Tạp chí CƠ HỌC 1979 số 1-2 (trang 9 - 19)

VỀ CÁC ĐIỀU KIỆN THEO DÕI ĐƯỢC TRONG CÁC HỆ PHI TUYẾN

NGUYỄN THÀNH BẠNG

MỤC đích của công trình nghiên cứu này là xác định các điều kiện mà với chúng thì các hệ phi tuyến sẽ theo dõi được theo nghĩa Kalman, đồng thời đề ra thuật tính giải gần đúng bài toán theo dõi được, chứng minh sự hội tụ của quá trình giải và đánh giá tốc độ hội tụ của 2 cách giải gần đúng khác nhau.

§1. ĐẶT BÀI TOÁN

Giả sử rằng hệ động lực học mà ta muốn khảo sát được mô tả bởi phương trình vi phân có dạng sau đây:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + \mu f(x, t) \tag{1.1}$$

trong đó x là $(n \times 1)$ — vectơ các tọa độ pha, $f(x, t)$ là $(n \times 1)$ — vectơ các hàm phi tuyến, $A(t)$ là ma trận vuông cấp $(n \times n)$, μ là tham số bé.

Giả sử rằng trong quá trình khảo sát hệ thống động lực học nói trên ta có thể đo được các giá trị của vectơ

$$\underset{(m\times1)}{Z(t)} = \underset{(m\times n)}{P'(t)}\;\underset{(n\times1)}{x(t)} \tag{1.2}$$

tại mọi khởi điểm t bất kỳ và có thể nhớ các giá trị của nó trên khoảng thời gian $t_a - \tau \leqslant t \leqslant t_a$, trong đó $P'(t)$ là ma trận chuyển vị, $m < n$.

Vấn đề đặt ra là theo các giá trị của $Z(t)$ trên đoạn từ $t_a - \tau \leqslant t \leqslant t_a$ có thể xác định giá trị của các tọa độ pha tại $t = t_a$ hay không? Và với những điều kiện nào thì bài toán đặt ra trên đây có nghiệm, tức hệ (1.1) là theo dõi được?

Để giải bài toán đặt ra trên đây ta giả thiết là khi $\mu = 0$ hệ tuyến tính tương ứng với (1.1) là theo dõi được hoàn toàn, tức theo các giá trị của vectơ.

$$Z^{(o)}(t) = P'(t)\,x^{(o)}(t) \tag{1.3}$$

xác định trên đoạn $t_a - \tau \leqslant t \leqslant t_a$ ta hoàn toàn có thể xác định được vectơ $x^{(o)}(t_a)$ của hệ:

$$\frac{dx^{(o)}(t)}{dt} = A(t)\,x^{(o)}(t) \tag{1.4}$$

Nghiệm của phương trình (1.1) có thể viết dưới dạng:

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_a)x(t_a) - \mu \int_t^{t_a} X(t)X^{-1}(\xi)f(x(\xi),\xi)\,d\xi, \quad t_a - \tau \leqslant t \leqslant t_a \qquad (1.5)$$

trong đó X(t) là ma trận cơ sở của hệ tuyến tính (2.4), $X^{-1}(t)$ là ma trận ngược.

Khi ấy, trên cơ sở (1.2) và (1.5) ta có:

$$Z(t) = P'(t)\tilde{x}(t) + P'(t)\,q(t,x) \qquad (1.6)$$

Trong biểu diễn (1.6) $\tilde{x}(t)$ và $q(t, x)$ là ký hiệu các vectơ sau đây:

$$\tilde{x}(t) = X(t)X^{-1}(t_a)x(t_a) \qquad (1.7)$$

$$q(t,x) = -\mu \int_t^{t_a} X(t)X^{-1}(\xi)f(x(\xi),\xi)\,d\xi \qquad (1.8)$$

Như vậy, ta có thể dẫn bài toán đã đặt ra ở trên về bài toán theo dõi được đối với hệ tuyến tính:

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = A(t)\tilde{x}(t) \qquad (1.9)$$

trên cơ sở các thông tin về đại lượng $\tilde{Z}(t)$, xác định trên đoạn $t_a - \tau \leqslant t \leqslant t_a$ theo công thức sau đây:

$$\tilde{Z}(t) = P'(t)\tilde{x}(t) = Z(t) - P'(t)\,q(t,x) \qquad (1.10)$$

Rõ ràng bài toán theo dõi được trong các hệ phi tuyến (1.1) với điều kiện (1.2) là tương đương với bài toán theo dõi được trong các hệ tuyến tính (1.9) với điều kiện (1.10), nhưng điều khác nhau cơ bản ở đây là: trong điều kiện (1.2) thì các giá trị của vectơ Z(t) trên đoạn $t_a - \tau \leqslant t \leqslant t_a$ là biết trước, còn $\tilde{Z}(t)$ trong biểu diễn (1.10) là đại lượng chưa xác định, vì ngoài Z(t) nó còn chứa $x(t)$ dưới dạng ẩn. Mặc dù vậy, cách biến đổi trên đây cho phép ta vận dụng các kết quả trong lý thuyết theo dõi được đối với các hệ tuyến tính để giải gần đúng bài toán theo dõi được trong các hệ phi tuyến.

