Tạp chí CƠ HỌC 1979 số 1 - 2 (trang 46 - 53)

DAO ĐỘNG CỦA HỆ ĐỘNG LỰC CHỨA ĐẶC TRƯNG TRỄ CHỊU KÍCH ĐỘNG NGẪU NHIÊN CỦA THAM SỐ VÀ LỰC NGOÀI

NGUYỄN CAO MỆNH

TRONG bài này, ta khảo sát hệ phi tuyến chứa đặc trưng đàn hồi không hoàn toàn, chịu kích động tham số và ngoại lực dưới dạng quá trình ngẫu nhiên dừng chuẩn. Dùng phương pháp giả định về tính chất của nghiệm kết hợp với phương pháp hình bao, tương tự như trong bài [5], ta lập được hệ phương trình vi phân kín, tuyến tính để xác định các đặc trưng của nghiệm.

ĐẶT VẤN ĐỀ

Khi xét dao động của hệ đàn hồi chịu tác dụng của quá trình ngẫu nhiên, nếu dùng phương pháp Galerkin để tìm nghiệm và chú ý đến sự hao tán năng lượng bên trong vật liệu ta sẽ nhận được phương trình vi phân phi tuyến chứa đặc trưng trễ chịu kích động tham số và ngoại lực ngẫu nhiên.

Khi kích động tham số là tuần hoàn, còn tác dụng của lực ngoài là quá trình ngẫu nhiên «ồn trắng» người ta đã khảo sát bằng cách dùng phương trình Fokker — Planck [3] hoặc phương pháp tham số bé [2]. Đối với hệ tuyến tính chịu kích động tham số ngẫu nhiên ồn trắng người ta cũng dùng phương trình Fokker — Planck để lập hệ phương trình tuyến tính xác định các mô men và nghiên cứu sự ổn định của hệ [4]. Đối với hệ tuyến tính chịu kích động tham số và ngoại lực ngẫu nhiên chuẩn, trong [1] người ta đã dùng phương pháp giả định về tính chất chuẩn của nghiệm để khảo sát. Tất cả các kết quả trong các công trình trên không thể ứng dụng trực tiếp để khảo sát hệ phi tuyến chứa đặc trưng trễ chịu kích động tham số và ngoại lực dưới dạng những quá trình ngẫu nhiên.

Trong bài này ta sẽ dùng phương pháp giả định kết hợp với phương pháp hình bao, như trong bài [5], để giải quyết vấn đề đã đặt ra.

§ 1. CÁC PHƯƠNG TRÌNH XÁC ĐỊNH CÁC ĐẶC TRƯNG XÁC SUẤT CỦA QUÁ TRÌNH NGHIỆM

Xét hệ động lực chịu kích động tham số và lực ngoài ngẫu nhiên biểu diễn bởi phương trình:

$$\ddot{Z} + 2h\dot{Z} + \omega_0^2[1 - \alpha G(t)]Z + \beta\overleftrightarrow{\Phi}(A, Z) = F(t) \qquad (1.1)$$

trong đó $\overleftrightarrow{\Phi}(A, Z)$ thể hiện đặc trưng trễ của hệ, A là biên độ dao động của quá trình nghiệm, $G(t)$ và $F(t)$ là các quá trình ngẫu nhiên dừng chuẩn có kỳ vọng bằng không và hàm tương quan là $G_{GG}(\tau)$, $R_{FF}(\tau)$, hàm tương quan liên kết $R_{GF}(\tau)$.

Giả sử quá trình nghiệm $Z(t)$ là quá trình ngẫu nhiên dừng chuẩn có kỳ vọng m và phương sai σ^2 và hàm tương quan $R_{ZZ}(\tau)$, đó là các đại lượng ta cần xác định.

