Vietnam Journal of Mechanics, VAST, Vol. 29, No. 3 (2007), pp. 163 – 166
Special Issue Dedicated to the Memory of Prof. Nguyen Van Dao

О КОЛЕБАНИЯХ СИСТЕМ, БЛИЗКИХ К СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫМ

НГУЕН ВАН ДАО (NGUYEN VAN DAO)
(*Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 1 XII 1969*)

(*This paper has been published in:*
Доклады Академии Наук СССР 1970, Том 192, № 5)

В статье рассматриваются колебания систем, близких к существенно нелинейным, в особом случае, когда уравнения для определения основных амплитуд удовлетворяются тождественно при любом выборе части постоянных. Оказывается, что одна часть произвольных постоянных, входящих в каждое приближение, определяется из следующего приближения, а другая часть - из приближения на единицу более высокого.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Колебания систем, близких к существенно нелинейным, описываются уравнениями вида

$$\dot{x}_s = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) + \mu f_s^{(1)}(t, x_1, \ldots, x_n) + \\ + \mu^2 f_s^{(2)}(t, x_1, \ldots, x_n) + \ldots \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.1}$$

где правые части периодичны относительно t с периодом ω и аналитичны относительно $x_1, \ldots, x_n$, μ, а X_s - существенно нелинейные функции от $x_1, x_2, \ldots, x_n$; μ - малый параметр.

Предположим, что порождающая система

$$\dot{x}_s^0 = X_s(t, x_1^0, \ldots, x_n^0) \tag{1.2}$$

допускает семейство периодических решений периода ω

$$x_s^0 = \varphi_s = \varphi_s(t, h_1, \ldots, h_m), \tag{1.3}$$

зависящих от m произвольных постоянных $h_1, h_2, \ldots, h_m$ и лежащих в области определения переменных t, μ, $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Тогда, как показано в [1], система (1.1) допускает аналитическое относительно μ периодическое решение, обращающееся при $\mu = 0$ в решение $\varphi_s(t, h_1^*, h_2^*, \ldots, h_m^*)$ семейства (1.3). Постоянные $h_1^*, \ldots, h_m^*$ должны удовлетворять уравнениям

$$P_i(h_1^*, \ldots, h_m^*) = \int\limits_0^\omega \sum_{s=1}^n f_s^{(i)}[t, \varphi_1(t, h_1^*, \ldots, h_m^*), \ldots, \varphi_n(t, h_1^*, \ldots, h_m^*)]\psi_{si} dt = 0, \tag{1.4}$$

где ψ_{si} - периодические решения уравнений, сопряженных с уравнениями в вариациях

$$\dot{\psi}_{si} = -\sum_{\alpha=1}^{n} p_{\alpha s}\psi_{\alpha i}.$$

Мы будем исследовать особый случай, когда уравнения (1.4) удовлетворяются тождественно при любом выборе части постоянных $h_1^*, h_2^*, \ldots, h_r^*$ $(0 \leqslant r \leqslant m)$, и докажем, что в определенных условиях существует единственная система рядов вида

$$x_s = \varphi_s(t, h_1^*, \ldots, h_m^*) + \mu x_s^{(1)} + \mu^2 x_s^{(2)} + \ldots \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1.5}$$

удовлетворяющих уравнениям (1.1), где $x_s^{(p)}$ - некоторые периодические функции t периода ω.

2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Чтобы получить уравнения для неизвестных функций $x_s^{(p)}$, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях μ в исходных уравнениях (1.1), заменив x_s их выражениями (1.5). В результате получим:

$$\dot{x}_s^{(1)} = \sum_{\alpha=1}^{n} p_{s\alpha} x_\alpha^{(1)} + f_s^{(1)}(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n), \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_s^{(2)} &= \sum_{\alpha=1}^{n} p_{s\alpha} x_\alpha^{(2)} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 X_s(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial\varphi_\alpha \partial\varphi_\beta} x_\alpha^{(1)} x_\beta^{(1)} \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_s^{(1)}(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial\varphi_\alpha} x_\alpha^{(1)} + f_s^{(2)}(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n), \\
\dot{x}_s^{(3)} &= \sum_{\alpha=1}^{n} p_{s\alpha} x_\alpha^{(3)} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 X_s}{\partial\varphi_\alpha \partial\varphi_\beta} x_\alpha^{(1)} x_\beta^{(2)} \\
&\quad + \frac{1}{6}\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{n} \frac{\partial^3 X_s}{\partial\varphi_\alpha \partial\varphi_\beta \partial\varphi_\gamma} x_\alpha^{(1)} x_\beta^{(1)} x_\gamma^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_s^{(1)}}{\partial\varphi_\alpha} x_\alpha^{(2)} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 f_s^{(1)}}{\partial\varphi_\alpha \partial\varphi_\beta} x_\alpha^{(1)} x_\beta^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_s^{(2)}}{\partial\varphi_\alpha} x_\alpha^{(1)} + f_s^{(3)}(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_s^{(k+2)} &= \sum_{\alpha=1}^{n} p_{s\alpha} x_\alpha^{(k+2)} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 X_s}{\partial\varphi_\alpha \partial\varphi_\beta} x_\alpha^{(k+1)} x_\beta^{(k+1)} + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 X_s}{\partial\varphi_\alpha \partial\varphi_\beta} x_\alpha^{(k)} x_\beta^{(2)} \\
&\quad + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 f_s^{(1)}}{\partial\varphi_\alpha \partial\varphi_\beta} x_\alpha^{(1)} x_\beta^{(k)} + \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{n} \frac{\partial^3 X_s}{\partial\varphi_\alpha \partial\varphi_\beta \partial\varphi_\gamma} x_\alpha^{(k)} x_\beta^{(1)} x_\gamma^{(1)} \\
&\quad + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_s^{(1)}}{\partial\varphi_\alpha} x_\alpha^{(k+1)} + \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_s^{(2)}}{\partial\varphi_\alpha} x_\alpha^{(k)} + F_s^{(k+2)} \quad (s = 1, 2, \ldots, n; k > 1),
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где $p_{s\alpha} = \partial X_s(t, \varphi_1, \dots, \varphi_n)/\partial \varphi_\alpha$, а $F_s^{(k+2)}$ - вполне определенные периодические функции времени, не зависящие от $x_\alpha^{(u)}$ $(u \geqslant k)$.

Периодическое решение уравнений относительно $x_s^{(1)}$ (2.1) при выполнении условий (1.4) может быть представлено в виде

$$x_s^{(1)} = x_s^{(1)^*} + \sum_{j=1}^{m} M_j^{(1)} \varphi_{sj},$$

где $M_j^{(1)}$ - произвольные постоянные, $x_s^{(1)^*}$ - какое-нибудь частное периодическое решение уравнений (2.1), а $\varphi_{s1}, \dots, \varphi_{sm}$ - периодические решения уравнений в вариациях $\dot{\varphi}_{sj} = \sum\limits_{\alpha=1}^{n} p_{s\alpha}\varphi_{\alpha j}$. Эти решения связаны с φ_j соотношениями вида $\varphi_{sj} = \partial \varphi_s(t, h_1^*, \dots, h_m^*)/\partial h_j^*$. Таким образом, функции $x_s^{(1)}$ содержат $m + r$ произвольных постоянных $h_1^*, \dots, h_r^*$, $M_1^{(1)}, \dots, M_m^{(1)}$.

Для того чтобы уравнения (2.2) допускали периодическое решение относительно $x_s^{(2)}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$Q_i(h_1^*, \dots, h_r^*, M_1^{(1)}, \dots, M_m^{(1)}) = \int\limits_0^\omega \sum_{s=1}^{n} \Big\{ \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 X_s}{\partial \varphi_\alpha \partial \varphi_\beta} x_\alpha^{(1)} x_\beta^{(1)}$$

$$+ \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial f_s^{(1)}}{\partial \varphi_\alpha} x_\alpha^{(1)} + f_s^{(2)}(t, \varphi_1, \dots, \varphi_n) \Big\} \psi_{si} dt = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \tag{2.4}$$

Теорема. *Если функциональный определитель левых частей уравнений* (2.4) *относительно h_ℓ^* и $M_q^{(1)}$ $(\ell = 1, 2, \dots, r; q = r + 1, \dots, m)$ отличен от нуля, то существует единственная система рядов вида* (1.5), *удовлетворяющих уравнениям* (1.1).

Аналогично предыдушей работе автора [2] ход доказательства этой теоремы будет следующий. Допустим, что все функции $x_s^{(h)}$ до $(k+1)$-го порядка уже вычислены и получились периодическими:

$$x_s^{(h)} = x_s^{(h)^*} + \sum_{j=1}^{m} M_j^{(h)} \varphi_{sj} \quad h = 1, 2, \dots, k+1), \tag{2.5}$$

где $x_s^{(h)^*}$ - какое-нибудь частное периодическое решение уравнений для $x_s^{(h)}$, а $M_j^{(h)}$ - постоянные. Предположим, что функции $x_s^{(1)}, \dots, x_s^{(k-1)}$ были определены полностью вместе с входяшими в них постоянными $M_1^{(u)}, \dots, M_m^{(u)}$ $(u = 1, 2, \dots, k-1)$ из условий периодичности функций $x_s^{(2)}, \dots, x_s^{(k-1)}$. Постоянные $M_{r-1}^{(k)}, \dots, M_m^{(k)}$ также были определены из условий периодичности функций $x_s^{(k-1)}$. Величины $M_\ell^{(k)}$ и $M_q^{(k+1)}$ $(\ell = 1, 2, \dots, r; q = r+1, \dots, m)$ еше подлежат определению.