§ 2. CÁCH GIẢI

Trên cơ sở công thức (1.7) dễ dàng nhận thấy rằng:

$$\tilde{x}(t_a) = x(t_a) \qquad (2.1)$$

Dưới đây sẽ trình bày 2 cách giải gần đúng để xác định đại lượng $\tilde{x}(t_a)$.

1. Cách giải thứ nhất (tuyến tính hóa toàn phần)

Để xác định vectơ $\tilde{x}(t_a)$ ta dùng phương pháp gần đúng liên tiếp. Trong gần đúng khởi điểm ta lấy:

$$\tilde{x}_k^{(o)}(t_a) = \int_{t_a-\tau}^{t_a} < \tilde{Z}^{(o)}(t), u^{(k)}(t) > dt, \quad k = 1,2\ldots,n, \qquad (2.2)$$

trong đó $\widetilde{Z}^{(o)}(t) = Z(t)$ là vectơ biết trước, còn $u^{(k)}(t)$ là vectơ xác định từ phương trình :

$$\int_{t_*-\tau}^{t_*} [X^{-1}(t_*)]' . X'(t) P(t) u^{(k)}(t) dt = e^{(k)}, \; k = 1,2..., n \tag{2.3}$$

trong đó $e^{(k)}$ là vectơ cột chỉ có thành phần trên hàng thứ k bằng 1, còn tất cả các thành phần khác bằng không.

Theo các điều kiện của bài toán thì hệ tuyến tính (1.4) tương ứng với (1.1) khi $\mu = 0$ là hệ điều khiển được hoàn toàn, cho nên nghiệm $u^{(k)}(t)$ của các phương trình (2.3) tồn tại và có thể xác định qui luật thay đổi của vectơ $u^{(k)}(t)$, (xem [2]). Như vậy, từ công thức (2.2) hoàn toàn có thể xác định vectơ $\widetilde{x}^{(o)}(t_*)$ và sau đó giải ngược phương trình (1.4) với điều kiện $x^{(o)}(t_*) = \widetilde{x}^{(o)}(t_*)$ ta sẽ xác định được vectơ $x^{(o)}(t)$ trên đoạn $t_* - \tau \leqslant t \leqslant t_*$. Đưa các giá trị của vectơ $x^{(o)}(t)$ vào vế phải (1.10), ta được:

$$\widetilde{Z}^{(1)}(t) = Z(t) - P'(t) q(t, x^{(o)}(t)) \tag{2.4}$$

Bây giờ để xác định $x(t_*)$ trong gần đúng thứ nhất ta lấy:

$$\widetilde{x}_k^{(1)}(t) = \int_{t_*-\tau}^{t_*} < Z^{(1)}(t) . u^{(k)}(t) > dt, \; k = 1,2,.., n, \tag{2.5}$$

Sau khi $\widetilde{x}^{(1)}(t_*)$ đã được xác định, ta có thể tìm $x^{(1)}(t)$ theo công thức:

$$x^{(1)}(t) = X(t) X^{-1}(t_*) x^{(1)}(t_*) - \mu \int_{t}^{t_*} X(t) X^{-1}(\xi) f(x^{(o)}(\xi), \xi) d\xi \tag{2.6}$$

hoặc giải ngược phương trình vi phân

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = A(t) x^{(1)} + \mu f(x^{o}(t), t) \tag{2.7}$$

với điều kiện

$$x^{(1)}(t_*) = \widetilde{x}^{(1)}(t_*) \tag{2.8}$$

Giả sử rằng gần đúng thứ j đã được xác định, tức ta đã xác định được các vectơ $\widetilde{x}^{(j)}(t_*)$ và $x^{(j)}(t)$. Khi ấy gần đúng thứ $(j + 1)$ đối với $\widetilde{x}(t_*)$ có thể xác định theo công thức sau đây:

$$\widetilde{x}_k^{(j+1)}(t_*) = \int_{t_*-\tau}^{t_*} < \widetilde{Z}^{(j+1)}(t) . u^{(k)}(t) > dt, \; k = 1,2... n \tag{2.9}$$

trong đó:

$$\widetilde{Z}^{(j+1)}(t) = z(t) - P(t) q(t, x^{(j)}(t)) \tag{2.10}$$

còn $x^{(j+1)}(t)$ thì có thể xác định theo công thức:

$$x^{(j+1)}(t) = \chi(t)\chi^{-1}(t_\alpha)\tilde{x}^{(j+1)}(t_\alpha) - \mu \int_t^{t_\alpha} \chi(t)\chi^{-1}(\xi)\, f(x^{(j)}(\xi), \xi)d\xi \qquad (2.11)$$

hoặc giải ngược phương trình vi phân

$$\frac{dx^{(j+1)}}{dt} = A(t)x^{(j+1)} + \mu f(x^{(j)}(t), t) \qquad (2.12)$$

với điều kiện

$$x^{(j+1)}(t_\alpha) = \tilde{x}^{(j+1)}(t_\alpha) \qquad (2.13)$$

Cần lưu ý là trên từng bước lặp ta phải xác định vecto $q(t, x^{(j)}(t))$. Vecto này có thể tìm bằng cách lấy tích phân:

$$q^{(j)}(t) \equiv q(t, x^{(j)}(t)) = -\mu \int_t^{t_\alpha} \chi(j)\chi^{-1}(\xi) f(x^{(j)}(\xi), \xi)\, d\xi \qquad (2.14)$$

hoặc giải ngược phương trình

$$\frac{dq^{(j)}}{dt} = A(t)\, q^{(j)} + \mu f(x^{(j)}(t), t) \qquad (2.15)$$

với điều kiện

$$q^{(j)}(t_\alpha) = 0 \qquad (2.16)$$

Và như vậy, thuật tính giải gần đúng trên đây đã hoàn toàn dựa trên cơ sở tuyến tính hóa toàn bộ các tham số cần xác định trên từng bước lặp (nên ta gọi là phương pháp gần đúng liên tiếp tuyến tính hóa toàn phần) và có thể thực hiện được trên máy tính tương tự hoặc máy tính vạn năng. Vấn đề hội tụ của phương pháp giải ta sẽ xét sau.

2. Cách giải thứ hai (nửa tuyến tính hóa)

Gần đúng khởi điểm trong cách giải này cũng xác định như trong cách giải thứ nhất (xem công thức (3.2)). Sau khi đã xác định $x^{(0)}(t_\alpha) = \tilde{x}^{(0)}(t_\alpha)$, ta giải ngược phương trình phi tuyến (chứ không tuyến tính hóa như trong cách giải thứ nhất):

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} = A(t)x^{(1)} + \mu f(x^{(1)}, t) \qquad (2.17)$$

ới điều kiện

$$x^{(1)}(t_\alpha) = \tilde{x}^{(0)}(t_\alpha) \qquad (2.18)$$

ể tìm các giá trị của vecto $x^{(1)}(t)$ trên đoạn $t_\alpha - \tau \leqslant t \leqslant t_\alpha$. Khi ấy, ta có thể xác ịnh gần đúng thứ nhất đối với vecto theo công thức sau đây:

$$\tilde{x}_k^{(1)}(t_\alpha) = \int_{t_\alpha - \tau}^{t_\alpha} < \tilde{z}^{(1)}(t), u^{(k)}(t) > dt, \quad k = 1, 2, \dots n \qquad (2.19)$$

trong đó $u^{(k)}(t)$ là nghiệm của phương trình (2.3) như ở cách giải thứ nhất, còn $\tilde{z}^{(1)}(t)$ là vectơ sau đây:

$$\tilde{z}^{(1)}(t)=z(t)-P'(t)\,q(t,x^{(1)}(t)) \tag{2.20}$$

Giả sử gần đúng thứ j đối với vectơ $\tilde{x}(t_a)$ đã được xác định, tức đã xác định vectơ $\tilde{x}^{(j)}(t_a)$. Khi ấy giải ngược hệ phương trình phi tuyến.

$$\frac{dx^{(j+1)}}{dt}=A(t)x^{(j+1)}+f(x^{(j+1)},t) \tag{2.21}$$

với điều kiện

$$x^{(j+1)}(t_a)=\tilde{x}^{(j)}(t_a) \tag{2.22}$$

trên đoạn $t_a-t<t\leqslant t_a$ và gần đúng tiếp theo đối với $\tilde{x}(t_a)$ sẽ xác định từ công thức:

$$\tilde{x}_k^{(j+1)}(t_a)=\int_{t_a-\tau}^{t_a}<\tilde{z}^{(j+1)}(t)\,.\,u^{(k)}(t)>dt,\ k=1,2,\dots,n \tag{2.23}$$

trong đó

$$\tilde{Z}^{(j+1)}(t)=Z(t)-P'(t)q(t,x^{(j+1)}(t)) \tag{2.24}$$

Để xác định vectơ $q^{(j+1)}(t)\equiv q(t,x^{(j+1)}(t))$ ta có thể lấy tích phân:

$$q^{(j+1)}(t)=-\mu\int_t^{t_a}\chi(t)\chi^{-1}(\xi)f(x^{(j+1)}(\xi),\xi)\,d\xi \tag{2.25}$$

hoặc giải ngược phương trình

$$\frac{dq^{(j+1)}}{dt}=A(t)q^{(j+1)}+\mu f(x^{(j+1)}(t),t) \tag{2.26}$$

với điều kiện

$$q^{(j+1)}(t_a)=0 \tag{2.27}$$

Như vậy, theo phương pháp này để xác định gần đúng thứ (j+1) bất kỳ ta chỉ tuyến tính hóa việc xác định vectơ $\tilde{Z}^{(j+1)}(t)$, trong khi ấy để xác định vectơ $x^{(j+1)}(t)$ đòi hỏi phải giải phương trình phi tuyến (2.21). Vì lý do đó ta gọi phương pháp gần đúng liên tiếp ở đây là nửa tuyến tính hóa.

Vấn đề hội tụ ta sẽ xét trong phần tiếp theo.

§3. CÁC ĐIỀU KIỆN THEO DÕI ĐƯỢC TRONG CÁC HỆ PHI TUYẾN VÀ CHỨNG MINH SỰ HỘI TỤ CỦA CÁC CÁCH GIẢI

1. Định lý 1: *Giả sử rằng:*

1. Hệ tuyến tính tương ứng với (1.1) khi $\mu=0$ là theo dõi được hoàn toàn.

2. Vectơ hàm $f(x,t)$ liên tục theo mọi biến trong miền D:

$$D=\{(x,t):|x-x^{(0)}(t)|\leqslant\Delta,\ t_a-\tau\leqslant t\leqslant t_a\} \tag{3.1}$$

trong đó $x^{(o)}(t)$ là nghiệm của phương trình tuyến tính (1.4) tương ứng với (1.1) khi $\mu = 0$ và với điều kiện ban đầu $x^{(o)}(t_\alpha) = \tilde{x}^{(o)}(t_\alpha)$, còn Δ là 1 đại lượng dương. Qua $|x|$ ta ký hiệu chuẩn của vecto, hoặc của ma trận.

3. Trong miền D vecto, hàm $f(x,t)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo x, tức với 2 điểm bất kỳ $(x^{(2)}, t) \in D$, $(x^{(1)}, t) \in D$ ta có bất phương trình

$$|f(x^{(2)},t) - f(x^{(1)},t)| \leqslant r\,|x^{(2)} - x^{(1)}|, \quad r = const \tag{3.2}$$

4. Tham số μ xác định từ điều kiện:

$$o < \mu \leqslant \mu_o = \min\left\{\frac{1}{(1+vph\tau)hr\tau}, \frac{\Delta}{(1+vph\tau)Fh\tau}\right\} \tag{3.3}$$

trong đó v, h, p, F là các đại lượng sau đây:

$$v = \sup_t |U(t)|, \quad h = \sup_{t\xi} |H(t,\xi)|, \quad H(t,\xi) = \chi(t)\chi^{-1}(\xi)$$

$$p = \sup_t |P'(t)|, \quad F = \max_{(x,t)\in D} |f(x,t)|,$$

$$U(t) = \begin{bmatrix} u_1^{(1)}(t) & u_2^{(1)}(t) & \dots & u_n^{(1)}(t) \\ u_1^{(2)}(t) & u_2^{(2)}(t) & \dots & u_n^{(2)}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n)}(t) & u_2^{(n)}(t) & \dots & u_n^{(n)}(t) \end{bmatrix}$$

Khi ấy phương pháp giải gần đúng theo cách thứ nhất sẽ hội tụ và hệ phi tuyến (1.1) sẽ theo dõi được hoàn toàn theo nghĩa Kalman.

Chứng minh

Trước tiên phải chứng minh là với các điều kiện của định lý 1 mọi gần đúng theo cách giải thứ nhất thuộc miền D. Thật vậy, theo cách đó ta có :

$$x^{(0)}(t) = \chi(t)\chi^{-1}(t_\alpha)\tilde{x}^{(0)}(t_\alpha), \quad x^{(1)}(t) = \chi(t)\chi^{-1}(t_\alpha)\tilde{x}_1(t_\alpha) - \mu\int_t^{t_\alpha}\chi(t)\chi^{-1}(\xi)f(x^{(0)}(\xi),\xi)d\xi$$