Dùng phép thay biến

$$Z(t) = X(t) + m \tag{1.2}$$

phương trình (1.1) trở thành

$$\ddot{X} + 2h\dot{X} + \omega_o^2(1 - \alpha G)X + \omega_o^2 m(1 - \alpha G) + \beta\overleftrightarrow{\Phi}(A, X + m) = F(t) \tag{1.3}$$

Với phép thay biến này, quá trình $X(t)$ có kỳ vọng bằng không và có cùng hàm tương quan và phương sai như $Z(t)$. Theo phương pháp [5] dựa vào tính chất dừng chuẩn, có kỳ vọng bằng không của các quá trình $X(t)$, $G(t)$ và $F(t)$ ta đưa vào ba quá trình khác $Y(t)$, $H(t)$ và $E(t)$ liên hệ với ba quá trình trên bởi các đẳng thức sau đây:

$$R_{XY}(t, t) = 0; \qquad R_{HG}(t, t) = 0; \qquad R_{EF}(t, t) = 0 \tag{1.4}$$
$$R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) \qquad R_{HH}(\tau) = R_{GG}(\tau) \qquad R_{EE}(\tau) = R_{FF}(\tau)$$

Ngoài ra nếu các quá trình $X(t)$, $G(t)$ và $F(t)$ có khai triển phổ là

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\Phi_X(\omega); \quad G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\Phi_G(\omega); \quad F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\Phi_F(\omega) \tag{1.5}$$

thì các quá trình $Y(t)$, $H(t)$ và $E(t)$ có khai triển phổ tương ứng dưới dạng

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\Phi_Y(\omega); \quad H(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\Phi_H(\omega); \quad E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\, d\Phi_E(\omega) \tag{1.6}$$

trong đó theo [6]:

$$\Phi_Y(\omega) = -i\frac{\omega}{|\omega|}\Phi_X(\omega); \; \Phi_H(\omega) = -i\frac{\omega}{|\omega|}\Phi_G(\omega); \; \Phi_E(\omega) = -i\frac{\omega}{|\omega|}\Phi_F(\omega) \tag{1.7}$$

Đồng thời khi đó ta có thể biểu diễn

$$A^2(t) = X^2(t) + Y^2(t) \tag{1.8}$$

Lấy kỳ vọng hai vế phương trình (1.3) ta nhận được phương trình

$$m = \alpha R_{GX}(t, t) - \frac{\beta}{\omega_o^2} P(m, \sigma)' \tag{1.9}$$

trong đó

$$P(m, \sigma) = \left\langle \overleftrightarrow{\Phi}\left(\sqrt{X^2 + Y^2},\, X + m\right) \right\rangle =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \overleftrightarrow{\Phi}\left(\sqrt{x^2 + y^2},\, x + m\right) f(x, y)\, dx dy \tag{1.10}$$

với

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{1.11}$$

là hàm mật độ phổ xác suất của quá trình X(t) và Y(t).

Tiếp theo nhân hai vế phương trình (1.3) với $G(t_1)$ và $H(t_1)$ sau đó lấy kỳ vọng hai vế, để ý rằng mô men bậc lẻ của các biến ngẫu nhiên chuẩn với kỳ vọng bằng không sẽ bằng không, ta nhận được hệ hai phương trình sau đây:

$$\ddot{R}_{GX}(\tau) + 2h\,\dot{R}_{GX}(\tau) + \omega_o^2 R_{GX}(\tau) + \beta Q(R_{GX}, R_{GY}) = \alpha\omega_o^2 m R_{GG}(\tau) + R_{GF}(\tau) \tag{1.12}$$

$$\ddot{R}_{HX}(\tau) + 2h\,\dot{R}_{HX}(\tau) + \omega_o^2 R_{HX}(\tau) + \beta M(R_{HX}, R_{HY}) = \alpha\omega_o^2 m R_{HG}(\tau) + R_{HF}(\tau) \tag{1.13}$$

trong đó

$$Q(R_{GX}, R_{GY}) = \langle \overset{\rightleftarrows}{\Phi}(\sqrt{X^2+Y^2}, X+m)\, G(t_1) \rangle \tag{1.14}$$

$$M(R_{HX}, R_{HY}) = \langle \overset{\rightleftarrows}{\Phi}(\sqrt{X^2+Y^2}, X+m)\, H(t_1) \rangle \tag{1.15}$$

Ở đây ta có thể coi các quá trình là liên kết dừng, vì mỗi quá trình được khảo sát đều là quá trình chuẩn dừng nên là quá trình dừng theo nghĩa hẹp. Hai quá trình dừng theo nghĩa hẹp sẽ có liên kết dừng [6].

