Tạp chí CƠ HỌC 1979 số 1 – 2 (trang 54 – 64)

VỀ MỘT ĐIỀU KIỆN ỔN ĐỊNH

NGUYỄN VĂN ĐÌNH

KHI khảo sát dao động đơn tần ở hệ á tuyến [1], từ hai phương trình xác định chế độ dừng, sau khi khử góc lệch pha, chúng ta được phương trình biên độ — tần số:

$$W(a, \eta) = 0$$

Trong đó: a — biên độ; η — tần số.

Tiêu chuẩn Raoso—Huyvi cho hai điều kiện ổn định trong đó điều kiện thứ hai được biến đổi thành:

$$\frac{\partial W(a, \eta)}{\partial a} > 0$$

Dạng này có ý nghĩa như sau:

1. Trong mặt phẳng (a, y), vẽ đồ thị $y = W(a, \eta)$; giao điểm của đồ thị với trục hoành cho biên độ dao động dừng; đó là dao động ổn định (không ổn định) nếu độ dốc tại giao điểm là dương (âm);

2. Trong mặt phẳng (η, a) vẽ đồ thị $W(\eta, a) = 0$; mỗi điểm của đồ thị cho biên độ a tương ứng tần số η của dao động dừng; đó là dao động ổn định (không ổn định) nếu khi đi thuận chiều tung tuyến, chúng ta từ miền $W < 0$ (> 0) vượt qua đồ thị để sang miền $W > 0$ (< 0). Trong [2], khi khảo sát hệ chịu kích động giới nội, cũng điều kiện ổn định nói trên được biến đổi về dạng có ý nghĩa: dao động dừng là ổn định hay không tùy theo «góc cắt» giữa hai đồ thị mômen: chứng minh được thực hiện cho hệ 2, 3, 4 phương trình vi phân.

Dưới đây, chứng minh tổng quát dạng nói trên và đề xuất một dạng khác của điều kiện ổn định cuối trong tiêu chuẩn Raoso — Huyvi.

§ I. Cho hệ phương trình vi phân:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{1.1}$$

trong đó: f_i — các hàm xác định, liên tục và có các đạo hàm riêng bậc nhất liên tục.

Giả thiết hệ có nghiệm dừng cô lập:

$$x_i = x_i^0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{1.2}$$

xác định bởi hệ phương trình:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{1.3}$$

và thỏa mãn điều kiện:

$$\Delta = \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|^n_{i,j=1} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (1.4)$$

ở đây và trong cả bài này, các đạo hàm riêng được tính tại giá trị (1.2) tương ứng nghiệm dừng.

Thành lập phương trình đặc trưng:

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \delta_{ij}\, p\right| = (-1)^n \{p_n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\} = 0 \qquad (1.5)$$

trong đó:

$$a_n = (-1)^n \Delta; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ (i=j) \\ 0 \ (i \neq j) \end{cases} (i, j = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1.6)$$

Điều kiện cần và đủ để các nghiệm đặc trưng có phần thực âm là điều kiện đủ để nghiệm dừng (1.2) ổn định tiệm cận là:

$$D_1 = a_1 > 0;\ D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \ldots;\ D_n = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & \ldots & \\ & & & \\ \ldots & & a_{n-1} & a_{n-2} \\ \ldots & 0 & & a_n \end{vmatrix} > 0 \qquad (1.7)$$

Có thể thay thế điều kiện cuối bởi điều kiện:

$$a_n = (-1)^n \Delta = (-1)^n \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|^n_{i,j=1} > 0 \qquad (1.8)$$

§ 2. Giả thiết:

$$\Delta_1 = \left|\frac{\partial f_p}{\partial x_m}\right|^n_{p,m=2} \neq 0 \qquad (2.1)$$

trong đó: Δ_1 — phần bù đại số của yếu tố nằm ở dòng 1 cột 1

Khi ấy ở lân cận nghiệm dừng, (n—1) phương trình cuối của hệ (1.3) giải ra:

$$x_m = g_m(x_1)\ (m = 2, \ldots, n) \qquad (2.2)$$

trong đó $g_m(x_1^0) = x_m^0$ và $g_m(x_1)$ đơn trị, liên tục và có các đạo hàm riêng bậc nhất liên tục.

