Tạp chí CƠ HỌC 1979 số 1 – 2 (trang 28 ÷ 36)

VỀ VẤN ĐỀ KHẢO SÁT PHƯƠNG TRÌNH FOKKER – PLANCK – KOLMOGOROV BẰNG PHƯƠNG PHÁP KHAI TRIỂN CHUỖI MACLOREN THEO TỌA ĐỘ ẨN

NGUYỄN ĐÔNG ANH

TRONG lý thuyết quá trình ngẫu nhiên trong các hệ động lực phương pháp dựa trên những phương trình FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROV có một vai trò rất quan trọng. Tuy vậy việc khảo sát dao động ngẫu nhiên bằng phương pháp này gặp một khó khăn cơ bản do phải giải phương trình đạo hàm riêng cấp hai có các hệ số phụ thuộc phức tạp vào các tọa độ. Trong bài báo này đề cập một phương pháp giải phương trình FPK. Nội dung của phương pháp này như sau :

Giả thử trong không gian tọa độ pha $(q_1, q_2,.., q_n)$ ta xét các hệ cơ học Σ. Mỗi hệ cơ học này thường được đặc trưng bởi một nhóm tham số nào đó A_i, Trong trường hợp tổng quát các tham số A_i là các hàm số tùy ý của các tọa độ pha $A_i = A_i\,(q_1,.., q_n)$. Giữa các hệ cơ học Σ ta lấy ra một lớp hệ cơ học có tính chất sau: đối với mỗi một hệ cơ học thuộc lớp này tồn tại một tọa độ pha nào đó mà không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết là q_n sao cho các khai triển Macloren theo biến q_n của các tham số A_i của hệ cơ học đang xét là hữu hạn

$$A_i\,(q_1, .., q_n) = \sum_{j=0}^{K_i} B_j\,(q_1,.., q_{n-1})\, q_n^j$$

Tọa độ q_n ta sẽ gọi là tọa độ ẩn còn hệ cơ học tương ứng sẽ gọi là hệ cơ học có chứa tọa độ ẩn. Chẳng hạn ta xét hệ cơ học một bậc tự do có lực cản nhớt và đàn hồi phi tuyến

$$\ddot{x} + g_1(x)\,\dot{x} + g_o(x) = 0$$

Các tham số đặc trưng của hệ này là $g_1(x)\,\dot{x},\ g_o(x)$. Dễ dàng thấy rằng đối với hệ này vận tốc $\dot{x}$ sẽ là tọa độ ẩn vì các khai triển của A_1, A_2 theo vận tốc $\dot{x}$ là hữu hạn.

Theo phương pháp khai triển chuỗi Macloren theo tọa độ ẩn các đặc trưng xác suất của đáp ứng ngẫu nhiên sẽ được tìm ở dạng khai triển chuỗi Macloren theo tọa độ ẩn. Giữa các khai triển này ta đặc biệt quan tâm tới các khai triển hữu hạn. Các đặc trưng xác suất tương ứng với các khai triển hữu hạn này ta sẽ gọi là đặc trưng xác suất ẩn. Việc đưa vào khái niệm tọa độ ẩn trong nhiều trường hợp cho phép dẫn bài toán n-chiều về bài toán (n—1)-chiều. Trong cơ học giải tích định nghĩa quen thuộc về tọa độ ẩn là trường hợp riêng của định nghĩa nêu trên ($K_i = 0$). Như đã biết nếu một hệ cơ học hôlônôm thế năng chứa tọa độ ẩn q_n hay nói khác đi nếu hàm Hamilton H có khai triển bậc không đối với tọa độ ẩn q_n $\left(\frac{\partial H}{\partial q_n} = 0\right)$ thì hệ cơ học này sẽ cho một tích phân ẩn $p_n = \text{const}$.