Trong các phương trình (1.12) và (1.13) ta có thể chỉ ra rằng [5].

$$R_{GY}(\tau) = -R_{HX}(\tau);\quad R_{HY}(\tau) = R_{GX}(\tau) \tag{1.16}$$

Do đó hai phương trình (1.12) và (1.13) lập nên hệ phương trình vi phân xác định các hàm $R_{GX}(\tau)$, $R_{HX}(\tau)$ với vế phải đã biết. Để xác định các biểu thức hiền (1.14) và (1.15) theo [5] ta có hàm phân bố

$$f(x,y,g,h) = \frac{1}{4\pi^2\mathcal{C}} \exp\left\{-\frac{1}{2\mathcal{C}}\left[\sigma_g^2(x^2+y^2)+\sigma^2(g^2+h^2)-2R_{GX}xg-2R_{HX}xh + {} \right.\right.$$
$$\left.\left. {} + 2R_{HX}yg - 2R_{GX}hy\right]\right\} \tag{1.17}$$

trong đó

$$\mathcal{C} = \sigma^2\sigma_g^2 - R_{GX}^2(\tau) - R_{HX}^2(\tau) \tag{1.18}$$

và σ_g^2 là phương sai của quá trình nghiệm G(t).

Do đó, ta có thể tính được (1.14) và (1.15) và nhận được kết quả sau

$$Q(R_{GX}, R_{GY}) = Q_1(m,\sigma)R_{GX}(\tau) - Q_2(m,\sigma)R_{HX}(\tau) \tag{1.19}$$

$$M(R_{HX}, R_{HY}) = Q_1(m,\sigma)R_{HX}(\tau) + Q_2(m,\sigma)R_{GX}(\tau) \tag{1.20}$$

trong đó

$$Q_1(m,\sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\overrightarrow{\Phi}(\sqrt{x^2+y^2},\, x+m)\,x\,e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}\,dxdy \qquad (1.21)$$

$$Q_2(m,\sigma) = \frac{1}{2\pi\sigma^4}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\overrightarrow{\Phi}(\sqrt{x^3+y^2},\, x+m)\,y\,e^{-\frac{x^3+y^2}{2\sigma^2}}\,dxdy \qquad (1.22)$$

Do đó hai phương trình (1.12) và (1.13) trở thành

$$\begin{cases} \ddot{R}_{GX}(\tau) + 2h\dot{R}_{GX}(\tau) + [\omega_o^2 + \beta Q_1]R_{GX}(\tau) - \beta Q_2 R_{HX}(\tau) = \alpha\omega_o^2 mR_{GG}(\tau) + R_{GF}(\tau) \\ \ddot{R}_{HX}(\tau) + 2h\dot{R}_{GX}(\tau) + [\omega_o^2 + \beta Q_1]R_{HX}(\tau) + \beta Q_2 R_{GX}(\tau) = \alpha\omega_o^2 mR_{HG}(\tau) + R_{HF}(\tau) \end{cases} \qquad (1.23)$$

Giả sử, trong bài toán mà ta khảo sát, tồn tại các hàm mật độ phổ tương ứng với các hàm tương quan trong hệ (1.23), ta ký hiệu các hàm mật độ phổ ấy là $S_{GX}(\omega)$, $S_{HX}(\omega)$, ...

Khi đó áp dụng phép biến đổi Fourier vào hai vế phương trình (1.23) ta nhận được:

$$\begin{cases} (\omega_o^2 - \omega^2 + \beta Q_1 + 2hi\omega)S_{GX}(\omega) - \beta Q_2 S_{HX}(\omega) = \alpha\omega_o^2 mS_{GG}(\omega) + S_{GF}(\omega) \\ \beta Q_2 S_{GX}(\omega) + (\omega_o^2 - \omega^2 + \beta Q_1 + 2hi\omega)S_{HX}(\omega) = \alpha\omega_o^2 mS_{HG}(\omega) + S_{HF}(\omega) \end{cases} \qquad (1.24)$$

Từ đó suy ra

$$S_{GX}(\omega) = \frac{[\alpha\omega_o^2 mS_{GG}(\omega) + S_{GF}(\omega)][\omega_o^2 - \omega^2 + \beta Q_1 + 2hi\omega] + \beta Q_2[\alpha\omega_o^2 mS_{HG}(\omega) + S_{HF}(\omega)]}{(\omega_o^2 - \omega^2 + \beta Q_1 + 2hi\omega)^2 + \beta Q_2^2} \qquad (1.25)$$

$$S_{HX}(\omega) = \frac{[\alpha\omega_o^2 mS_{HG}(\omega) + S_{HF}(\omega)][\omega_o^2 - \omega^2 + \beta Q_1 + 2hi\omega] - \beta Q_2[\alpha\omega_o^2 mS_{GG}(\omega) + S_{GF}(\omega)]}{(\omega_o^2 - \omega^2 + \beta Q_1 + 2hi\omega)^2 + \beta^2 Q_2^2} \qquad (1.26)$$

