3(t_2, t_3, t_4)\}_s + 12\{m_1(t_1)m_1(t_2)m_2(t_3, t_4)\}_s \\ & - 6m_1(t_1)m_1(t_2)m_1(t_3)m_1(t_4) \end{aligned} \tag{2.11}$$

. . . .

Theo công thức (2.6) ta có

$$m_1(t_1) = \int_0^{t_1} K(t_1-u_1)\langle\xi(u_1)\rangle du_1 - \varepsilon\int_0^{t_1} K(t_1-u_1)\langle F(u_1)\rangle du_1 \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} m_2(t_2, t_3) = {} & \int_0^{t_2}\int_0^{t_3} K(t_2-u_2)K(t_3-u_3)\langle\xi(u_2)\xi(u_3)\rangle du_2 du_3 \\ & - \varepsilon\int_0^{t_2}\int_0^{t_3} K(t_2-u_2)K(t_3-u_3)\langle F(u_3)\xi(u_2)\rangle du_2 du_3 \\ & - \varepsilon\int_0^{t_2} K(t_2-u_2)\langle F(u_2)X(t_3)\rangle du_2 \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} m_3(t_1, t_2, t_3) = {} & \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\int_0^{t_3} K(t_1-u_1)K(t_2-u_2)K(t_3-u_3)\langle\xi(u_1)\xi(u_2)\xi(u_3)\rangle du_1 du_2 du_3 \\ & - \varepsilon\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\int_0^{t_3} K(t_1-u_1)K(t_2-u_2)K(t_3-u_3)\langle F(u_3)\xi(u_1)\xi(u_2)\rangle du_1 du_2 du_3 - \end{aligned}$$

$$-\varepsilon\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K(t_1-u_1)K(t_2-u_2)\,\langle F(u_2)X(t_3)\xi(u_1)\rangle du_1du_2$$

$$-\varepsilon\int_0^{t_1} K(t_1-u_1)\,\langle F(u_1)X(t_2)X(t_3)\rangle du_1 \qquad (2.14)$$

Thay các giá trị (2.12), (2.13) và (2.14) vào $k_3(t_1, t_2, t_3)$ trong công thức (2.11) ta nhận được

$$k_3(t_1, t_2, t_3) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\int_0^{t_3} K(t_1-u_1)K(t_2-u_2)K(t_3-u_3)\,\langle\xi(u_1)\xi(u_2)\xi(u_3)\rangle du_1du_2du_3$$

$$-3\left\{\left[\int_0^{t_1} K(t_1-u_1)\,\langle\xi(u_1)\rangle du_1\right]\left[\int_0^{t_2}\int_0^{t_3} K(t_2-u_2)K(t_3-u_3)\,\langle\xi(u_2)\xi(u_3)\rangle du_2du_3\right]\right\}_s$$

$$+2\left[\int_0^{t_1} K(t_1-u_1)\,\langle\xi(u_1)\rangle du_1\right]\left[\int_0^{t_2} K(t_2-u_2)\,\langle\xi(u_2)\rangle du_2\right]\left[\int_0^{t_3} K(t_3-u_3)\,\langle\xi(u_3)\rangle du_3\right]+$$

$$+\,0(\varepsilon) \qquad (2.15)$$

trong đó $0(\varepsilon)$ là đại lượng nhỏ bậc ε.

Công thức (2.15) có thể biến đổi về dạng

$$k_3(t_1, t_2, t_3) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\int_0^{t_3} K(t_1-u_1)K(t_2-u_2)K(t_3-u_3)[\langle\xi(u_1)\xi(u_2)\xi(u_3)\rangle -$$

$$-3\{\langle\xi(u_1)\rangle\langle\xi(u_2)\xi(u_3)\rangle\}_s + 2\langle\xi(u_1)\rangle\langle\xi(u_2)\rangle\langle\xi(u_3)\rangle]\,du_1du_2du_3 + 0(\varepsilon) \qquad (2.16)$$

Trong tích phân trên biểu thức trong dấu móc [...] chính là hàm tương quan $k_3^{\xi}(t_1, t_2, t_3)$ của quá trình chuẩn $\xi(t)$ nên đại lượng này bằng không. Do đó:

$$k_3(t_1, t_2, t_3) = 0(\varepsilon) \qquad (2.17)$$

Biểu thức này chứng tỏ rằng hàm tương quan bậc ba là đại lượng cùng bậc với ε.

