Tạp chí CƠ HỌC 1979 số 1 - 2 (trang 20 - 27)

VỀ VẤN ĐỀ KHẢO SÁT PHƯƠNG TRÌNH FOKKER – PLANCK – KOLMOGOROV BẰNG PHƯƠNG PHÁP THAM SỐ ĐIỀU KHIỂN

NGUYỄN ĐÔNG ANH

HIỆN nay việc nghiên cứu dao động ngẫu nhiên trong các hệ động lực, chịu kích động ngẫu nhiên có một ý nghĩa lý thuyết và ứng dụng to lớn. Phương pháp phương trình Fokker — Planck — Kolmogorov là một trong những phương pháp cơ bản để nghiên cứu dao động ngẫu nhiên. Theo phương pháp này để tìm các đặc trưng xác suất của đáp ứng ngẫu nhiên cần phải giải một phương trình đạo hàm riêng cấp hai. Đây là một vấn đề rất khó ([1, 2]). Trong [3] trình bày một số phương pháp giải phương trình FPK. Trong bài báo này đề cập tới vấn đề khảo sát phương trình FPK bằng một phương pháp gọi là phương pháp tham số điều khiển. Ý tưởng của phương pháp này là ở chỗ bằng cách đưa vào tham số điều khiển nào đó, phương trình FPK được thay bằng một phương trình đạo hàm riêng cấp một. Tham số điều khiển sẽ được chọn sao cho phương trình này có thể tích phân được.

§ 1. HỆ ĐỘNG LỰC PHI TUYẾN MỘT BẬC TỰ DO

Ta xét hệ động lực phi tuyến một bậc tự do dưới kích động ngẫu nhiên « ồn trắng », được mô tả bởi phương trình vi phân sau

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = \sqrt{\varepsilon}\, \xi(t) \tag{1}$$

Phương trình FPK ứng với mật độ xác suất dừng $W(x, \dot{x})$ của hệ (1) sẽ là ([1, 2])

$$\frac{\partial}{\partial x}(W\dot{x}) - \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(Wf) - \frac{\varepsilon D}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial \dot{x}^2} = 0 \tag{2}$$

trong đó D — cường độ của lực kích động

Từ (2) dễ dàng có

$$Wf = \frac{-\varepsilon D}{2}\frac{\partial W}{\partial \dot{x}} + \int^{\dot{x}} \frac{\partial}{\partial x}(W\dot{x})\, d\dot{x} \tag{3}$$

Ta đưa vào tham số điều khiển $\Lambda(x, \dot{x})$ phụ thuộc vào tọa độ và vận tốc x, $\dot{x}$ và liên hệ với W bởi điều kiện sau

$$\int^{\dot{x}} \frac{\partial}{\partial x}(W\dot{x})\, d\dot{x} = W\Lambda \tag{4}$$

hay

$$\frac{\partial}{\partial x}(W\dot{x}) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(W\Lambda) \tag{5}$$

Khi đó thay (4) vào (3) ta nhận được

$$f(\dot{x}, x) = -\frac{\varepsilon D}{2W} \cdot \frac{\partial W}{\partial \dot{x}} + \Lambda(x, \dot{x}) \tag{6}$$

Ta chú ý rằng nếu các điều kiện (6), (5) được thỏa mãn thì điều kiện (3) và suy ra phương trình FPK (2) cũng được thỏa mãn. Như vậy ta có định lý sau

Định lý 1.1

Nếu trong phương trình FPK (2) hàm số $f(x, \dot{x})$ được xác định bởi biểu thức (6) trong đó $\Lambda(x, \dot{x})$ — tham số được chọn nào đó, thì nghiệm của phương trình này sẽ được xác định từ phương trình đạo hàm riêng bậc nhất (5).