Чтобы найти эти постоянные, составим условия периодичности функций $x_s^{(k+2)}$, некоторые после несложных промежуточных преобразований примут вид

$$\Omega_i = \sum_{j=1}^{m}\left[\int_0^{\omega}\sum_{s=1}^{n}\Big\{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\frac{\partial^2 X_s}{\partial\varphi_\alpha\partial\varphi_\beta}x_\beta^{(1)} + \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial f_s^{(1)}}{\partial\varphi_\alpha}\Big\}\varphi_{\alpha j}\psi_{si}dt\right]M_j^{(k+1)}$$
$$+\sum_{\rho=1}^{m}\left[\int_0^{\omega}\sum_{s,\alpha=1}^{n}\Big\{\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial^2 X_s}{\partial\varphi_\alpha\partial\varphi_\beta}x_\beta^{(2)^*}\varphi_{\overline{\alpha}\beta} + \frac{1}{2}\sum_{\beta,\gamma=1}^{n}\frac{\partial^3 X_s}{\partial\varphi_\alpha\partial\varphi_\beta\partial\varphi_\gamma}x_\beta^{(1)}x_\gamma^{(1)}\varphi_{\alpha\rho}\right.$$
$$+\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial^2 f_s^{(1)}}{\partial\varphi_\alpha\partial\varphi_\beta}x_\beta^{(1)}\varphi_{\alpha\rho} + \frac{\partial f_s^{(2)}}{\partial\varphi_\alpha}\varphi_{\alpha\rho} + \sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial^2 X_s}{\partial\varphi_\alpha\partial\varphi_\beta}x_\beta^{(1)}\frac{\partial x_\alpha^{(1)}}{\partial h_\rho^*}$$
$$\left.+\frac{\partial f_s^{(1)}}{\partial\varphi_\alpha}\frac{\partial x_\alpha^{(1)}}{\partial h_\rho^*}\Big\}\psi_{si}dt\right]M_\rho^{(k)} + R_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{2.6}$$

где R_i - вполне определенные постоянные, не содержащие $M_\rho^{(k)}$, $M_j^{(k+1)}$.

Нетрудно показать, что уравнения (2.6) могут быть представлены в виде:

$$\Omega_i = \sum_{q=r+1}^{m}\frac{\partial Q_i}{\partial M_q^{(1)}}M_q^{(k+1)} + \sum_{\ell=1}^{r}\frac{\partial Q_i}{\partial h_\ell^*}M_\ell^{(k)} + R_i^* = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Здесь $R_i^* = R_i + \sum\limits_{q=r+1}^{m}\dfrac{\partial Q_i}{\partial h_q^*}M_q^{(k)}$ - известные постоянные.

Мы получили, таким образом, систему m линейных алгебраических уравнений для определения m постоянных $M_1^{(k)}, \ldots, M_r^{(k)}$, $M_{r+1}^{(k+1)}, \ldots, M_m^{(k+1)}$, определитель которой $\partial(Q_1, Q_2, \ldots, Q_m)/\partial(h_1^*, \ldots, h_r^*, M_{r+1}^{(1)}, \ldots, M_m^{(1)})$ отличен от нуля по предположению. Поэтому постоянные $M_\ell^{(k)}$, $M_q^{(k+1)}$ и, следовательно, функции $x_s^{(p)}$ в формулах (1.5) определяются единственно, что и требуется доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Малкин, Некоторые задачи теории нелинейных колебаний, М., 1956.
2. Нгуен ван Дао, Дифференциальн. уравн., Минск, № 7 (1968).

VỀ DAO ĐỘNG CỦA CÁC HỆ GẦN VỚI HỆ PHI TUYẾN MẠNH

Trong bài báo xét dao động của các hệ gần với hệ phi tuyến mạnh, trong trường hợp đặc biệt, khi các phương trình xác định các biên độ cơ bản thỏa mãn đồng nhất với sự lựa chọn tùy ý của phần hằng số. Đã chỉ ra rằng một phần hằng số tùy ý trong mỗi xấp xỉ được xác định từ các xấp xỉ tiếp theo, còn một phần khác - từ những xấp xỉ một bậc nữa cao hơn.