Nhân hai vế phương trình (1.3) với $F(t_1)$, $E(t_1)$ rồi lấy kỳ vọng hai vế ta nhận được hai phương trình sau

$$\ddot{R}_{FX}(\tau) + 2h\dot{R}_{FX}(\tau) + \omega_o^2 R_{FX}(\tau) + \beta L(R_{FX}, R_{FY}) = \alpha\omega_o^2 mR_{FG}(\tau) + R_{FF}(\tau) \qquad (1.27)$$

$$\ddot{R}_{EX}(\tau) + 2h\dot{R}_{EX}(\tau) + \omega_o^2 R_{EX}(\tau) + \beta N(R_{EX}, R_{EY}) = \alpha\omega_o^2 mR_{EG}(\tau) + R_{EF}(\tau) \qquad (1.28)$$

Cũng như trong trường hợp trên, chú ý rằng

$$R_{FY}(\tau) = -R_{EX}(\tau);\ R_{EY}(\tau) = R_{FX}(\tau) \qquad (1.29)$$

hai phương trình (1.27) và (1.28) trở thành hệ phương trình xác định $R_{FX}(\tau)$, $R_{EX}(\tau)$, trong đó:

$$L(R_{FX}, R_{FY}) = L(R_{FX}, -R_{EX}) = <\overset{\rightleftarrows}{\Phi}(\sqrt{X^2+Y^2}, X+m)\, F(t_1)> \quad (1.30)$$

$$N(R_{EX}, R_{EY}) = N(R_{EX}, R_{FX}) = <\overset{\rightleftarrows}{\Phi}(\sqrt{X^2+Y^2}, X+m)\, E(t_1)> \quad (1.31)$$

Để tính các biểu thức (1.30) và (1.31), ta cần tìm hàm mật độ phân bố xác suất $F(x, y, f, e)$ của 4 biến ngẫu nhiên $X(t)$, $Y(t)$, $F(t_1)$ và $E(t_1)$. Tương tự như trong bài [5], ta tìm được:

$$F(x, y, f, e) = \frac{1}{4\pi^2 D} \exp\left\{-\frac{1}{2D}\left[\sigma_f^2(x^2+y^2) + \sigma^2(f^2+e^2) - 2R_{FX}xf - \right.\right.$$
$$\left.\left. - 2R_{EX}xe + 2R_{EX}yf - 2R_{FX}ye\right]\right\} \quad (1.32)$$

trong đó σ_f^2 là phương sai của quá trình ngẫu nhiên $F(t)$

$$D = \sigma^2\sigma_f^2 - R_{FX}^2(\tau) - R_{EX}^2(\tau) \quad (1.33)$$

Thay (1.32) vào các biểu thức tính kỳ vọng (1.30) và (1.31), tức là sau khi tính các tích phân

$$\iiiint_{-\infty}^{\infty} \overset{\rightleftarrows}{\Phi}(\sqrt{x^2+y^2}, x+m)\, f.F(x, y, f, e)\, dx\, dy\, df\, de;$$

$$\iiiint_{-\infty}^{\infty} \overset{\rightleftarrows}{\Phi}(\sqrt{x^2+y^2}, x+m)\, e.F(x, y, f, e)\, dx\, dy\, df\, de$$

ta tìm được

$$L(R_{FX}, -R_{EX}) = Q_1(m, \sigma)\, R_{FX}(\tau) - Q_2(m, \sigma)\, R_{EX}(\tau) \quad (1.34)$$

$$N(R_{EX}, R_{FX}) = Q_1(m, \sigma)\, R_{EX}(\tau) + Q_2(m, \sigma)\, R_{FX}(\tau) \quad (1.35)$$

trong đó $Q_1(m, \sigma)$ và $Q_2(m, \sigma)$ được cho bởi các công thức (1.21) và (1.22)