Vấn đề là ở chỗ tham số $\Lambda(x, \dot{x})$ sẽ được chọn sao cho phương trình đạo hàm riêng bậc nhất (5) có thể tích phân được. Dễ dàng thấy rằng nghiệm của phương trình (5) có thể biểu diễn ở dạng

$$W(x, \dot{x}) = \frac{1}{\dot{x}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} \tag{7}$$

?

trong đó hàm $g(x, \dot{x})$ là nghiệm của phương trình thuần nhất sau

$$\frac{\partial g}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial g}{\partial \dot{x}}\Lambda(x, \dot{x}) = 0 \tag{8}$$

Ta xét ~~trường hợp đơn giản~~ khi tham số điều khiển được chọn không phụ thuộc vào vận tốc

lai hơn

$$\Lambda(x, \dot{x}) = a(x) \tag{9}$$

khi đó phương trình (8) sẽ có dạng

$$\frac{\partial g}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial g}{\partial \dot{x}} a(x) = 0 \tag{10}$$

nghiệm của phương trình này sẽ được tìm ở dạng

$$g(x, \dot{x}) = C\exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon D}\left(\alpha_0(x) + \alpha_2(x)\dot{x}^2 + \frac{\alpha_4(x)}{4}\dot{x}^4\right)\right\},\ C = \text{const} \tag{11}$$

Thay (11) vào (10) ta nhận được hệ ba phương trình vi phân sau để xác định $\alpha_0, \alpha_2, \alpha_4$

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha_4}{dx} = 0, \quad \dfrac{d\alpha_2}{dx} - \alpha_4 a(x) = 0, \\ \dfrac{d\alpha_0}{dx} - 2\alpha_2 a(x) = 0. \end{cases}$$

Từ đó ta có

$$\begin{cases} \alpha_4 = \varepsilon\alpha, \ \alpha_2 = \beta + \varepsilon\alpha \int^x a(x)\, dx, \\ \alpha_0(x) = 2\beta \int^x a(x)\, dx + \varepsilon\alpha \left(\int^x a(x)\, dx \right)^2 \\ \alpha, \beta = \text{const.} \end{cases} \tag{12}$$

Như vậy nghiệm của phương trình (10) sẽ là

$$g(x, \dot{x}) = C \exp\left\{ -\frac{1}{\varepsilon D} \left[2\beta \int^x a(x)\, dx + \varepsilon\alpha \left(\int^x a(x)\, dx \right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\beta + \varepsilon\alpha \int^x a(x)\, dx \right) \dot{x}^2 + \frac{\varepsilon\alpha}{4} \dot{x}^4 \right] \right\} \tag{13}$$

và nghiệm của phương trình (5) được tìm theo (7)

$$W(x, \dot{x}) = \frac{C}{\varepsilon D} \left(2\beta + 2\varepsilon\alpha \int^x a(x)\, dx + \varepsilon\alpha \dot{x}^2 \right) \times \exp\left\{ -\frac{1}{\varepsilon D} \left[2\beta \int^x a(x)\, dx + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \varepsilon\alpha \left(\int^x a(x)\, dx \right)^2 + \left(\beta + \varepsilon\alpha \int^x a(x)\, dx \right) \dot{x}^2 + \frac{\varepsilon\alpha}{4} \dot{x}^4 \right] \right\} \tag{14}$$

Để cho (14) là hàm mật độ xác suất ta cần đặt các điều kiện sau

$$\beta, \alpha \geqslant 0, \qquad \beta + \varepsilon\alpha \int^x a(x)\, dx > 0$$

$$\int^x a(x)\, dx \to +\infty, \qquad x \to \pm\infty \tag{15}$$

Hàm $f(x, \dot{x})$ sẽ được tìm theo (6), (9), (14)

$$f(x, \dot{x}) = -\frac{\varepsilon^2 \alpha D \dot{x}}{2\beta + 2\varepsilon\alpha \int^x a(x)\, dx + \varepsilon\alpha \dot{x}^2} + \left(\beta + \varepsilon\alpha \int^x a(x)\, dx \right) \dot{x} + \frac{\varepsilon\alpha}{2} \dot{x}^3 + a(x) \tag{16}$$