Trong công thức (2.6), ta để ý rằng mômen bậc n của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ sẽ được biểu diễn dưới dạng tích phân mômen bậc n của quá trình ngẫu nhiên chuẩn $\xi(t)$, còn các thành phần khác có bậc nhỏ ε. Mặt khác trong công thức (2.11) biểu diễn hàm tương quan mômen, ta thấy rằng, ở mỗi số hạng tổng các bậc của mômen đúng bằng bậc của hàm tương quan. Vì những lý do đó, hàm tương quan bậc $r (r \geqslant 3)$ của quá trình ngẫu nhiên $X(t)$ sẽ biểu diễn qua tích phân hàm tương quan bậc r của quá trình ngẫu nhiên chuẩn

$\xi(t)$ cộng với đại lượng bậc ε. Vì $k_r^{\xi}(t_1, \ldots, t_r) = 0 (r \geqslant 3)$ nên từ đó suy ra

$$k_r(t_1, \ldots, t_r) = 0(\varepsilon) \quad (r \geqslant 3) \tag{2.18}$$

Từ mối liên hệ (1.8) giữa hàm tựa mômen và hàm tương quan, ta suy ra

$$b_s(t_1, \ldots, t_s) = 0(\varepsilon) \quad (s \geqslant 3) \tag{2.19}$$

Đó là điều cần phải chứng minh.

§ 3. ĐÁNH GIÁ SAI SỐ CỦA KỲ VỌNG VÀ HÀM TƯƠNG QUAN BẬC HAI TÌM ĐƯỢC THEO PHƯƠNG PHÁP GIẢ ĐỊNH CHUẨN

Ta biết rằng khi dùng phương pháp giả định chuẩn ta sẽ tìm được giá trị trung bình và hàm tương quan bậc hai của quá trình nghiệm. Trong phần này ta chứng minh định lý đánh giá sai số của các đại lượng ấy và xem như hệ quả của định lý cơ bản.

Xét phương trình

$$\ddot{X} + 2h\dot{X} + \omega^2 X + \varepsilon F(X) = \xi(t) \tag{2.1'}$$

trong đó $F(X)$ là đa thức có bậc thấp nhất không nhỏ hơn 2.

Ta có định lý sau:

Định lý. *Giá trị trung bình và hàm tương quan bậc hai của quá trình nghiệm của phương trình (2.1'), tìm được theo phương pháp « giả định chuẩn » là những đại lượng gần đúng bậc hai đối với tham số bé ε.*

Chứng minh. Để cho quá trình chứng minh được rõ ràng và dễ hiểu, ta xét trường hợp đặc biệt khi $F(X)$ có dạng

$$F(X) = X^3 \tag{3.1}$$

Khi đó theo công thức (2.6) ta tìm được

$$\langle X(t) \rangle = \int_0^t K(t-u) \langle \xi(u) \rangle du - \varepsilon \int_0^t K(t-u) \langle X^3(u) \rangle du \tag{3.2}$$

$$\langle X(t_1) X(t_2) \rangle = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K(t_1 - u_1) K(t_2 - u_2) \langle \xi(u_1) \xi(u_2) \rangle du_1 du_2$$

$$- \varepsilon \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K(t_1 - u_1) K(t_2 - u_2) \langle X^3(u_2) \xi(u_1) \rangle du_1 du_2$$

$$- \varepsilon \int_0^{t_1} K(t_1 - u_1) \langle X^3(u_1) X(t_2) \rangle du_1 \tag{3.3}$$