§1. HỆ CƠ HỌC MỘT BẬC TỰ DO PHI TUYẾN

Ta xét một hệ cơ học một bậc tự do phi tuyến chịu lực kích động ngẫu nhiên ồn trắng được mô tả bởi phương trình sau

$$\ddot{x} + g(x, \dot{x}) = \xi(t) \tag{1}$$

trong đó $\xi(t)$ — kích động ngẫu nhiên ồn trắng có cường độ D. Giả thiết rằng hệ cơ học đang xét có chứa tọa độ ẩn x và hàm $g(x, \dot{x})$ có khai triển sau

$$g(x, \dot{x}) = g_0(x) + g_1(x)\dot{x} + \varepsilon g_2(x)\dot{x}^2 \tag{2}$$

Phương trình FPK đề cho hàm logarit của mật độ dừng $p = \ln W$ của hệ (1), (2) có dạng sau

$$\dot{x}\frac{\partial p}{\partial x} - g(x, \dot{x})\frac{\partial p}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} - \frac{D}{2}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial \dot{x}^2} + \left(\frac{\partial p}{\partial \dot{x}}\right)^2\right) = 0 \tag{3}$$

Nghiệm của phương trình này theo phương pháp khai triển chuỗi Macloren theo tọa độ ẩn sẽ tìm ở dạng sau

$$p(x, \dot{x}) = f_0(x) + f_1(x)\dot{x} + f_2(x)\dot{x}^2 \tag{4}$$

Thay (4) vào (3) ta nhận được hệ phương trình sau ([6])

$$\begin{cases} f_1 g_0 - \dfrac{D}{2} f_1^2 - Df_2 - g_1 = 0 \\ f'_0 - 2g_0 f_2 - 2D f_1 f_2 - 2\varepsilon g_2 - g_1 f_1 = 0 \\ f'_1 - \varepsilon g_2 f_1 - 2g_1 f_2 - 2Df_2^2 = 0 \\ f'_2 - 2\varepsilon g_2 f_2 = 0, \quad (') = \dfrac{d}{dx} \end{cases} \tag{5}$$

Điều kiện để cho hệ (5) là tương thích như sau

$$g'_1 - 2\varepsilon g_2 g_1 = 0 \tag{6}$$

Ta sẽ giải hệ phương trình bằng phương pháp tham số bé ($\varepsilon \ll 1$). Trong gần đúng bậc không ta có

$$\begin{cases} f_{10} g_0 - \dfrac{D}{2} f_{10}^2 - Df_{20} - g_{10} = 0 \\ f'_{00} - 2g_0 f_{20} - 2D f_{10} f_{20} - g_{10} f_{10} = 0 \\ f'_{10} - 2 g_{10} f_{20} - 2D f_{20}^2 = 0 \\ f'_{20} = 0, \quad g'_{10} = 0 \end{cases}$$

Từ đó

$$f_{20} = -\frac{\beta}{D}; \; g_{10} = \beta; \; f_{10} = 0; \; f_{00} = -\frac{2\beta}{D}\int^{x} g_o(x)\,dx \tag{7}$$

Trong gần đúng bậc nhất ta có tiếp

$$\begin{cases} f'_{01} - 2g_o f_{21} - 2D f_{11} f_{20} - 2g_2 - g_{10} f_{11} = 0 \\ f'_{11} - 2g_{10} f_{21} - 2g_{11} f_{20} - 4D f_{21} f_{20} = 0 \\ f'_{21} - 2g_2 f_{20} = 0 \\ g'_{11} - 2g_2 g_{10} = 0 \end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$\begin{cases} f_{21} = -\dfrac{2\beta}{D}\displaystyle\int^{x} g_2(x)\,dx, \; g_{11} = 2\beta\int^{x} g_2(x)\,dx \\ f_{11} = 0, \; f_{01} = 2\displaystyle\int^{x}\Big(g_2(x) - \frac{2\beta}{D} g_o \int^{x} g_2(x)\,dx\Big)dx \end{cases} \tag{8}$$