Nếu bây giờ coi $\varepsilon \ll 1$ khi đó trong gần đúng bậc nhất ta có thể bỏ số hạng có chứa ε^2 trong biểu thức (16) và ta nhận được

$$f(x, \dot{x}) = \left(\beta + \varepsilon\alpha \int^{x} a(x)\,dx\right)\dot{x} + \frac{\varepsilon\alpha}{2}\dot{x}^3 + a(x), \quad \beta \gg 1 \tag{17}$$

Tóm lại ta có định lý sau

Định lý 1.2

Ta xét hệ động lực một bậc tự do, được mô tả bởi phương trình vi phân ngẫu nhiên sau

$$\ddot{x} + \left(\beta + \varepsilon\alpha \int^{x} a(x)\,dx\right)\dot{x} + \frac{\varepsilon\alpha}{2}\dot{x}^3 + a(x) = \sqrt{\varepsilon}\,\xi(t) \tag{18}$$

trong đó ε *— tham số bé,* $\xi(t)$ *— kích động ngẫu nhiên «ồn trắng» có cường độ D. Khi đó hàm mật độ xác suất dừng* $W(x, \dot{x})$ *của (18) trong gần đúng bậc nhất sẽ là (14)*

Trong trường hợp riêng khi

$$\int^{x} a(x)\,dx = \gamma x^2 - 1, \quad \gamma > 0 \tag{19}$$

thì phương trình (18) sẽ là

$$\ddot{x} + (\beta - \varepsilon\alpha(1 - \gamma x^2))\dot{x} + \frac{\varepsilon\alpha}{2}\dot{x}^3 + 2\gamma x = \sqrt{\varepsilon}\,\xi(t) \tag{20}$$

và nghiệm ~~gần~~ đúng bậc nhất (14) sẽ là

$$W(x, \dot{x}) = \frac{C}{\varepsilon D}(2\beta + 2\varepsilon\alpha(\gamma x^2 - 1) + \varepsilon\alpha\dot{x}^2) \times \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon D}\Big[2\beta(\gamma x^2 - 1) + \varepsilon\alpha(\gamma x^2 - 1)^2 + (\beta + \varepsilon\alpha(\gamma x^2 - 1))\dot{x}^2 + \frac{\varepsilon\alpha}{4}\dot{x}^4\Big]\right\} \tag{21}$$

đặc biệt khi $\alpha = 0$ thì phương trình (18) sẽ là

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + a(x) = \sqrt{\varepsilon}\,\xi(t)$$

khi đó nghiệm gần đúng bậc nhất (14) sẽ là nghiệm đúng và bằng ([4, 3])

$$W(x, \dot{x}) = \frac{2C\beta}{\varepsilon D}\exp\left\{-\frac{\beta}{\varepsilon D}\left(2\int^{x} a(x)\,dx + \dot{x}^2\right)\right\}$$

§ 2. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN NGẪU NHIÊN BẬC BA

Trong những năm gần đây xuất hiện rất nhiều những công trình nghiên cứu về phương trình vi phân bậc ba do có nhiều bài toán cơ học dẫn đến việc khảo sát phương trình này ([5, 6]) Tuy vậy việc nghiên cứu các phương trình vi phân bậc ba, chịu kích động ngẫu nhiên hầu như chưa được đề cập tới. Ta xét phương trình vi phân ngẫu nhiên bậc ba $\sqrt{\varepsilon}$.

$$\dddot{x} + f(\ddot{x}, \dot{x}, x) = \xi(t) \tag{22}$$

trong đó $\xi(t)$ — kích động ngẫu nhiên «ồn trắng» có cường độ D.