Gần đúng khởi điểm $x^{(0)}(t)$ thuộc D là điều rất hiển nhiên. Để biết $x^{(1)}(t)$ có thuộc D hay không, ta xét đại lượng $x^{(1)}(t) - x^{(0)}(t)$ và thấy rằng :

$$|x^{(1)}(t) - x^{(0)}(t)| \leqslant h\,|\tilde{x}^{(1)}(t_\alpha) - \tilde{x}^{(0)}(t_\alpha)| + \mu h F\tau$$

Theo các công thức (2. 2) và (2. 5), thì

$$|\tilde{x}^{(1)}(t_\alpha) - \tilde{x}^{(0)}(t_\alpha)| \leqslant \mu v p h F \tau^2$$

Đưa đánh giá này vào vế phải của bất phương trình trên ta được :

$$|x^{(1)}(t) - x^{(0)}(t)| \leqslant \mu h F\tau(1 + vph\tau) \leqslant \Delta, \quad t_\alpha - \tau \leqslant t \leqslant t_\alpha \tag{3.4}$$

Giả sử rằng $x^{(j)}(t) \in D$ ta chứng minh là $x^{(j+1)}(t)$ cũng thuộc Đ

Thật vậy, theo các công thức (2. 2) và (2. 11) ta có :

$$|x^{(j+1)}(t) - x^{(o)}(t)| \leqslant h|\tilde{x}^{(j+1)}(t_a) - \tilde{x}^{(o)}(t_a)| + \mu h F \tau$$

Trên cơ sở (2.2) và (2.8) ta được :

$$|\tilde{x}^{(j+1)}(t_a) - \tilde{x}^{(o)}(t_a)| \leqslant \mu v p h F \tau^2$$

Do đó, ta có đánh giá sau đây :

$$|x^{(j+1)}(t) - x^{(o)}(t) \leqslant \mu h F\tau (1 + vph\tau) \leqslant \Delta,\ t_a - \tau \leqslant t \leqslant t_a.$$

Như vậy, mọi gần đúng theo cách giải thứ nhất thuộc D. Bây giờ để chứng minh quá trình giải bài toán theo cách thứ nhất là hội tụ, ta xét :

$$|x^{(j+1)}(t) - x^{(j)}(t)| \leqslant h|\tilde{x}^{(j+1)}(t_a) - \tilde{x}^{(j)}(t_a)| + \mu hr\tau |x^{(j)}(t) - x^{(j-1)}|$$

Mặt khác, trên cơ sở công thức (2,9) ta có :

$$|\tilde{x}^{(j+1)}(t) - \tilde{x}^{(j)}(t_a)| \leqslant \mu v hp r \tau^2 |x^{(j)}(t) - x^{(j-1)}(t)|,\ t_a - \tau \leqslant t \leqslant t_a$$

Do đó ta có đánh giá sau đây :

$$|x^{(j+1)}(t) - x^{(j)}(t)| \leqslant \mu hr\tau (1 + vph\tau)|x^{(j)}(t) - x^{(j-1)}(t)|,\ t_a - \tau \leqslant t \leqslant t_a \quad (3.5)$$

Điều kiện (5.3) của định lý cho ta thấy rằng đại lượng $\mu hr \tau (1 + vph\tau) < 1$ và do đó quá trình giải theo cách thứ nhất hội tụ (theo dấu hiệu Đalambe).

Định lý 2 : *Giả sử rằng :*

1) Hệ tuyến tính tương ứng với (1, 1) khi $\mu = 0$ là theo dõi được hoàn toàn.

2) Vectơ hàm $f(x, t)$ liên tục theo mọi biến trong miền

$$D_{2\Delta}^{(o)} = \{x, t) : |x - x^{(o)}(t)| \leqslant 2\Delta,\ t_a - \tau \leqslant t \leqslant t_a\} \quad (3.6)$$

trong đó $x^{(o)}(t)$ là nghiệm của phương trình tuyến tính (1,4) với điều kiện ban đầu $x^{(o)}(t_a) = \tilde{x}^{(o)}(t_a)$, còn Δ là 1 đại lượng dương.

3. Trong miền $D_{2\Delta}^{(o)}$ vectơ hàm $f(x,t)$ thỏa mãn điều kiện Lipschitz theo x :

$$\left|f(x^{(2)}, t) f - (x^{(1)}, t)\right| \leqslant \Upsilon \left|x^{(2)} - x^{(1)}\right|,\ \Upsilon = const,\ (x^{(2)}, t), (x^{(1)}, t) \in D_{2\Delta}^{(o)}$$

4. Tham số μ xác định từ điều kiện

$$0 < \mu < \mu_o = min\left\{\frac{\Delta}{hF\tau}, \frac{\Delta}{vpFh^2\tau^2}, \frac{\lambda}{(1+vph\tau)h\Upsilon\tau}\right\} \quad (3.7)$$

Khi ấy quá trình giải theo cách thứ hai sẽ hội tụ.