Thay (7), (8) vào (4) ta nhận được nghiệm gần đúng bậc nhất của phương trình FPK (3) như sau

$$p(x, \dot{x}) = -\frac{2\beta}{D}\Big\{\int^{x}\Big[g_o + 2\varepsilon g_o\int^{x} g_2\,dx - \frac{\varepsilon D}{\beta} g_2\Big]dx + \Big(\frac{1}{2} + \varepsilon\int^{x} g_2\,dx\Big)\dot{x}^2\Big\} \tag{9}$$

Như vậy ta có định lý sau

Định lý 1. *Ta xét hệ động lực một bậc tự do dưới tác dụng của lực ngẫu nhiên ồn trắng*

$$\ddot{x} + \Big(\beta + 2\beta\varepsilon\int^{x} g_2(x)\,dx\Big)\dot{x} + \varepsilon g_2(x)\dot{x}^2 + g_o(x) = \xi(t) \tag{10}$$

trong đó ε *— tham số bé. Khi đó mật độ xác suất dừng* $W(x, \dot{x})$ *của hệ (10) trong gần đúng bậc nhất sẽ là* $W = C\,e^{p}$ *với* p *có dạng (9).*

Ta chú ý rằng trong trường hợp khi $\varepsilon = 0$ nghiệm (9) trở thành nghiệm đúng [3, 6].

§ 2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN NGẪU NHIÊN BẬC BA

Trong thời gian gần đây phương trình vi phân bậc ba càng được nhiều người quan tâm đến do có nhiều vấn đề của khoa học và kỹ thuật dẫn đến các phương trình này [4, 5]. Ta xét phương trình vi phân ngẫu nhiên bậc ba.

$$\dddot{x} + f(\ddot{x}, \dot{x}, x) = \xi(t) \tag{11}$$

trong đó $\xi(t)$ — kích động ngẫu nhiên ồn trắng có cường độ D. Giả thiết rằng (11) có chứa tọa độ ẩn «gia tốc» $\ddot{x}$ và khai triển chuỗi Macloren của hàm f theo tọa độ ẩn có dạng

$$f(\ddot{x}, \dot{x}, x) = \alpha \ddot{x} + B(\dot{x}, x), \alpha > 0 \tag{12}$$

Phương trình FPK ứng với mật độ xác suất dừng $W(\ddot{x}, \dot{x}, x)$ của (11) sẽ là [1, 2]

$$\frac{\partial W}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial W}{\partial \dot{x}}\ddot{x} - \frac{\partial}{\partial \ddot{x}}[W(\alpha\ddot{x} + B(\dot{x}, x)] - \frac{D}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial \ddot{x}^2} = 0 \tag{13}$$

Hay để cho dạng lũy thừa của mật độ xác suất

$$W(\ddot{x}, \dot{x}, x) = C\exp\{P(\ddot{x}, \dot{x}, x)\} \tag{14}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial P}{\partial \dot{x}}\ddot{x} - \frac{\partial P}{\partial \ddot{x}}(\alpha\ddot{x} + B(\dot{x}, x)) - \alpha - \frac{D}{2}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial \ddot{x}^2} + \left(\frac{\partial P}{\partial \ddot{x}}\right)^2\right] = 0 \tag{15}$$

Theo phương pháp khai triển chuỗi Macloren theo tọa độ ẩn nghiệm của phương trình (15) ta sẽ tìm ở dạng

$$p(\ddot{x}, \dot{x}, x) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(x, \dot{x})\ddot{x}^i \tag{16}$$

Giữa những lời giải dạng (16) ta đặc biệt quan tâm tới các nghiệm ẩn, tức là các nghiệm có khai triển (16) hữu hạn

$$p(\ddot{x}, \dot{x}; x) = \sum_{i=0}^{m} \varphi_i(x, \dot{x})\ddot{x}^i \tag{17}$$