Phương trình FPK ứng với mật độ xác suất dừng $W(x, \dot{x}, \ddot{x})$ của phương trình (21) sẽ là ([1,2])

$$\frac{\partial W}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial W}{\partial \dot{x}}\ddot{x} - \frac{\partial}{\partial \ddot{x}}(Wf) - \frac{D}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial \ddot{x}^2} = 0 \qquad (23)$$

Từ (23) ta sẽ có

$$Wf = -\frac{D}{2}\frac{\partial W}{\partial \ddot{x}} + \int^{\ddot{x}}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial W}{\partial \dot{x}}\ddot{x}\right)d\ddot{x} \qquad (24)$$

hay để cho dạng lũy thừa của hàm mật độ xác suất

$$W = e^P \qquad (25)$$

$$e^P f = -\frac{D}{2}\frac{\partial p}{\partial \ddot{x}}e^P + \int^{\ddot{x}}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial p}{\partial \dot{x}}\ddot{x}\right)e^P d\ddot{x} \qquad (26)$$

Bây giờ ta đưa vào tham số điều khiển $\wedge(x, \dot{x}, \ddot{x})$, liên hệ với p bởi phương trình

$$\int^{\ddot{x}}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial p}{\partial \dot{x}}\ddot{x}\right)e^P d\ddot{x} = e^P \wedge(x, \dot{x}\, \ddot{x}) \qquad (27)$$

hay

$$\frac{\partial p}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial p}{\partial \dot{x}}\ddot{x} - \frac{\partial p}{\partial \ddot{x}}\wedge(x, \dot{x}\, \ddot{x}) = \frac{\partial \wedge}{\partial \ddot{x}} \qquad (28)$$

Khi đó từ (26) ta nhận được

$$e^P f = -\frac{D}{2}\frac{\partial p}{\partial \ddot{x}}e^P + e^P \wedge(x, \dot{x}\, \ddot{x})$$

suy ra

$$f(x, \dot{x}, \ddot{x}) = -\frac{D}{2}\frac{\partial p}{\partial \ddot{x}} + \wedge(x, \dot{x}\cdot \ddot{x}) \qquad (29)$$

Ta chú ý rằng nếu những điều kiện (28), (29) được thỏa mãn thì phương trình (26) và suy ra phương trình FPK (23) cũng sẽ được thỏa mãn. Như vậy ta nhận được định lý sau

Định lý 2.1

Nếu trong phương trình FPK (23) hàm số $f(x, \dot{x}, \ddot{x})$ có dạng (29), trong đó $\wedge$—tham số được chọn nào đó, thì nghiệm của phương trình này là $W = Ce^P$, với $P(x, \dot{x}, \ddot{x})$ được xác định từ phương trình đạo hàm riêng bậc nhất (28), còn C — hằng số chuẩn.

Cũng như ở mục 1. Tham số $\wedge(x, x, x)$ sẽ được chọn sao cho phương trình đạo hàm riêng bậc nhất (28) có thể tích phân được. Ta xét trường hợp khi tham số điều khiển $\wedge(x, \dot{x}, \ddot{x})$ được chọn ở dạng tuyến tính thuần nhất đối với vận tốc

$$\wedge(x, \dot{x}, \ddot{x}) = a(x)\dot{x} \qquad (30)$$

Khi đó phương trình (28) sẽ có dạng

$$\frac{\partial p}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial p}{\partial \dot{x}}\ddot{x}-\frac{\partial p}{\partial \ddot{x}}a(x)\dot{x}=0 \tag{31}$$

Đặt

$$P=-\frac{\alpha}{D}\dot{x}^2+S(x,\ddot{x}),\ \alpha\geqslant 0 \tag{32}$$

Từ (31), (32) sẽ có

$$\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{2\alpha}{D}\ddot{x}=a(x)\frac{\partial S}{\partial \ddot{x}} \tag{33}$$

Ta đặt tiếp

$$S=-\frac{\beta}{D}\ddot{x}^2+A(x)\ddot{x}+C(x) \tag{34}$$

Sau khi thay (34) vào (33) ta nhận được hệ phương trình sau để xác định $A(x)$, $C(x)$

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dx}=\dfrac{2\alpha}{D}-\dfrac{2\beta}{D}a(x) \\ \dfrac{dC}{dx}=a(x).A \end{cases}$$

Từ đó suy ra.