Định lý: *Điều kiện ổn định (1.8) tương đương với điều kiện:*

$$(-1)^n \Delta_1 . \frac{d\bar{f}_1}{dx_1} > 0 \qquad (2.3)$$

trong đó:

$$\bar{f}_1(x_1) = f_1[x_1, g_2(x_1), \ldots, g_n(x_1)] \qquad (2.4)$$

Chứng minh — Đạo hàm toàn phần (n — 1) phương trình cuối của hệ (1.3) đối với x_1, chúng ta được:

$$\frac{\partial f_p}{\partial x_1} + \sum_{m=2}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_m} \frac{dg_m}{dx_1} = 0 \quad (p = 2, \ldots, n) \tag{2.5}$$

Điều kiện (2.1) cho phép giải ra:

$$\frac{dg_m}{dx_1} = -\frac{\Delta_1^{(m)}}{\Delta_1} \quad (m = 2, \ldots, n) \tag{2.6}$$

trong đó: $\Delta_1^{(m)}$ là định thức Δ_1 sau khi thay cột thứ (m—1) bởi cột:

$$\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right) \tag{2.7}$$

Theo quy tắc tính định thức, chúng ta có

$$\Delta_m = (-1)^{1+m} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f_2}{\partial x_{m-1}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_{m+1}} \ldots \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_{m-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{m+1}} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+m} (-1)^{m-2} \Delta_1^{(m)} = -\Delta_1^{(m)} \tag{2.8}$$

Vì vậy:

$$\frac{dg_m}{dx_1} = \frac{\Delta_m}{\Delta_1} \quad (m = 2, \ldots n) \tag{2.9}$$

và:

$$\frac{d\overline{f}_1}{dx_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \sum_{m=2}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \frac{dg_m}{dx_1} = \frac{1}{\Delta_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \Delta_i = \frac{1}{\Delta_1} \Delta \tag{2.10}$$

hay:

$$(-1)^n \Delta_1 \frac{d\overline{f}_1}{dx_1} = (-1)^n \Delta = a_n \tag{2.11}$$

Hệ thức này chứng minh định lý

Dễ dàng suy ra hệ quả sau. Giả thiết:

$$f_i(x_1 x_2 \ldots x_n) = h_i(x_1 x_2 \ldots x_n) . k_i(x_1 x_2 \ldots x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{2.12}$$

và nghiệm dùng xác định từ hệ phương trình:

$$k_i(x_1 x_2 \ldots x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{2.13}$$

thỏa mãn điều kiện:

$$h_i(x_1^\circ x_2^\circ \ldots x_n^\circ) \neq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.14}$$

$$\Gamma = \left| \frac{\partial k_i}{\partial x_j} \right|_{i,j=1}^{n} \neq 0 \tag{2.15}$$

Giả thiết:

$$\Gamma_1 = \left| \frac{\partial k_p}{\partial x_m} \right|_{p,m=2}^{n} \neq 0 \qquad (2.16)$$

trong đó Γ_1 là phần bù đại số của yếu tố nằm ở dòng 1 cột i ở Γ. Điều kiện (2.16) cho phép giải (n — 1) phương trình cuối của hệ (2.13)

$$x_m = q_m(x_1) \quad (m = 2, \dots n) \qquad (2.17)$$

trong đó: $q_m(x_1^o) = x_m^o$ và ở lân cận nghiệm dừng, các hàm $q_m(x_1)$ đơn trị, liên tục và có các đạo hàm riêng bậc nhất liên tục.

Hệ quả: *Điều kiện ổn định (1.8) tương đương với điều kiện:*

$$(-1)^n \left(\prod_{i=1}^{n} h_i \right) \Gamma_1 \cdot \frac{d\overline{k}_1}{dx_1} > 0 \qquad (2.18)$$

trong đó:

$$\overline{k_1}(x_1) = k_1[x_1, g_2(x_1), \dots, g_n(x_1)] \qquad (2.19)$$

các hàm h_i được tính tại nghiệm dừng.

Thực vậy:

$$\frac{d\overline{f}_1}{dx_1} = h_1 \frac{d\overline{k}_1}{dx_1}; \ \Delta_1 = \left| \frac{\partial f_p}{\partial x_m} \right|_{p,m=2}^{n} = h_2 \dots h_n \Gamma_1 \qquad (2.20)$$

Do đó, điều kiện (2.3) trở thành:

$$(-1)^n \Delta_1 \frac{d\overline{f}_1}{dx_1} = (-1)^n h_1 \dots h_n \Gamma_1 \frac{d\overline{k}_1}{dx_1} = (-1)^n \left(\prod_{i=1}^{n} h_i \right) \Gamma_1 \frac{d\overline{k}_1}{dx_1} > 0 \qquad (2.21)$$

§ 3. Giả thiết tại nghiệm dừng, chúng ta có:

$$\overline{\Delta}_{12} = (-1)^{1+2+1+2} \Delta_{12} = \left| \frac{\partial f_p}{\partial x_m} \right|_{p,m=3}^{n} \neq 0 \qquad (3.1)$$

trong đó: $\overline{\Delta}_{ij}$ — phần bù đại số của mino nằm ở dòng 1, 2 cột i, j

Δ_{ij} — định thức có được sau khi xóa các dòng 1, 2 và cột i, j trong định thức Δ.