Chứng minh:

Trên cơ sở phương trình (2.17) điều kiện (2.18) và các điều kiện trong định lý 2 dễ dàng chứng minh sự tồn tại nghiệm $x^{(1)}(t) \in D_{\Delta}^{(o)} \subset D_{2\Delta}^{(o)}$ và thỏa mãn đánh giá sau đây :

$$|x^{(1)}(t) - x^{(o)}(t)| \leqslant \mu h F\tau \leqslant \Delta \quad (3.8)$$

Giả sử rằng, $x^{(j)}(t) \in D_{2\Delta}^{(o)}$ ta chứng minh là $x^{(j+1)}(t)$ cũng thuộc $D_{2\Delta}^{(o)}$.

Thật vậy, trên cơ sở phương trình (2.2) và điều kiện (2.22) ta suy ra là:

$$x^{(j+1)}(t) = \tilde{x}^{(j)}(t) - \mu \int_{t}^{t_\alpha} X(t)\, X^{-1}(\xi)\, f\,(x^{(j+1)}(\xi), \xi)\, d\xi \tag{3.9}$$

trong đó:

$$\tilde{x}^{(j)}(t) = X(t)\, X^{-1}(t_\alpha)\, \tilde{x}^{(j)}(t_\alpha)$$

Dễ dàng nhận thấy rằng $\tilde{x}^{(j)}(t) \in D_{\Delta}^{(o)} \subset D_{2\Delta}^{(o)}$, bởi vì:

$$|\tilde{x}^{(j)}(t) - x^{(o)}(t)| \leqslant h |\tilde{x}^{(j)}(t_\alpha) - \tilde{x}^{(o)}(t_\alpha)| \leqslant \mu\, \nu p F h^2 \tau^2 \leqslant \Delta$$

Do đó, tồn tại nghiệm $x^{(j+1)}(t)$ của phương trình (3.9) và thỏa mãn đánh giá sau đây:

$$|x^{(j+1)}(t) - \tilde{x}^{(j)}(t)| \leqslant \mu\, h F \tau \leqslant \Delta,\; t_\alpha - \tau \leqslant t \leqslant t_\alpha$$

Từ các kết quả trên và dựa vào quy tắc tam giác ta có:

$$|x^{(j+1)}(t) - x^{(o)}(t)| \leqslant |x^{(j+1)}(t) - \tilde{x}^{(j)}(t)| + |\tilde{x}^{(j)}(t) - x^{(o)}(t)| \leqslant 2\Delta$$

Điều đó chứng tỏ nghiệm $x^{(j+1)}(t) \in D_{2\Delta}^{(o)}$, tức mọi gần đúng theo cách giải thứ hai thuộc miền xác định của các thành phần phi tuyến.

Để chứng minh sự hội tụ của quá trình giải ta xét:

$$|x^{(j+1)}(t) - x^{(j)}(t)| \leqslant h |\tilde{x}^{(j)}(t_\alpha) - \tilde{x}^{(j-1)}(t_\alpha)| + \mu h r \tau\, |x^{(j+1)}(t) - x^{(j)}(t)|$$

hay là:

$$\left| x^{(j+1)}(t) - x^{(j)}(t) \right| \leqslant \frac{h}{1 - \mu h \gamma \tau} \left| \tilde{x}^{(j)}(t_\alpha) - \tilde{x}^{(j-1)}(t_\alpha) \right|$$

Mặt khác, từ các công thức (2.23) ta suy ra:

$$|\tilde{x}^{(j)}(t_\alpha) - \tilde{x}^{(j-1)}(t_\alpha)| \leqslant \mu\, \nu p \gamma h \tau^2\, |x^{(j)}(t) - x^{(j-1)}(t)|$$

Do đó ta có:

$$|x^{(j+1)}(t) - x^{(j)}(t)| \leqslant \mu \frac{\nu p r h^2 \tau^2}{1 - \mu h r \tau} |x^{(j)}(t) - x^{(j-1)}(t)|,\; t_\alpha - \tau \leqslant t \leqslant t_\alpha \tag{3.10}$$

Trên cơ sở điều kiện (3.7) của định lý 2, bất phương trình (3.9) cho ta thấy rằng quá trình giải gần đúng theo cách thứ hai hội tụ (theo dấu hiệu Đalambe).