Theo định lý cơ bản hàm mật độ phân bố xác suất có dạng

$$W_1(x; t) = W_1^0(x; t) + \varepsilon q_1(x; t, \varepsilon) \tag{3.4}$$

$$W_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = W_2^0(x_1, x_2; t_1, t_2) + \varepsilon q_2(x_1, x_2; t_1, t_2, \varepsilon) \tag{3.5}$$

trong đó

$$\varepsilon q_1(x;\ t,\ \varepsilon) = -\frac{b_3(t)}{3!}\,\frac{d^3W_1^o(x;\ t)}{dx^3} + \dots ;$$

$$\varepsilon q_2(x_1, x_2;\ t_1, t_2, \varepsilon) = -\frac{b_3(t_1, t_1, t_1)}{3!}\,\frac{\partial^3 W_2^o}{\partial x_1^3} + \dots$$

Từ đó trong công thức (3.2) ta tính được

$$\langle X^3(u)\rangle = 3k_2(u,u)\,m_1(u) + m_1^3(u) + \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} x^3 q_1(x;\ u,\ \varepsilon)\,dx \tag{3.6}$$

Thay (3.6) vào (3.2) ta nhận được hệ thức sau đây

$$\langle X(t)\rangle = \int_0^t K(t-u)\left\{m(u) - \varepsilon[3k_2(u,u) + m_1^2(u)]m_1(u)\right\} \times$$

$$\times\, du - \varepsilon^2\int_0^t K(t-u)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x^3 q_1(x;\ u,\ \varepsilon)\right] du \tag{3.7}$$

Khi dùng phương pháp giả định chuẩn, trong biểu thức hàm mật độ phân bố xác suất ta bỏ qua thành phần $q_1(x,\ u,\ \varepsilon)$ do đó ta tìm giá trị trung bình của $X(t)$ theo công thức

$$\langle X(t)\rangle = \int_0^t K(t-u)\left\{m(u) - \varepsilon[3k_2(u,u) + m_1^3(u)]m_1(u)\right\} du \tag{3.8}$$

và như vậy ta đã bỏ đi thành phần nhỏ bậc hai đối với ε. Bây giờ ta chuyển sang khảo sát công thức (3.3).

Theo công thức (2.6) ta có biểu thức đối với $X^3(u_2)$, từ đó ta tìm được

$$\langle \xi(u_1)\,X^3(u_2)\rangle = \int_0^{u_2}\int_0^{u_2}\int_0^{u_2} K(u_2-\tau_1)\,K(u_2-\tau_2)\,K(u_2-\tau_3)\,\langle \xi(\tau_1)\,\xi(\tau_2)\,\xi(\tau_3)\,\xi(u_1)\rangle\, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3$$

$$+\ \varepsilon R_1(u_1,\ u_2)\ . \tag{3.9}$$

Ta cũng có thể dễ dàng viết được biểu thức của $\langle X^3(u_1)\,X(t_2)\rangle$

$$\langle X^3(u_1)\,X(t_2)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1^3\,x_2\,W_2^o(x_1, x_2;\ u_1, t_2)\,dx_1\,dx_2 + \varepsilon R_2(u_1;\ t_2) \tag{3.10}$$

trong đó

$$R_1(u_1, u_2) = -\int_0^{u_2}\int_0^{u_2}\int_0^{u_2} K(u_2-\tau_1)\, K(u_2-\tau_2)\, K(u_2-\tau_3)\, \langle X^3(\tau_3)\, \xi(\tau_1)\, \xi(\tau_2)\, \xi(u_1)\rangle\, d\tau_1\, d\tau_2\, d\tau_3$$

$$-\int_0^{u_2}\int_0^{u_2} K(u_2-\tau_1)\, K(u_2-\tau_2)\, \langle X^3(\tau_2)\, \xi(\tau_1)\, \xi(u_1)\, X(u_2)\rangle\, d\tau_1\, d\tau_2$$

$$-\int_0^{u_2} K(u_2-\tau_1)\, \langle X^3(\tau_1)\, X(u_2)\, X(u_2)\, \xi(u_1)\rangle\, d\tau_1$$

$$R_2(u_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1^3 x_2\, q_2(x_1, x_2; u_1, t_2, \varepsilon)\, dx_1 dx_2 .$$