$$\begin{cases} A(x)=\dfrac{2\alpha}{D}x-\dfrac{2\beta}{D}\displaystyle\int^{x}a(x)dx \\ C(x)=\dfrac{2\alpha}{D}\displaystyle\int^{x}x\,a(x)\,dx-\dfrac{\beta}{D}\left(\int^{x}a(x)dx\right)^2 \end{cases} \tag{35}$$

Sau khi chú ý đến (32), (34), (35) nghiệm của phương trình (31) sẽ là

$$P(x,\dot{x},\ddot{x})=-\frac{\alpha}{D}\dot{x}^2-\frac{\beta}{D}\ddot{x}^2+\left(\frac{2\alpha}{D}x-\frac{2\beta}{D}\int^{x}a(x)\,dx\right)\ddot{x}+ \\ +\frac{2\alpha}{D}\int^{x}x\,a(x)\,dx-\frac{\beta}{D}\left(\int^{x}a(x)\,dx\right)^2 \tag{36}$$

Từ (29), (30), (36) ta nhận được biểu thức sau để cho hàm f

$$f(x,\dot{x},\ddot{x})=\beta\ddot{x}-\alpha x+\beta\int^{x}a(x)\,dx+a(x)\dot{x} \tag{37}$$

Như vậy ta nhận được định lý sau

Định lý 2.2.

Ta xét phương trình vi phân ngẫu nhiên bậc ba

$$\dddot{x}+\beta\ddot{x}+a(x)\dot{x}-\alpha x+\beta\int^{x}a(x)\,dx=\xi(t) \tag{38}$$

trong đó $\xi(t)$ — kích động ngẫu nhiên «ồn trắng» có cường độ D. Khi ấy nghiệm dừng của phương trình FPK, ứng với phương trình (38) sẽ là

$$W(x,\dot{x},\ddot{x}) = C\exp\left\{-\frac{1}{D}\left[\alpha\dot{x}^2 + \beta\ddot{x}^2 + \left(2\beta\int^{x} a(x)\,dx - 2\alpha x\right)\ddot{x} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 2\alpha\int^{x} x\,a(x)\,dx + \beta\left(\int^{x} a(x)\,dx\right)^2\right]\right\} \qquad (39)$$

với C — hằng số chuẩn được xác định từ điều kiện chuẩn.

Ta xét trường hợp riêng khi

1) $$a(x) = -\varepsilon + \varepsilon\gamma x^2$$

khi đó phương trình (38) sẽ có dạng phương trình loại VanderPolDuffing bậc ba

$$\dddot{x} + \beta\ddot{x} - \varepsilon(1-\gamma x^2)\dot{x} - \left[(\alpha+\varepsilon\beta)x + \frac{\varepsilon\beta\gamma}{3}x^3\right] = \xi(t)$$

còn nghiệm (39) tương ứng sẽ là

$$W(x,\dot{x},\ddot{x}) = C\exp\left\{-\frac{\beta}{D}\ddot{x}^2 - \frac{\alpha}{D}\dot{x}^2 + \frac{2}{D}\left[(\alpha+\varepsilon\beta)x + \right.\right.$$

$$\left.\left. -\frac{\varepsilon\beta\gamma}{3}x^3\right]\ddot{x} - \frac{\alpha}{D}\dot{x} - \frac{\beta\varepsilon^2}{D}x^2 + \frac{\alpha\gamma}{D}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{2\varepsilon\beta}{3D}\right)x^4 - \frac{\varepsilon^2\beta\gamma^2}{9D}x^6\right\}$$