Khi đó ở lân cận nghiệm dừng, (n—2) phương trình cuối của hệ (1.3) giải ra:

$$x_m = g_m(x_1, x_2) \quad (m = 3, \dots, n) \qquad (3.2)$$

trong đó $g_m(x_1^o\, x_2^o) = x_m^o$ và $g_m(x_1, x_2)$ đơn trị, liên tục và có các đạo hàm riêng bậc nhất liên tục.

Để chứng minh định lý dưới đây, cần xử dụng một tính chất của định thức. Cho 2n cột, mỗi cột có n số:

$$b^{(r)} = \begin{bmatrix} b_1^{(r)} \\ b_2^{(r)} \\ - \\ b_n^{(r)} \end{bmatrix}; \ c^{(s)} = \begin{bmatrix} c_1^{(s)} \\ c_2^{(s)} \\ = \\ c_n^{(s)} \end{bmatrix} (r, s = 1, 2, \dots n) \qquad (3.3)$$

Từ đó lập các định thức:

$$B = |\, b^{(1)}\, b^{(2)} \dots b^{(n)} \,|; \quad C = |\, c^{(1)}\, c^{(2)} \dots c^{(n)} \,|$$

$$B_r = |\, c^{(r)}\, b^{(2)} \dots b^{(n)} \,| \text{ (thay cột 1 bởi cột } c^{(r)})$$

$$C_r = |\, c^{(1)} .. c^{(r-1)}\, b^{(1)} . c^{(r+1)} .. c^{(n)} \,| \text{ (thay cột r bởi cột } b^{(1)}) \quad (3.4)$$

Gọi cột $b^{(1)}$ là cột chuẩn.

Bổ đề: *Các định thức (3.4) thỏa mãn hệ thức:*

$$B.C = \sum_{r=1}^{n} B_r . C_r \quad (3.5)$$

Thực vậy, gọi $(i_1\, i_2 \dots i_n)$ và $(j_1\, j_2 \dots j_n)$ là hai dãy n số có thể lấy giá trị tùy ý từ 1 đến n. Gọi dãy là hợp quy nếu các số khác nhau và là không hợp quy nếu có những số trùng nhau. Ký hiệu:

$$\sigma(i_1\, i_2 \dots i_n) = \begin{cases} +1 \text{ nếu dãy hợp quy và chứa số chẵn nghịch thế} \\ -1 \text{ nếu dãy hợp quy và chứa một số lẻ nghịch} \\ 0 \text{ nếu dãy không hợp quy.} \end{cases}$$

Số hạng tổng quát ở vế trái hệ thức (3.5) là:

$$\sigma(i_1 i_2 \dots i_n)\, \sigma(j_1 j_2 \dots j_n)\, b^{(1)}_{i_1} b^{(2)}_{i_2} \dots b^{(n)}_{i_n} c^{(1)}_{j_1} c^{(2)}_{j_2} \dots c^{(n)}_{j_n} \quad (3.6)$$

(chú ý rằng, trong định nghĩa thông thường của định thức, các dãy là hợp quy; ở đây, chúng có thể không hợp quy)

Ở vế phải của (3.5), các số hạng ghép được thành nhóm, mỗi nhóm có n số hạng bằng hoặc đối với số hạng (3.6). Tổng của mỗi nhóm là:

$$\sum_{r=1}^{n} \sigma(j_r\, i_2 \dots i_n)\, \sigma(j_1 \dots j_{r-1}\, i_1\, j_{r+1} \dots j_n)\, c^{(r)}_{j_r} b^{(2)}_{i_2} \dots b^{(n)}_{i_n} c^{(1)}_{j_1} \dots c^{(r-1)}_{j_{r-1}} b^{(1)}_{i_1} c^{(r+1)}_{j_{r+1}} \dots c^{(n)}_{j_n} \quad (3.7)$$

Ba trường hợp xảy ra:

1. Nếu hai dãy $(i_1\, i_2 \dots i_n)$, $(j_1\, j_2 \dots j_n)$ đều hợp quy, trong tổng (3.7) chỉ có một số hạng không triệt tiêu bằng đúng số hạng (3.6); đó là số hạng tương ứng $i_r = j_r$;