Thay (17) vào phương trình (15). Số m sẽ được tìm ở điều kiện sao cho sau khi thay vế trái của phương trình (15) là đa thức bậc m đối với tọa độ ẩn $\ddot{x}$. Khi đó ta nhận được điều kiện sau

$$2(m-1) = m \tag{18}$$

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{19}$$

Suy ra

$$m = 2, \frac{\partial \varphi_2}{\partial \dot{x}} = 0$$

Từ điều kiện (19) nghiệm ẩn của phương trình (15) sẽ có dạng

$$p(\ddot{x}, \dot{x}, x) = \varphi_0(x, \dot{x}) + \varphi_1(x, \dot{x})\ddot{x} + \varphi_2(x)\ddot{x}^2 \tag{20}$$

Thay (20) vào (15) ta nhận được

$$\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\ddot{x} + \frac{d\varphi_2}{dx}\ddot{x}^2\right)\dot{x} + \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial \dot{x}}\ddot{x}\right)\ddot{x} - (\varphi_1 + 2\varphi_2\ddot{x})(\alpha\ddot{x} + B(\dot{x}, x)) -$$

$$- \alpha - \frac{D}{2}[2\varphi_2 + \varphi_1^2 + 4\varphi_1\varphi_2\ddot{x} + 4\varphi_2^2\ddot{x}^2] = 0$$

từ đó ta có hệ phương trình sau để xác định φ_o, φ_1, φ_2

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_o}{\partial x}\dot{x} - \varphi_1 B - \alpha - D\varphi_2 - \dfrac{D}{2}\varphi_1^2 = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\dot{x} + \dfrac{\partial\varphi_o}{\partial\dot{x}} - \alpha\varphi_1 - 2\varphi_2 B - 2D\varphi_1\varphi_2 = 0 \\ \dfrac{d\varphi_2}{dx}\dot{x} + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\dot{x}} - 2\alpha\varphi_2 - 2D\varphi_2^2 = 0 \end{cases} \tag{21}$$

Sau khi biến đổi hệ (21) được đưa về dạng

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_o}{\partial x}\dot{x} - (\alpha+D\varphi_2) - \varphi_1\left(B + \dfrac{D}{2}\varphi_1\right) = 0 \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\dot{x} + \dfrac{\partial\varphi_o}{\partial\dot{x}} - \varphi_1(\alpha+D\varphi_2) - 2\varphi_2 B - D\varphi_1\varphi_2 = 0 \\ \dfrac{d\varphi_2}{dx}\dot{x} + \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial\dot{x}} - 2\varphi_2(\alpha+D\varphi_2) = 0 \end{cases} \tag{22}$$

Từ phương trình thứ ba dễ dàng suy ra rằng ta có thể đặt

$$\varphi_1(x, \dot{x}) = 2\alpha D^{-1} g_o(x) + g_2(x)\dot{x}^2 \tag{23}$$

Sau khi thay vào phương trình thứ ba ta có

$$\left(\frac{d\varphi_2}{dx} + 2g_2\right)\dot{x} - 2\varphi_2(\alpha+D\varphi_2) = 0$$

Từ đó

$$\varphi_2 = -\frac{\alpha}{D}, \quad g_2 = 0 \tag{24}$$

và

$$\varphi_1(x, \dot{x}) = \frac{2\alpha}{D} g_o(x)$$

Thay (24), (25) vào phương trình thứ hai của hệ (22) ta có

$$\frac{2\alpha}{D}\frac{dg_o}{dx}\dot{x} + \frac{\partial\varphi_o}{\partial\dot{x}} + 2\alpha\frac{B}{D} + \frac{2\alpha^2}{D} g_o = 0$$

từ đó suy ra

$$\varphi_o(x, \dot{x}) = -2\frac{\alpha}{D}\int^{\dot{x}} B(x, \dot{x})d\dot{x} - \frac{\alpha}{D}\frac{dg_o}{dx}\dot{x}^2 - \frac{2\alpha^2}{D} g_o\dot{x} + H_o(x) \tag{26}$$

Sau hết thay (26) vào phương trình thứ nhất của hệ (22) ta nhận được

$$\dot{x}\int^{\dot{x}}\frac{\partial B}{\partial x} d\dot{x} + g_o B = -\frac{1}{2}\frac{d^2g_o}{dx^2}\dot{x}^3 - \alpha\frac{dg_o}{dx}\dot{x}^2 + \frac{D}{2\alpha}\frac{dH_o}{dx}\dot{x} - \alpha g_o^2. \tag{27}$$