2. Về tốc độ hội tụ của hai cách giải:

a) Để đánh giá tốc độ hội tụ của cách giải thứ nhất ta sẽ sử dụng các công thức (3.4) và (3.5);

Từ công thức (3.5) ta suy ra:

$$|x^{(j+1)}(t) - x^{(j)}(t)| \leqslant \mu^j [r h \tau (1 + \nu p h \tau)]^j |x^{(1)}(t) - x^{(o)}(t)|$$

Và trên cơ sở bất phương trình (4.4) ta được

$$|x^{(j+1)}(t) - x^{(j)}(t)| \leqslant \mu^{(j+1)} [(1 + \nu p h \tau) h \tau]^{j+1} r^j F \tag{3.11}$$

b) Để đánh giá tốc độ hội tụ theo cách giải thứ hai ta viết lại bất phương trình (3.10) dưới dạng:

$$|x^{(j+1)}(t) - x^{(j)}(t)| \leqslant \mu\nu prh^2\tau^2(1+\mu hr\tau)|x^{(j)}(t) - x^{(j-1)}(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \mu^j[rpvh^2\tau^2(1+\mu hr\tau)]^j|x^{(1)}(t) - x^{(o)}(t)|$$

và trên cơ sở tương quan (3.6) ta có:

$$|x^{(j+1)}(t) - x^{(j)}(t)| \leqslant \mu^{(j+1)}(1+\mu hr\tau)^j(h\tau)^{2j+1}(\nu pr)^j F \quad (3.12)$$

Các bất phương trình (3.11) và (3.12) cho phép ta đánh giá tốc độ hội tụ của 2 cách giải nói trên.

§ 4. THUẬT TÍNH VÀ SƠ ĐỒ THỰC HIỆN TRÊN MÁY TÍNH

1. Thuật tính đối với cách giải thứ nhất

Bước 0: Xác định các vecto $u^{(k)}(t)$, $k = 1,2,\dots,n$

Bước 1: Đặt $j = 0$ xác định vecto $\tilde{x}^{(j)}(t_a)$ theo công thức

$$\tilde{x}_k^{(j)}(t_a) = \int_{t_a-\tau}^{t_a} < \tilde{Z}^{(j)}(t).U^{(k)}(t) > dt, \; k = 1,2,\dots,n, \; \tilde{Z}^{(o)}(t) = Z(t)$$

Bước 2: giải ngược phương trình (với $j = 0$, $\mu = 0$):

$$\frac{dx^{(j)}}{dt} = A(t)\,x^{(j)} + \mu f(x^{(j-1)}(t), t)$$

với điều kiện

$$x^{(j)}(t_a) = \tilde{x}^{(j)}(t_a)$$

để xác định các giá trị của vecto $x^{(j)}(t)$ trên đoạn $t_a - \tau \leqslant t \leqslant t_a$

Bước 3: Giải ngược phương trình

$$\frac{dq^{(j)}}{dt} = A(t)q^{(j)} + \mu f(x^{(j-1)}(t), t)$$

với điều kiện

$$q^{(j)}(t_a) = 0$$

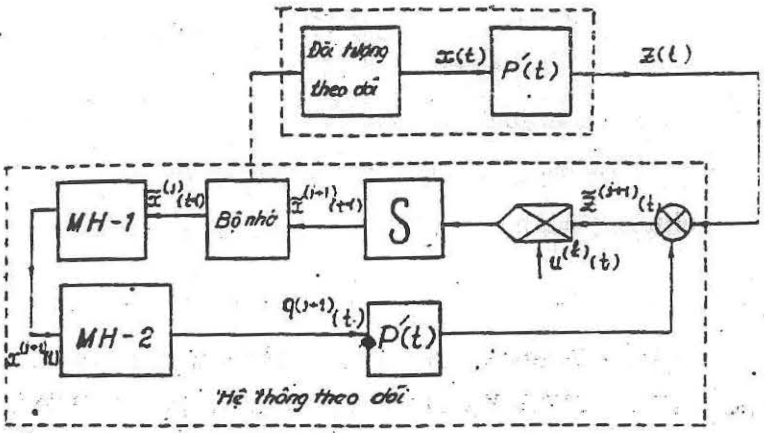
để xác định các giá trị của vecto $q^{(j)}(t)$ trên đoạn $t_a - \tau \leqslant t \leqslant t_a$

Bước 4: Xác định vecto $\tilde{Z}^{(j+1)}(t)$ theo công thức

$$\tilde{Z}^{(j+1)}(t) = Z(t) - P'(t)\,q^{(j)}(t)$$

Sau đó trở lại bước 1 với $j = j + 1$.