Thay (1.34) và (1.35) vào (1.27) và (1.28) ta được hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng số đối với $R_{FX}(\tau)$ và $R_{EX}(\tau)$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{R}_{FX}(\tau) + 2h\dot{R}_{FX}(\tau) + [\omega_o^2 + \beta Q_1]\, R_{FX}(\tau) - \beta Q_2 R_{EX}(\tau) &= \alpha\omega_o^2 m R_{FG}(\tau) + R_{FF}(\tau) \\ \ddot{R}_{EX}(\tau) + 2h\dot{R}_{EX}(\tau) + [\omega_o^2 + \beta Q_1]\, R_{EX}(\tau) + \beta Q_2 R_{FX}(\tau) &= \alpha\omega_o^2 m R_{EG}(\tau) + R_{EF}(\tau) \end{aligned}\right\} \quad (1.36)$$

Áp dụng phép biến đổi Fourier vào hai vế (1.36) ta chuyển hệ này về hệ phương trình đại số đối với hàm mật độ phổ:

$$\left.\begin{aligned} (\omega_o^2 - \omega^2 + \beta Q_1 + 2hi\omega)\, S_{FX}(\omega) - \beta Q_2 S_{EX}(\omega) &= \alpha\omega_o^2 m\, S_{FG}(\omega) + S_{FF}(\omega) \\ \beta Q_2 S_{FX}(\omega) + (\omega_o^2 - \omega^2 + \beta Q_1 + 2hi\omega)\, S_{EX}(\omega) &= \alpha\omega_o^2 m\, S_{EG}(\omega) + S_{EF}(\omega) \end{aligned}\right\} \quad (1.37)$$

Từ hệ này ta tìm được.

$$S_{FX}(\omega) = \frac{[\alpha\omega_o^2 mS_{FG}(\omega)+S_{FF}(\omega)](\omega_o^2-\omega^2+\beta Q_1+2hi\omega)+[\alpha\omega_o^2 m S_{EG}(\omega)+S_{EF}(\omega)]\beta Q_2}{(\omega_o^2-\omega^2+\beta Q_1+2hi\omega)^2+\beta^2 Q_2^2} \tag{1.38}$$

$$S_{EX}(\omega) = \frac{[\alpha\omega_o^2 mS_{EG}(\omega)+S_{EF}(\omega)](\omega_o^2-\omega^2+\beta Q_1+2hi\omega)-[\alpha\omega_o^2 mS_{FG}(\omega)+S_{FF}(\omega)]\beta Q_2}{(\omega_o^2-\omega^2+\beta Q_1+2hi\omega)^2+\beta^2 Q_2^2} \tag{1.39}$$

Nhân hai vế phương trình (1.3) với $X(t_1)$ và $Y(t_1)$ sau đó lấy kỳ vọng hai vế phương trình mới nhận được, ta đưa đến hai phương trình sau đây

$$\ddot{R}_{XX}(\tau) + 2h\dot{R}_{XX}(\tau) + \omega_o^2 R_{XX}(\tau) + \beta I[R_{XX}(\tau), R_{XY}(\tau)] = \alpha\omega_o^2 mR_{GX}(-\tau) + R_{FX}(-\tau) \tag{1.40}$$

$$R''_{XY}(\tau_1) - 2hR'_{XY}(\tau_1) + \omega_o^2 R_{XY}(\tau_1) + \beta K[R_{XY}(\tau_1), R_{YY}(\tau_1)] = \alpha\omega_o^2 mR_{GY}(\tau_1)+R_{FY}(\tau_1) \tag{1.41}$$

trong đó $\tau_1 = t_1 - t = -\tau$

$$I[R_{XX}(\tau), R_{XY}(\tau)] = \left\langle \underset{\phi}{\rightleftarrows}(\sqrt{X^2+Y^2}, X+m)\, X(t_1)\right\rangle \tag{1.42}$$

$$K[R_{XY}(\tau_1), R_{YY}(\tau_1)] = \left\langle \underset{\phi}{\rightleftarrows}(\sqrt{X^2+Y^2}, X+m)\, Y(t_1)\right\rangle \tag{1.43}$$

Hàm mật độ phân bố xác suất $f(x, y, x_1, y_1)$, theo [6], cho dưới dạng

$$f(x, y, x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi^2\sigma^4 p^2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2 p^2}[x^2+y^2+x_1^2+y_1^2- 2k(xx_1+yy_1)-2r(x_1y-xy_1)]\right\} \tag{1.44}$$

Với

$$k(\tau_1) = \frac{R_{XX}(\tau_1)}{\sigma^2},\ r(\tau_1) = \frac{R_{XY}(\tau_1)}{\sigma^2},\ p^2(\tau_1) = 1-k^2(\tau_1)-r^2(\tau_1) \tag{1.45}$$