Thay (3.9), (3.10) vào (3.3) ta tìm được

$$\langle X(t_1)\, X(t_2)\rangle = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K(t_1-u_1)\, K(t_2-u_2)\, \langle \xi(u_1)\, \xi(u_2)\rangle\, du_1 du_2$$

$$-\varepsilon \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K(t_1-u_1)K(t_2-u_2)\Big[\int_0^{u_2}\int_0^{u_2}\int_0^{u_2} K(u_2-\tau_1)\, K(u_2-\tau_2)\, K(u_2-\tau_3)\, \times$$

$$\times\, \langle \xi(\tau_1)\xi(\tau_2)\xi(\tau_3)\xi(u_1)\rangle d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3\Big]\, du_1\, du_2 -$$

$$-\varepsilon \int_0^{t_1} K(t_1-u_1)\Big[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1^3 x_2\, W_2^0(x_1, x_2; u_1, t_2)\, dx_1\, dx_2\Big]\, du_1 + \varepsilon^2 R(t_1, t_2) \qquad (3.11)$$

Khi dùng phương pháp giả định chuẩn ta sẽ bỏ thành phần $R(t_1, t_2)$ do đó ta tìm được mômen bậc hai của $X(t)$ chính xác đến đại lượng nhỏ bậc hai đối với ε. Vì theo công thức (2.11) hàm tương quan bậc hai biểu diễn dưới dạng

$$k_2(t_1, t_2) = m_2(t_1, t_2) - m_1(t_1)\, m_1(t_2)$$

nên độ chính xác tìm được đối với $k_2(t_1, t_2)$ cũng là độ chính xác đến ε^2. Đối với hàm $F(X)$ tổng quát, việc tính toán phức tạp hơn, nhưng cũng dẫn đến kết quả tương tự. Định lý được chứng minh.

§ 4. KẾT LUẬN

Dựa vào những kết quả đã thu được ở trên, ta có một số nhận xét sau đây đối với phương pháp «giả định chuẩn»:

1) Phương pháp «giả định chuẩn» cho ta hàm mật độ phân bố xác suất với độ chính xác đến đại lượng nhỏ bậc nhất đối với ε.

2) Các giá trị trung bình và hàm tương quan bậc hai tìm được theo phương pháp trên có độ chính xác đến đại lượng nhỏ bậc hai đối với ε.

3) Giá trị ε càng nhỏ thì phương pháp «giả định chuẩn» cho ta độ chính xác càng cao.

Địa chỉ
Viện Cơ học Viện KHVN

Nhận ngày 10-7-1979

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Iyengar R. N.** Random vibration of a second order nonlinear elastic system, J. SOUND AND VIBRATION, 1975, 40(2), 155 – 165.

2. **Nguyễn Cao Mệnh.** Dao động ngẫu nhiên của hệ động lực với đặc trưng trễ, Tuyển tập các công trình nghiên cứu Cơ học, Viện Khoa học Việt nam, 1978.

3. Стратонович Р.Л. Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, москва, 1961.

SUMMARY

ON THE JUSTIFICATION OF GAUSSIAN HEURISTIC METHOD IN THE THEORY OF RANDOM VIBRATION

Recently in the problems of random vibration, the heuristic method, in which output process is supposed to be Gaussian when Gaussian input process is given, is applied [1, 2]. This method is called the «Gaussian heuristic method». This paper deals with the justification of «Gaussian heuristic method», from that two following important conclusions are proved:

– «Gaussian heuristic method» gives density function of probability with the first order approximation with respect to the small parameter ε.

– Applying this method we get mean values and second order correlation functions in second order approximation with respect to the small parameter ε.