2. Nếu một trong hai dãy nói trên — thí dụ dãy $(i_1\, i_2 \dots i_n)$ — không hợp quy, số hạng (3.6) triệt tiêu. Trong tổng (3.7), số hạng không triệt tiêu — nếu có — tương ứng các dãy $(j_r\, i_2 \dots i_n)$ và $(j_1 \dots j_{r-1}\, i_1\, j_{r+1} \dots j_n)$ hợp quy. Do đó $i_1 = j_r$ và dãy $(i_1\, i_2 \dots i_n)$ sẽ trùng với dãy hợp quy $(j_r\, i_2 \dots i_n)$; trái giả thiết. Vậy tổng (3.7) cũng triệt tiêu.

3. Nếu cả hai dãy nói trên đều không hợp quy, số hạng (3.6) triệt tiêu. Trong tổng (3.7) — nếu có — thì chỉ có đúng hai số hạng không triệt tiêu tương ứng khi hai dãy $(i_1 i_2 \dots i_n)$ và $(j_1\, j_2 \dots j_n)$ có $i_1 = i_u\ (u \neq 1)$; $j_r = j_s\ (r < s)$. Đó là hai số hạng:

$$\sigma(j_r i_2 \dots i_n)\, \sigma(j_1 \dots j_{r-1}\, i_1\, j_{r+1} \dots j_s \dots j_n)\, c^{(r)}_{j_r} b^{(2)}_{i_2} \dots b^{(n)}_{i_n} c^{(1)}_{j_1} \dots c^{(r-1)}_{j_{r-1}} b^{(1)}_{i_1} c^{(r+1)}_{j_{r+1}} \dots c^{(s)}_{j_s} \dots c^{(n)}_{j_n}$$

và:

$$\sigma(j_s\, i_2 \dots i_n)\, \sigma(j_1 \dots j_r \dots j_{s-1}\, i_1\, j_{s+1} \dots j_n)\, c^{(s)}_{j_s} b^{(2)}_{i_2} \dots b^{(n)}_{i_n} c^{(1)}_{j_1} \dots c^{(r)}_{j_r} \dots c^{(s-1)}_{j_{s-1}} b^{(1)}_{i_1} c^{(s+1)}_{j_{s+1}} \dots c^{(n}_{j_n}$$

Vì $j_r = j_s$ nên hai dãy $(j_r\, i_2 \dots i_n)$ và $(j_s\, i_2 \dots i_n)$ trùng nhau. Hai dãy $(j_1 \dots j_r\, i_1\, j_{r+1} \dots j_s\, j_{s+1} \dots j_n)$ và $(j_1 \dots j_r \dots j_{y-1}\, i_1\, j_{s+1} \dots j_n)$ chỉ khác nhau một số lẻ nghịch thế khi đổi chỗ i_1 với j_s để dãy thứ nhất thành dãy thứ hai, chúng ta cần $2(s+r)-1$ l chuyển trí. Do đó, chúng là hai số hạng đối nhau, có tổng bằng không.

Như thế trong tất cả các trường hợp, số hạng (3.6) đều bằng tổng (3.7); l đề được chứng minh.

Trường hợp (n — 2) cột cuối của các định thức B, C tương ứng trùng nh chúng ta có:

$$B \,.\, C = B_1 \,.\, C_1 + B_2 \,.\, C_2 \tag{3.}$$

Dễ dàng nhận thấy bổ đề vẫn đúng nếu thay cho $b^{(1)}$ chúng ta chọn c khác làm chuẩn.

Định lý: *Điều kiện ổn định (1.8) tương đương với điều kiện*:

$$(-1)^n \bar{\Delta}_{12} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \bar{f}_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \bar{f}_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \bar{f}_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \bar{f}_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} > 0 \tag{3.}$$

trong đó: $\bar{f}_i = f_i[x_1, x_2, g_3(x, x_2), \dots, g_n(x_1 x_2)]$ $(i = 1,2)$

Chứng minh — Từ (n — 2) phương trình cuối của hệ (1.3), chúng ta được:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_p}{\partial x_1} + \sum\limits_{m=3}^{n} \dfrac{\partial f_p}{\partial x_m} \cdot \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial f_p}{\partial x_2} + \sum\limits_{m=3}^{n} \dfrac{\partial f_p}{\partial x_m} \cdot \dfrac{\partial g_m}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Điều kiện (3.1) cho phép giải hệ (3.10):

$$\frac{\partial g_m}{\partial x_1} = -\frac{\Delta^{m1}_{12}}{\Delta_{12}}; \quad \frac{\partial g_m}{\partial x_2} = -\frac{\Delta^{m2}_{12}}{\Delta_{12}} \tag{3.1}$$

trong đó Δ^{mi}_{12} là định thức Δ_{12} sau khi thay cột thứ m—2 (m > 2) bởi cột:

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_i}, \frac{\partial f_4}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i} \right) \quad (i = 1, 2).$$

Chú ý rằng:

$$\Delta^{m1}_{12} = (-1)^{m-3}\, \Delta_{2m} = (-1)^{1+2+2+m}\, \Delta_{2m} = \bar{\Delta}_{2m} \tag{3.1}$$

$$\Delta^{m2}_{12} = (-1)^{m-3}\, \Delta_{1m} = (-1)^{1+2+1+m} (-1)\, \Delta_{1m} = -\bar{\Delta}_{1m} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} \Delta^{m1}_{12}\, \Delta^{p2}_{12} - \Delta^{p1}_{12}\, \Delta^{m2}_{12} &= (-1)^{m+p} \{ \Delta_{2m}\, \Delta_{1p} - \Delta_{2p}\, \Delta_{1m} \} \\ &= (-1)^{m+p} \{ (-1)^{m-3} B_1 (-1)^{m-2} C_1 - (-1)^{m-3} C_2 (-1)^{m-3} B_2 \} \\ &= (-1)^{m+p+1} \{ \Delta_{12}\, \Delta_{mp} \} = \Delta_{12} (-1)^{1+2+m+p} \Delta_{mp} = \bar{\Delta}_{12} \,.\, \bar{\Delta}_{mp} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Trong đó hệ thức cuối suy ra từ bổ đề với $B = \Delta_{12}$. $C = \Delta_{mp}$ và chọn cột thứ $(m-2)$ của B làm cột chuẩn.

Theo quy tắc tính định thức, chúng ta có:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \sum_{m=3}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \sum_{p=3}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \frac{\partial g_p}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \sum_{m=3}^{n} \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \sum_{p=3}^{n} \frac{\partial f_2}{\partial x_p} \frac{\partial g_p}{\partial x_2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} + \sum_{p=3}^{n} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_p} \end{vmatrix} \frac{\partial g_p}{\partial x_2} + \sum_{m=3}^{n} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \end{vmatrix} \frac{\partial g_m}{\partial x_1} +$$

$$+ \sum_{m<p=3}^{n} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_m} & \frac{\partial f_1}{\partial x_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_m} & \frac{\partial f_2}{\partial x_p} \end{vmatrix} \left\{ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \frac{\partial g_p}{\partial x_2} - \frac{\partial g_p}{\partial x_1} \frac{\partial g_m}{\partial x_2} \right\}$$

Biến đổi trên cơ sở các hệ thức (3.11) — (3.14), chúng ta được:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{f}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{f}_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta_{12}} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Hệ thức này chứng minh định lý

Cũng như trên, từ định lý có thể suy ra hệ quả sau. Giả thiết các hàm f_i có cấu trúc (2.12) nghiệm dừng xác định bởi hệ phương trình (2.13) và thỏa mãn điều kiện (2.14) (2.15). Giả thiết tại nghiệm dừng chúng ta có:

$$\Gamma_{12} = \left| \frac{\partial k_p}{\partial x_m} \right|_{p,m=3}^{n} \neq 0 \qquad (3.16)$$

và do đó $(n-2)$ phương trình cuối của hệ (2.13) giải ra:

$$x_m = q_m(x_1, x_2) \; (m=3,.. n) \qquad (3.17)$$

trong đó $q_m(x_1^o x_2^o) = x_m^o$ và $q_m(x_1 x_2)$ đơn trị, liên tục và có các đạo hàm riêng bậc nhất liên tục.

Hệ quả: *Điều kiện ổn định (1.8) tương đương với điều kiện:*

$$(-1)^n \left(\prod_{i=1}^{n} h_i \right) \Gamma_{12} \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{k}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{k}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \bar{k}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{k}_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} > 0 \qquad (3.18)$$

Thực vậy, chúng ta có :

$$\Delta_{12} = \left| \frac{\partial f_p}{\partial x_m} \right|^n_{p,m=3} = \left| h_p \frac{\partial k_p}{\partial x_m} \right|^n_{p,m=3} = h_3 \ldots h_n \left| \frac{\partial k_p}{\partial x_m} \right|^n_{p,m=3}$$

$$\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_j} = h_i \frac{\partial \bar{k}_i}{\partial x_j} \; (i, j = 1,2)$$

Thay vào (3,9), dễ dàng suy ra (3.18).