Sau khi thay (1.44) vào (1.42) và (1.43), tức là tính các tích phân sau

$$\iiiint_{-\infty}^{\infty} \underset{\phi}{\rightleftarrows}(\sqrt{x^2+y^2}, x+m)\, x_1 f(x, y, x_1, y_1)\, dx\, dy\, dx_1\, dy_1;$$

$$\iiiint_{-\infty}^{\infty} \underset{\phi}{\rightleftarrows}(\sqrt{x^2+y^2}, x+m)\, y_1 f(x, y, x_1, y_1)\, dx\, dy\, dx_1\, dy_1.$$

và chú ý rằng

$$R_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau_1) = R_{YY}(\tau_1);\ R_{XY}(\tau) = -R_{XY}(\tau_1)$$

[illegible]n được

$$I[R_{XX}(\tau), R_{XY}(\tau)] = Q_1(m,\sigma)R_{XX}(\tau) - Q_2(m,\sigma)R_{XY}(\tau) \tag{1.46}$$

$$K[R_{XY}(\tau_1), R_{YY}(\tau_1)] = -Q_1(m,\sigma)R_{XY}(\tau_1) + Q_2(m,\sigma)R_{XX}(\tau_1) \tag{1.47}$$

Do đó các phương trình (1.40) và (1.41) trở thành

$$\begin{cases} \ddot{R}_{XX}(\tau) + 2h\dot{R}_{XX}(\tau) + [\omega_o^2 + \beta Q_1] R_{XX}(\tau) - \beta Q_2 R_{XY}(\tau) = \alpha\omega_o^2 m R_{GX}(-\tau) + R_{FX}(- & (1. \\ \ddot{R}_{XY}(\tau_1) - 2h\dot{R}_{XY}(\tau_1) + [\omega_o^2 - \beta Q_1] R_{XY}(\tau_1) + \beta Q_2 R_{XX}(\tau_1) = -\alpha\omega_o^2 m R_{HX}(\tau_1) - R_{EX}(& (1. \end{cases}$$

Trong phương trình (1,49) ta đã thay $R_{GY}(\tau_1)$ và $R_{FY}(\tau_1)$ bởi $R_{HX}(\tau_1)$ và $R_{EX}(\tau_1)$. Áp dụng phép biến đổi Fourier vào hai vế phương trình (1. 48) và (1,49) ta nh được :

$$\left.\begin{aligned} &(\omega_o^2 - \omega^2 + \beta Q_1 + 2hi\omega) S_{xx}(\omega) - \beta Q_2 S_{XY}(\omega) = \alpha\omega_o^2 m S_{GX}(-\omega) + S_{FX}(-\omega) \\ &\beta Q_2 S_{xx}(\omega) + (\omega_o^2 - \omega^2 - \beta Q_1 - 2hi\omega) S_{XY}(\omega) = -\alpha\omega_o^2 m S_{HX}(\omega) - S_{EX}(\omega) \end{aligned}\right\} \quad (1.5$$

Từ đó ta tìm được :

$$S_{xx} = \frac{[\alpha\omega_o^2 m S_{GX}(-\omega) + S_{FX}(-\omega)](\omega_o^2 - \omega^2 - \beta Q_1 - 2hi\omega) - \beta Q_2[\alpha\omega_o^2 m S_{HX}(\omega) + S_{EX}(\omega)}{(\omega_o^2 - \omega^2 + \beta Q_1 + 2hi\omega)(\omega_o^2 - \omega^2 - \beta Q_1 - 2hi\omega) + \beta^2 Q_2^2} \quad (1.51$$

Trong công thức (1.51) các hàm mật độ phổ có mặt ở tử số đã tìm được trong các tính toán trước đây. Sau khi thay các biểu thức (1.25), (1.26), (1.38) v (1.39) vào ((1.51), qua quá trình biến đổi ta tìm được hệ thức :

$$S_{xx}(\omega) =$$

$$\frac{A + D}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 (2hi\omega + \beta Q_1)^2 + \beta^2 Q_2^2} \left\{ \alpha^2\omega_o^4 m^2 S_{GG}(\omega) + S_{FF}(\omega) + \left[S_{FG}(\omega) + S_{FG}(-\omega) \right] \alpha\omega_o^2 m \right\} -$$