Như vậy hàm số chưa biết B phải thỏa mãn phương trình (27). Nếu ta đặt

$$\int^{\dot{x}} B(\dot{x}, x)\, d\dot{x} = S(x, \dot{x}) \tag{28}$$

khi ấy

$$B(\dot{x}, x) = \frac{\partial S}{\partial \dot{x}} \tag{29}$$

và phương trình (27) sẽ trở thành phương trình đạo hàm riêng bậc nhất

$$\dot{x}\frac{\partial S}{\partial x} + g_0(x)\frac{\partial S}{\partial \dot{x}} = -\frac{1}{2}\frac{d^2 g_0}{dx^2}\dot{x}^3 - \alpha\frac{dg_0}{dx}\dot{x}^2 + \frac{D}{2\alpha}\frac{dH_0}{dx}\dot{x} - \alpha g_0^2, \tag{30}$$

Nếu hàm $S(x, \dot{x})$ có thể tìm được thì từ (26) ta sẽ có

$$\varphi_0(\dot{x}, x) = -2\frac{\alpha}{D}S - \frac{\alpha}{D}\frac{dg_0}{dx}\dot{x}^2 - \frac{2\alpha^2}{D}g_0\dot{x} + H_0(x) \tag{31}$$

và biểu thức (20) sau khi kể đến (31), (25) sẽ có dạng

$$p(\ddot{x}, \dot{x}, x) = -2\frac{\alpha}{D}S - \frac{\alpha}{D}\frac{dg_0}{dx}\dot{x}^2 - \frac{2\alpha^2}{D}g_0\dot{x} + H_0(x) + \frac{2\alpha}{D}g_0\ddot{x} - \frac{\alpha}{D}\ddot{x}^2 \tag{32}$$

Bây giờ ta trở lại phương trình đạo hàm riêng cấp một (30), nghiệm của nó có thể biểu diễn ở dạng

$$S(x, \dot{x}) = S_0(\dot{x}, x) + S_1(\dot{x}, x) \tag{33}$$

trong đó S_0 — nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất

$$\dot{x}\frac{\partial S_0}{\partial x} + g_0(x)\frac{\partial S_0}{\partial \dot{x}} = 0 \tag{34}$$

còn S_1 — nghiệm riêng của phương trình (30). Dễ dàng thấy rằng nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (34) sẽ là

$$S_0(x, \dot{x}) = \Phi\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \int^{x} g_0(x)\, dx\right) \tag{35}$$

trong đó $\Phi(S)$ — hàm một biến khả vi tùy ý. Nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất (30) sẽ được tìm ở dạng sau

$$S_1(x, \dot{x}) = \frac{\sigma}{4}\dot{x}^4 + \frac{\gamma}{3}\dot{x}^3 + a(x)\dot{x}^2 + b(x)\dot{x}$$

Thay (36) vào (30) ta nhận được

$$\dot{x}\left(\frac{da}{dx}\dot{x}^2 + \frac{db}{dx}\dot{x}\right) + g_0(\sigma\dot{x}^3 + \gamma\dot{x}^2 + 2a(x)\dot{x} + b(x)) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d^2 g_0}{dx^2}\dot{x}^3 - \alpha\frac{dg_0}{dx}\dot{x}^2 + \frac{D}{2\alpha}\frac{dH_0}{dx}\dot{x} - \alpha g_0^2$$

từ đó

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dx} + \sigma g_o(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2 g_o}{dx^2} \\ \dfrac{db}{dx} + \gamma g_o(x) = -\alpha \dfrac{dg_o}{dx} \\ 2g_o(x)\, a(x) = \dfrac{D}{2\alpha}\dfrac{dH_o}{dx} \\ g_o(x)\, b(x) = -\alpha g_o^2 \end{cases}$$

suy ra

$$\begin{cases} b(x) = -\alpha g_o(x), \ \gamma = 0, \\ a(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{dg_o}{dx} - \sigma \displaystyle\int^x g_o(x)\,dx + \mu, \ \mu = \text{const}, \\ H_o(x) = -\dfrac{\alpha}{D} g_o^2(x) - \dfrac{2\alpha\sigma}{D}\left(\displaystyle\int^x g_o(x)\,dx\right)^2 + \dfrac{4\alpha\mu}{D}\displaystyle\int^x g_o(x)\,dx \end{cases} \tag{37}$$