Thuật tính trên đây có thể thực hiện 1 cách dễ dàng trên máy tính tương tự theo sơ đồ sau đây (hình 1):



Hình 1

2. Thuật tính đối với cách giải thứ hai

Bước 0: Xác định các vectơ $u^{(k)}(t)$, $k = 1,2,\ldots, n$

Bước 1: Đặt $j = 0$, xác định $x^{(j)}(t_\alpha)$ theo công thức

$$\tilde{x}_k^{(j)}(t_\alpha) = \int_{t_\alpha - \tau}^{t_\alpha} < Z^{(j)}, u^{(k)}(t) > dt,\ k = 1,2,\ldots, n,\ \tilde{Z}^{(0)}(t) = Z(t)$$

Bước 2: Giải ngược phương trình phi tuyến

$$\frac{dx^{(j+1)}}{dt} = A(t)x^{(j+1)} + \mu.f(x^{(j+1)}, t)$$

với điều kiện lấy từ bộ nhớ

$$x^{(j+1)}(t_\alpha) = \tilde{x}^{(j)}(t_\alpha)$$

để xác định các giá trị của vectơ $x^{(j+1)}(t)$ trên đoạn $t_\alpha - \tau \leqslant t \leqslant t_\alpha$.

Bước 3: Giải ngược phương trình

$$\frac{dq^{(j+1)}}{dt} = A(t)q^{(j+1)} + \mu f(x^{(j+1)}(t), t)$$

với điều kiện $q^{(j+1)}(t_\alpha) = 0$

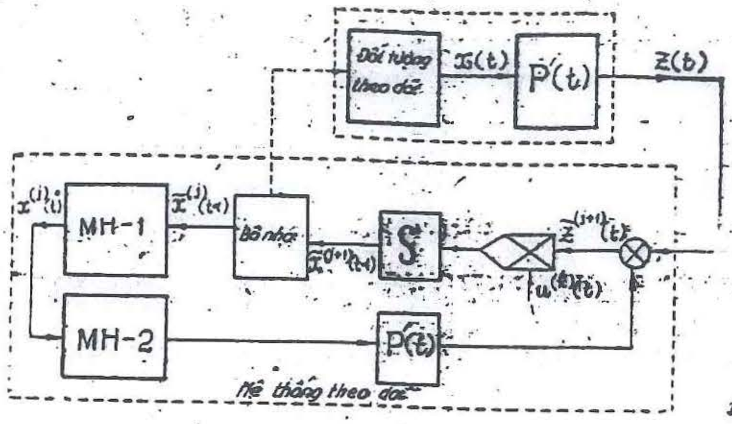
để xác định các giá trị của vectơ $q^{(j+1)}(t)$

Bước 4: Tính các giá trị của vectơ $\tilde{Z}^{(j+1)}(t)$ theo công thức

$$\tilde{Z}^{(j+1)}(t) = Z(t) - P'(t)\,q^{(j+1)}(t)$$

Sau đó trở lại bước 1 với $j = j + 1$

Thuật tính trên đây có thể thực hiện 1 cách dễ dàng trên máy tính tương tự theo sơ đồ sau đây (hình 2)



Hình 2

Cần lưu ý, những kết quả trên là sự mở rộng các phương pháp mà tác giả đã sử dụng để giải bài toán điều khiển được (xem [6 – 7]) vào lớp bài toán theo dõi được trong các hệ phi tuyến.

Nhận ngày 2/4/1978

TÀI LIỆU TRÍCH DẪN

1. **Kalman P.** Về lý thuyết tổng quát của các hệ điều khiển. Các công trình của hội nghị « IFAC » lần thứ nhất. Tập 2. Nhà xuất bản « Viện Hàn lâm khoa học Liên Xô », 1960 (tiếng Nga).

2. **Kraxôvxkii N. N.** Lý thuyết điều khiển chuyển động. Nhà xuất bản « Khoa học », 1968 (tiếng Nga).

3. **Gabaxôv R. Kirillôva Ph.** Lý thuyết định tính các quá trình tối ưu, Nhà Xuất bản « Khoa học », 1971 (tiếng Nga).

4. **Roitenbe Ia. N.** Một số bài toán trong lý thuyết qui hoạch động. Tập san « toán học ứng dụng và cơ học », tập 23, số 4 1959 (tiếng Nga).

5. **Roitenbe Ia, N.** Một số bài toán điều khiển chuyển động, nhà xuất bản « toán lý », 1963 (tiếng Nga).

6. **Nguyễn Thành Bang.** Về cách giải một bài toán điều khiển chuyển động. Tập san « thông báo của Viện Hàn lâm Khoa học Liên xô », loại « Điều khiển học kỹ thuật », số 5, 1964 (tiếng Nga).

7. **Nguyễn Thành Bang.** Một số bài toán điều khiển chuyển động của các hệ động lực học. Luận án phó tiến sĩ Moskva — 1965 (tiếng Nga).

SUMMARY

ON THE OBSERVABLE CONDITIONS, IN THE NONLINEAR SYSTEMS

THE FOLLOWING RESULTS ARE GIVEN IN THIS PAPER:

— The conditions that the nonlinear systems are observable in Kalman's sense.

— An algorithm for approximative solution of the observable problem.

— Convergence and estimate of convergence speed for the two different approximative solutions.