2) $$\alpha = 0, \quad a(x) = \Omega^2 + \varepsilon\, g(x) \qquad (40)$$

Phương trình vi phân ngẫu nhiên (38) sẽ là

$$\dddot{x} + \beta\ddot{x} + \Omega^2\dot{x} + \beta\Omega^2 x = -\varepsilon\left[g(x)\dot{x} + \beta\int^{x} g(x)\right] + \zeta(t) \qquad (41)$$

và có thể mô tả dao động ngẫu nhiên của hệ phi tuyến cấp ba. Nghiệm dừng (39) của phương trình FPK tương ứng sẽ bằng

$$W(x,\dot{x},\ddot{x}) = C\exp\left\{-\frac{1}{D}\left[\beta\ddot{x}^2 + 2\beta\left(\Omega^2 x + \varepsilon\int^{x} g(x)\,dx\right)\ddot{x} + \beta\left(\Omega^2 x + \varepsilon\int^{x} g(x)\,dx\right)^2\right]\right\} \qquad (42)$$

Dao động tiền định của hệ (41) được nghiên cứu trong ([5]).

Địa chỉ
Viện Cơ học, Viện KHVN

Nhận ngày 20/1/1979

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. MITROPOLSKI IU. A. Phương pháp trung bình hóa trong cơ học phi tuyến. Kiep 1971. (Tiếng Nga).

2. KRASOVSKI A. N. Không gian pha và lý thuyết thống kê của các hệ động lực. Mascova 1974. (Tiếng Nga).

3. NGUYỄN ĐÔNG ANH. Khảo sát dao động ngẫu nhiên bằng phương pháp phương trình Fokker-Planc-Kolmogorov. Tuyển tập các công trình nghiên cứu cơ học. Viện Khoa học Việt nam. Phòng Cơ học. Hà nội 1978.

4. CAUGHEY T. K. J.Acoust. Soc. Americain, 35 (1963).

5. NGUYỄN VĂN ĐẠO. Dao động cưỡng bức trong hệ phi tuyến cấp ba có tự kích thích. Tuyển tập các công trình nghiên cứu cơ học. Viện Khoa học Việt nam. Phòng Cơ học. Hà nội 1978.

6. NGUYỄN VĂN ĐẠO. Non-linear oscillations in third order systems. VIIIth International conference on non-linear oscillations. Prague, September 11–15, 1978.

RÉSUMÉ

ÉTUDE DES ÉQUATIONS FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROV PAR MÉTHODE DES PARAMETRES DE CONTRÔLE

L'étude des stochastiques vibrations par méthode des équations FPK rencontre une grande difficulté parce qu'il faut résolver des équations differencielles aux dérivées partielles du second ordre. Dans cet article on étudie des équations FPK par méthode des parametres de contrôle. Dans le résultat on a reçu une classe des équations FPK pour qu'on peut écrire tout de suite ses solutions.

Tạp chí mới

TẠP CHÍ CÁC THÀNH TỰU CƠ HỌC

Viện hàn lâm khoa học các nước : Cộng hòa nhân dân Bungari, Cộng hòa nhân dân Hungari, Cộng hòa dân chủ Đức, Cộng hòa nhân dân Balan, Liên bang Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Xô viết Liên bang Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Tiệp khắc với Viện khoa học Việt nam vừa qua đã quyết định cho xuất bản tạp chí CÁC THÀNH TỰU CƠ HỌC — cơ quan phối hợp hoạt động của Viện hàn lâm các nước xã hội chủ nghĩa trong lĩnh vực cơ học.

Tạp chí CÁC THÀNH TỰU CƠ HỌC xuất bản hàng quý có nhiệm vụ : phổ biến các kết quả nghiên cứu cơ học của các nước xã hội chủ nghĩa, giới thiệu các vấn đề cơ học có tính chất thời sự và triển vọng đối với sự phát triển của khoa học và kinh tế quốc dân, thông báo các phương hướng nghiên cứu và ứng dụng cơ học mới. Để hoàn thành nhiệm vụ trên tạp chí nhận đăng các bài có tính chất tổng quan và các vấn đề lớn có tính chất thời sự, nhận thông báo các sinh hoạt khoa học các hội nghị, các xêmina và các hoạt động trong lĩnh vực cơ học. Bài gửi đăng ở tạp chí cần được viết bằng tiếng Nga với tóm tắt bằng tiếng Anh hoặc cá biệt có thể viết bằng tiếng Anh với tóm tắt bằng tiếng Nga.