Như vậy sau khi kể đến (37), (36), (35), (33) ta nhận được biểu thức sau đây để cho $S(x, \dot{x})$

$$S(x, \dot{x}) = \Phi\left(\frac{1}{2}\dot{x}^2 - \int^x g_o(x)\,dx\right) + \frac{\sigma}{4}\dot{x}^4 - \left(\frac{1}{2}\frac{dg_o}{dx} + \right.$$

$$\left. + \sigma\int^x g_o(x)\,dx - \mu\right)\dot{x}^2 - \alpha g_o(x)\,\dot{x} \tag{38}$$

Sau khi thay giá trị của S vào đẳng thức (29) ta nhận được

$$B(x, \dot{x}) = \sigma\dot{x}^3 - \left(\frac{dg_o}{dx} + 2\sigma\int^x g_o(x)\,dx - 2\mu\right)\dot{x} -$$

$$- \alpha g_o(x) + \frac{\partial\Phi(s)}{\partial S}\dot{x} \tag{39}$$

với

$$S = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int^x g_o(x)\,dx \tag{40}$$

Nghiệm dừng ẩn của phương trình (15) ta sẽ nhận được nếu thay biểu thức của $S(x, \dot{x})$, $H_o(x)$ từ (38) và (37) vào đẳng thức (32). Sau hết nghiệm dừng ẩn của phương trình Fokker — Planck — Kolmogorov (13) sẽ bằng

$$
\begin{aligned}
W(\ddot{x}, \dot{x}, x) = \mathrm{h}\exp\Big\{ & -\frac{\alpha\sigma}{2D}\dot{x}^4 + \Big(\frac{2\alpha\sigma}{D}\int^{x} g_o(x)\,dx - \\
& -\frac{2\alpha\mu}{D}\Big)\dot{x}^2 - 2\frac{\alpha}{D}\Phi\Big(\frac{\dot{x}^2}{2} - \int^{x} g_o(x)\,dx\Big) - \frac{\alpha}{D} g_o^2(x) - \\
& -\frac{2\alpha\sigma}{D}\Big(\int^{x} g_o(x)\,dx\Big)^2 + \frac{4\alpha\mu}{D}\int^{x} g_o(x)\,dx + \\
& + \frac{2\alpha}{D} g_o(x)\ddot{x} - \frac{\alpha}{D}\ddot{x}^2\Big\}
\end{aligned} \tag{41}
$$

trong đó h = const. với giả thiết rằng các hàm số Φ, g_o phải thỏa mãn sao cho hàm số $W(x, \ddot{x}, \dot{x})$ (41) có mọi tính chất của hàm mật độ xác suất tức là sao cho

$$
W(\ddot{x}, \dot{x}, x)_{x = \pm\infty} = W(\ddot{x}, \dot{x}, x)_{\dot{x} = \pm\infty} = 0
$$

$$
\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} W(\ddot{x}, \dot{x}, x)\,dx\,d\dot{x}\,d\ddot{x} < \infty
$$