§ 4. Các dạng vừa tìm được của điều kiện ổn định cuối trong tiêu chuẩn Raoso—Huyvi có ý nghĩa hình học đơn giản.

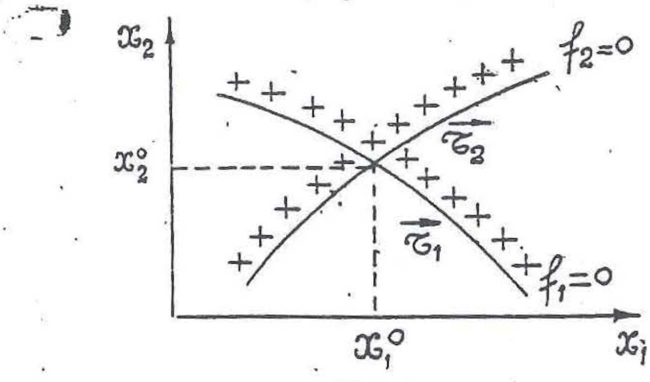
Đối với điều kiện (2.3), theo ý nghĩa đã trình bày ở phần mở đầu, chúng ta vẽ đồ thị $y = (-1)^n \Delta_1 \bar{f}_1(x_1)$ trong mặt tọa độ (x_1, y) hoặc đồ thị $W(x_1, \eta) = (-1)^n \Delta_1 \bar{f}_1(x_1, \eta) = 0$ trong mặt tọa độ (η, x_1) ; ở đây η là thông số nào đó. Tính ổn định của nghiệm dừng suy ra từ độ dốc hoặc từ quy luật chuyển dấu. Tương tự cho điều kiện (2.18).

Xét điều kiện (3.9). Để đơn giản, giả thiết $(-1)^n \bar{\Delta}_{12} > 0$, điều kiện ổn định (3.9) trở thành :

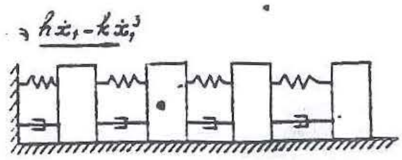
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \bar{f}_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \bar{f}_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial \bar{f}_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \bar{f}_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} > 0 \tag{4.1}$$

Trong mặt tọa độ (x_1, x_2), vẽ hai đồ thị C_1 $(\bar{f}_1 = 0)$ và C_2 $(\bar{f}_2 = 0)$; giao điểm của chúng cho giá trị x_1^0, x_2^0 tương ứng nghiệm dừng. Từ giao điểm, vẽ hai vécto tiếp tuyến $\vec{\tau}_1(\vec{\tau}_2)$ sao cho miền $\bar{f}_1 > 0$ $(\bar{f}_2 > 0)$ nằm phía tay trái. Dễ dàng nhận thấy điều kiện ổn định (4.1) là điều kiện chiều quay từ $\vec{\tau}_1$ đến $\vec{\tau}_2$ (góc quay nhỏ hơn 180°) ngược chiều quay của kim đồng hồ (h.I). Tương tự cho điều kiện (3.18).

Chú ý rằng, nếu xét các trị số $x_i > 0$, các điều kiện ổn định giữ nguyên dạng đối với biến $\alpha_i x_i^2$ $(\alpha_i > 0)$.



Hình 1



Hình 2

Thí dụ : Khảo sát dao động hệ bốn khối lượng nối với nhau bằng lò so (h. 2); khối lượng thứ nhất chịu cản nhớt (hệ số λ) và chịu lực kích động tự chấn là hàm lẻ bậc ba của tốc độ (hệ số h, k). Hệ phương trình trung bình ở tọa độ chuẩn là :

$$\dot{a}_i = f_i = h_i \ldots k_i = \frac{\varepsilon a_i}{2M_i} \left\{ h - \lambda - A_i - 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{4} A_j \right\} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

trong đó : a_i — các biên độ dao động ; ω_i — các tần số riêng ;

$$\bar{A}_i = \frac{3}{4} k\, \omega_i^2 a_i^2 \text{ ; } h, k, \lambda, M_i \text{ — các hệ số dương.}$$