$$\frac{B + C}{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 - (2hi\omega + \beta Q_1)^2 + \beta^2 Q_2^2} \left\{ \alpha^2\omega_o^4 m^2 S_{HG}(\omega) + S_{EF}(\omega) + \alpha\omega_o^2 m \left[S_{EG}(\omega) - S_{EG}(-\omega) \right] \right\} \quad (1.52)$$

trong đó

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{(\omega_o^2 - \omega^2 - 2hi\omega)^2 - \beta^2 Q_1^2}{(\omega_o^2 - \omega^2 + \beta Q_1 - 2hi\omega)^2 + \beta^2 Q_2^2} \\ B &= \frac{\beta Q_2 (\omega_o^2 - \omega^2 - \beta Q_1 - 2hi\omega)}{(\omega_o^2 - \omega^2 + \beta Q_1 - 2hi\omega)^2 + \beta^2 Q_2^2} \\ C &= \frac{\beta Q_2 (\omega_o^2 - \omega^2 + \beta Q_1 + 2hi\omega)}{(\omega_o^2 - \omega^2 + \beta Q_1 + 2hi\omega)^2 + \beta^2 Q_2^2} \\ D &= \frac{\beta^2 Q_2^2}{(\omega_o^2 - \omega^2 + \beta Q_1 + 2hi\omega)^2 + \beta^2 Q_2^2} \end{aligned}\right\} \quad (1.53)$$

Trong hệ thức (1.52) nếu ta tách phần thực và phần ảo của $S_{XX}(\omega)$, từ biểu thức tổng quát ấy ta có thể chứng minh được rằng, phần thực của $S_{XX}(\omega)$ tức là $\mathrm{Re}S_{XX}(\omega)$ là hàm chẵn của ω, còn phần ảo $\mathrm{Im}S_{XX}(\omega)$ là hàm lẻ của ω. Vì vậy khi tìm phương sai của quá trình nghiệm tích phân phần ảo từ $-\infty$ đến $+\infty$ bằng không và ta còn lại

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re}S_{XX}(\omega)d\omega \qquad (1.54)$$

Cũng bằng lý luận tương tự, ta tìm được công thức sau đây để xác định hàm tương quan của quá trình nghiệm

$$R_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_{XX}(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} [\cos\omega\tau \,.\, \mathrm{Re}\, S_{XX}(\omega) + \mathrm{Sin}\omega\tau \,.\, \mathrm{Im}\, S_{XX}(\omega)]\, d\omega \qquad (1.55)$$

Trên đây chúng ta đã trình bày phần lý thuyết tổng quát, còn các trường hợp riêng và ví dụ sẽ được khảo sát trong phần sau.

Địa chỉ
Viện Cơ học, Viện KHVN

Nhận ngày 10/1/1979

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. N. R. Iyengar. P. X. Dash
Random Vibration Analisis oF Stochastic time-varying Systems « J. of Sound and Vibration » 1976, 45 (1), 69—89.

2. F. Y. M. Wan Nonstationary Response of linear time-varying dynamical Systems to Random Excitation
Trans. ASME « Appl. Mechanics » N° 2. 1973 (vol. 40)

3. M. F. Dimentberg Response of a non — linearly damped oscillator to combined periodic parametric and random external excitation « Int. J. Non—linear Mech ». Vol 11, N° 1, 1976.

4. S. T. Ariaratnam Dynamic stability of a column under random loading. Trong quyền « Dynamic stability of structure » New York 1967

5. Nguyễn cao Mệnh Dao động ngẫu nhiên của hệ động lực với đặc trưng trễ. (Tuyển tập các công trình nghiên cứu Cơ học—1978, phòng Cơ học).

6. A. A. Свешников Прикладные методы теории случайных функций. Ленинград 1961

7. S. H. Crandall. W. D. Mark. Random Vibrations in mechanical systems. Academic press. Newyork—London 1963

SUMMARY

THE OSCILLATIONS OF THE DYNAMICAL SYSTEMS WITH HYSTERESIS CHARACTERISTICS EXCITED BY STOCHASTIC PARAMETER AND FORCES. I.

In this paper, the nonlinear mechanical system with imperfect elastic characteristics excited by parameter and external forces in the form of stationary Gaussian stochastic processes is considered

Heuristic and enveloped methods in a similar way as in the paper [5] are used. The closed differential equation system with constant coefficients is established to ditermine the statistical characteristics of solution process.