Tóm lại ta nhận được định lý sau

Định lý 2: *Ta xét phương trình vi phân ngẫu nhiên bậc ba*

$$
\begin{aligned}
\dddot{x} + \alpha\ddot{x} + \sigma\dot{x}^3 - \Big(\frac{dg_o}{dx} + 2\sigma\int^{x} g_o(x)\,dx - 2\mu\Big)\dot{x} - \\
-\alpha g_o(x) + \frac{\partial\Phi(s)}{\partial S}\dot{x} = \xi(t)
\end{aligned} \tag{42}
$$

trong đó $S = \dfrac{\dot{x}^2}{2} - \int^{x} g(x)\,dx$, *$\xi(t)$—kích động ngẫu nhiên ồn trắng có cường độ D. Khi đó mật độ xác suất dừng tương thích của các đại lượng đáp ứng ngẫu nhiên x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ sẽ bằng (41).*

Địa chỉ
Viện Cơ học, Viện KHVN

Nhận ngày 20/1/1979

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Mitropiski Iu. A.** Phương pháp trung bình trong cơ học phi tuyến. Kiep 1971.
2. **Krasopski A. A.** Không gian pha và lí thuyết thống kê của các hệ động lực. Mascova 1974.

3. **Soong T. T.** Randon differential equations in sciences and engineering. New — York 1973.

4. **Nguyên văn Đạo.** Dao động cưỡng bức trong hệ phi tuyến cấp ba có tự kích thích. Tuyển tập các công trình nghiên cứu cơ học. Phòng Cơ học, Viện Khoa học Việt nam, Hà nội 1978.

5. **Nguyễn văn Đạo.** Non-linear oscillations in third order systems. VIII th International conference on non-linear oscillations. Prague, September 11-15, 1978.

6. **Nguyễn đông Anh.** Khảo sát dao động ngẫu nhiên bằng phương pháp phương trình Fokker — Planck—Kolmogorov. Tuyển tập các công trình nghiên cứu cơ học. Phòng Cơ học, Viện Khoa học Việt nam, Hà nội 1978.

RÉSUMÉ

ÉTUDE DES ÉQUATIONS FOKKER — PLANCK — KOLMOGOROV PAR MÉTHODE D'UN DÉVELOPEMENT EN SÉRIE MAC—LAURIN À COORDINATE CYCLIQUE

Dans la théorie des stochastique processus des systèmes dynamiques, la méthode des équations Fokker—Planck—Kolmogorov a un rôle de grande importance. En appliquant cette méthode on rencontre une grande difficulté parce qu'il faut résolver des équations differentielles aux dérivées partielles du second ordre avec les coefficieles dépandants des coordinates. Dans cet article on étudie des équatioss FPK par une méthode, qui s'appelle la méthode d'un dévelopement en série Mac — Laurin à coordinate cyclique. Dans le résultat on a reçu une classe des équations FPK pour qu'on peut écrire tout de suite ses solutions.

HỘI NGHỊ LẦN THỨ NĂM VIỆN TRƯỞNG VIỆN CƠ HỌC THUỘC VIỆN HÀN LÂM KHOA HỌC CÁC NƯỚC XHCN

Từ ngày 1—4-7-1979 tại ngoại ô Beclin đã tiến hành hội nghị nói trên với các nội dung chính như sau :

— Những kết quả cơ bản và triển vọng nghiên cứu về đề tài Động lực học hệ vật rắn, dao động và độ tin cậy của các công trình, điều khiển và tối ưu hóa hệ cơ học.

— Nội dung và hình thức hợp tác nhiều bên trong lĩnh vực cơ học giữa các viện hàn lâm khoa học các nước XHCN.

— Thông báo những kết quả nghiên cứu quan trọng nhất có thể đưa vào sản xuất và các thiết bị thí nghiệm, các chương trình mẫu đã có dùng trong nghiên cứu cơ học ở các nước XHCN.

— Kế hoạch mở các lớp chuyên đề, các hội nghị Cơ học 1981—1985.

Đoàn đại biểu V.N. do đ/c Nguyễn Văn Đạo, viện trưởng viện Cơ học thuộc viện khoa học V.N., làm trưởng đoàn đã tham dự hội nghị. Toàn thể hội nghị đã nhất trí quyết nghị tăng cường giúp đỡ viện khoa học V.N. trong việc đào tạo cán bộ, thông tin cơ học và xây dựng các cơ sở thực nghiệm cơ học.