Các chế độ dừng được xác định từ hệ phương trình :

$$f_i = h_i k_i = \frac{\varepsilon a_i}{2M_i} \left\{ h - \lambda - A_i - 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{4} A_j \right\} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Nếu $h - \lambda > 0$, trong hệ có thể tồn tại chế độ dao động bốn tần số $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ tương ứng với các biên độ thỏa mãn hệ phương trình :

$$k_i = h - \lambda - A_i - 2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{4} A_j = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Theo ý nghĩa của chúng, $a_i > 0$; vì vậy áp dụng điều kiện (2. 18) với biến $A_i = \frac{3}{4} k\, \omega_i^2 a_i^2$ chúng ta được :

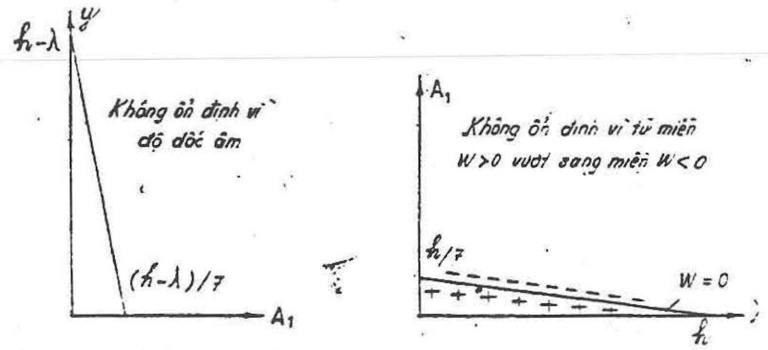
$$h_i = \frac{\varepsilon a_i}{2M_i} > 0 \quad , \quad \Gamma_1 = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -5 < 0$$

$$\bar{k}_1 (A_1) = -\frac{1}{5}(h - \lambda) + \frac{7}{5} A_1 \text{ ; } \frac{d\, k_1}{d A_1} = \frac{7}{5}$$

$$\text{vậy : } (-1)^4 h_1 h_2 h_3 h_4 \Gamma_1 \frac{d\, \bar{k}_1}{d\, A_1} < 0$$

Chế độ dao động được khảo sát là không ổn định.

Hình 3 minh họa cách dùng đồ thị hàm $y = \Gamma_1 \bar{k}_1 (A_1)$ và $W(\lambda, A_1) = h - \lambda - 7A_1$ để xác định tính không ổn định của chế độ khảo sát.



Hình 3

Có thể áp dụng điều kiện (3. 18). Trước hết giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} k_3 = h - \lambda - A_3 - 2\,(A_1 + A_2 + A_4) = 0 \\ k_4 = h - \lambda - A_4 - 2\,(A_1 + A_2 + A_3) = 0 \end{cases}$$

Chúng ta có :

$$\Gamma_{12} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial k_3}{\partial A_3} & \dfrac{\partial k_3}{\partial A_4} \\ \dfrac{\partial k_4}{\partial k_3} & \dfrac{\partial k_4}{\partial A_4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

$$h_1 \,.\, h_2 \,.\, h_3 \,.\, h_4 = \frac{\varepsilon^4 a_1 a_2 a_3 a_4}{M_1 M_2 M_3 M_4} > 0$$

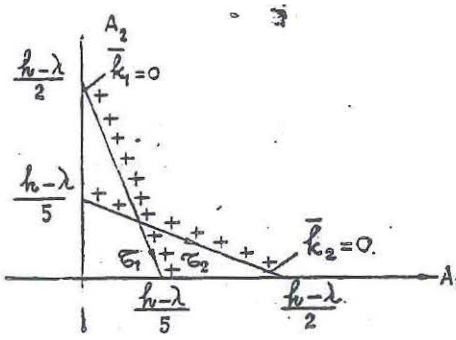
$$\overline{k}_1 = -\frac{h-\lambda}{3} + \frac{5}{3} A_1 + \frac{2}{3} A_2$$

$$\overline{k}_2 = -\frac{h-\lambda}{3} + \frac{2}{3} A_1 + \frac{5}{3} A_2$$

Vậy :

$$(-1)^4 \,.\, h_1 \,.\, h_2 \,.\, h_3 \,.\, h_4 \,.\, \Gamma_{12} \,.\, \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \overline{k}_1}{\partial A_1} & \dfrac{\partial \overline{k}_1}{\partial A_2} \\ \dfrac{\partial \overline{k}_2}{\partial A_1} & \dfrac{\partial \overline{k}_2}{\partial A_2} \end{vmatrix} = \frac{\varepsilon^4 a_1 a_2 a_3 a_4}{M_1 M_2 M_3 M_4} (-3) \frac{21}{9} < 0$$

Do đó, chế độ dao động nhiều tần số là không ổn định. Hình 4 cho đồ thị $\overline{k}_1 = 0$, $\overline{k}_2 = 0$ và các miền $\overline{k}_1 > 0$, $\overline{k}_2 > 0$. Vẽ các véc-tơ $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$. Chú ý rằng chiều quay từ $\vec{\tau}_1$ đến $\vec{\tau}_2$ ngược chiều quay của kim đồng hồ nhưng vì $(-1)\, h_1\, h_2\, h_3\, h_4\, \Gamma_{12} < 0$ nên chế độ khảo sát là không ổn định.



Hình 4

§ 5. Theo cùng một phương pháp, tuy phức tạp hơn, chúng ta tìm được dạng tổng quát. Giả thiết nghiệm dừng (1.2) xác định bởi hệ (1.3) và thỏa mãn điều kiện (1.4). Lại giả thiết :

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_{m+1}}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (5.1)$$

Khi ấy ở lân cận nghiệm dừng, (n — m) phương trình cuối của hệ (1.3) giải ra :

$$x_{m+s} = g_{m+s}\,(x_1\, x_2 \,.\,.\, x_m) \quad (s = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-m) \qquad (5.2)$$

trong đó $g_{m+s}(x_1^0, x_2^0, \ldots x_m^0) = x_{m+s}^0$ và $g_{m+s}\,(x_1, x_2, \ldots x_m)$ đơn trị, liên tục và có các đạo hàm riêng bậc nhất liên tục.

Định lý: *Điều kiện ổn định (1.8) tương đương với điều kiện:*

$$(-1)^{n}\Delta_{*}\begin{vmatrix}\frac{\partial\bar{f}_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\bar{f}_1}{\partial x_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial\bar{f}_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\bar{f}_m}{\partial x_m}\end{vmatrix} > 0 \qquad (5.3)$$

trong đó: $\bar{f}_i(x_1, x_2, ..., x_m) = f_i[x_1, ..., x_m, g_{m+1}, ..., g_n]$ $(i = 1, 2, .. m)$ (5.4)

Nếu các hàm f_i có cấu trúc (2.12), nghiệm dừng xác định từ hệ (2.13) và thỏa mãn các điều kiện (2.14) (2.15) và giả thiết:

$$\Gamma_{*} = \begin{vmatrix}\frac{\partial k_{m+1}}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial k_{m+1}}{\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial k_n}{\partial x_{m+1}} & \cdots & \frac{\partial k_n}{\partial x_n}\end{vmatrix} \neq 0 \qquad (5.5)$$

Khi ấy (n—m) phương trình cuối của hệ (2.13) giải ra:

$$x_{m+s} = q_{m+s}(x_1, x_2, ..., x_m) \quad (s = 1, 2, ..., n-m) \qquad (5.6)$$

trong đó $q_{m+s}(\overset{\circ}{x}_1\ \overset{\circ}{x}_2\ \overset{\circ}{x}_m) = \overset{\circ}{x}_{m+s}$ và ở lân cận nghiệm dừng các hàm $q_{m+s}(x_1, x_2, ..., x_m)$ đơn trị, liên tục và có các đạo hàm riêng bậc nhất liên tục.

Hệ quả: *Điều kiện ổn định (1.8) tương đương với điều kiện:*

$$(-1)^{n}\left(\prod_{i=1}^{n} h_i\right)\Gamma_{*}\begin{vmatrix}\frac{\partial\bar{k}_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\bar{k}_1}{\partial x_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial\bar{k}_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial\bar{k}_m}{\partial x_m}\end{vmatrix} > 0 \qquad (5.7)$$

trong đó: $\bar{k}_i(x_1, x_2, ..., x_m) = k_i[x_1, x_2, ..., x_m, q_{m+1}, ..., q_n]$ $(i = 1, 2, .. m)$ (5.8)

Địa chỉ
Đại học Bách khoa

Nhận ngày 18/6/79

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Nguyễn Văn Đạo.** Những phương pháp cơ bản của lý thuyết dao động phi tuyến. Hà nội 1971.

2. КОНОНЕНКО. В. О. Колебательные системы с ограниченными возбуждениями. М 1964

RÉSUMÉ

SUR UNE CONDITION DE STABILITÉ

La dernière condition de stabilité de Routh — Hurwitz a été transformée dans les cas particuliers en une forme ayant l'interprétation géométrique claire et efficace. Dans ce texte, la démonstration a été réalisée dans le cas général; l'auteur a généralisé aussi la forme précédente.