

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ГАСИТЕЛЕМ

НГУЕН ВАН ДАО

(Москва, Ханой)

(This paper has been published in:

Известия Академии Наук СССР Механика № 4, 1965)

Исследованию стационарных колебаний динамической системы с гасителем как в линейной, так и в нелинейной постановке было посвящено немало работ (см., например, [1-5]). Недавно появились работы, в которых рассматривались колебания указанной системы в тех случаях, когда на ее основание воздействуют удар или случайное возмущение (см., например, [6]). До сих пор отсутствуют работы, посвященные исследованию нестационарных колебаний динамической системы с гасителем, находящейся под воздействием внешней силы с переменными частотой и амплитудой. В то же время в литературе высказываются сомнения, пригоден ли динамический гаситель колебаний для уменьшения нестационарных колебаний, и даже можно встретить предположение, что условия работы главной массы в системе с гасителем колебаний не улучшатся, а ухудшатся.

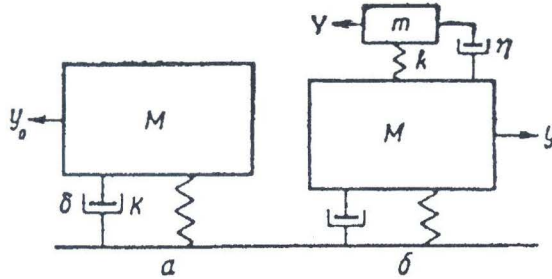
В настоящей работе рассматриваются нестационарные колебания при прохождении через резонанс динамической системы с гасителем, которая находится под воздействием внешней силы с переменными частотой и амплитудой. Также изучаются в линейном и нелинейном случаях колебания главной массы M в зависимости от значений основных параметров системы, а именно, от скорости изменения частоты внешней силы μ , от отношения массы гасителя и главной массы $\alpha = m/M$, от значения коэффициента трения δ и от нелинейных характеристик упругих связей β , γ . На основе проведенных нами исследований был получен вывод о положительной роли динамического гасителя колебаний, которая сказывается в уменьшении амплитуд нестационарных колебаний главной массы при прохождении через резонанс как линейных, так и нелинейных систем.

1. Обозначим смещения масс M и m (Фиг. 1) от их положений равновесия соответственно через y и Y , а силу, с которой главная пружина (K) действует на массу M , - через $R_1(y)$. Примем для этой функции выражение

$$R_1(y) = Ky + \beta y^3.$$

Допустим, что пружина гасителя (k) тоже имеет нелинейную характеристику вида

$$R_2(z) = kx + \gamma x^3.$$



Фиг. 1

Здесь $x = Y - y$ - удлинение, получаемое пружиной гасителя.

Чтобы выявить наглядно действие гасителя колебаний в нестационарных режимах при прохождении через резонанс, будем рассматривать параллельно систему с гасителем и систему без гасителя, сопоставляя их движение под действием одной и той же внешней силы. Кроме того, для удобства сравнения вычисления будут произведены для двух систем при одинаковых нулевых начальных условиях и с одинаковыми значениями параметров.

Уравнения движения системы с гасителем имеют вид

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} + (m + M) \frac{d^2 y}{dt^2} + Ky + \beta y^3 + \delta \frac{dy}{dt} &= E\nu^2(t) \sin \theta(t) \\ m \frac{d^2 x}{dt^2} + m \frac{d^2 y}{dt^2} + kx + \gamma x^3 + \eta \frac{dx}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Уравнение движения системы без гасителя будет

$$M \frac{d^2 y_0}{dt^2} + Ky_0 + \delta \frac{dy_0}{dt} + \beta y_0^3 = E\nu^2(t) \sin \theta(t), \quad \nu(t) = \frac{d\theta}{dt}, \quad E = \text{const.} \quad (1.2)$$

Уравнения (1.1) и (1.2) в безразмерных переменных примут вид

$$\begin{aligned} \alpha \frac{d^2 x_1}{dt_1^2} + (1 + \alpha) \frac{d^2 y_1}{dt_1^2} - y_1 + \beta_1 y_1^3 + \delta_1 \frac{dy_1}{dt_1} &= \nu_1^2(t_1) \sin \theta_1(t_1) \\ \frac{d^2 x_1}{dt_1^2} + \frac{d^2 y_1}{dt_1^2} + p^2 x_1 + \gamma_1 x_1^3 + \eta_1 \frac{dx_1}{dt_1} &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\frac{d^2 y_{01}}{dt_1^2} + y_{01} + \beta_1 y_{01}^3 + \delta_1 \frac{dy_{01}}{dt_1} = \nu_1^2(t_1) \sin \theta_1(t_1) \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x}{a_0}, & y_1 &= \frac{y}{a_0}, & y_{01} &= \frac{y_0}{a_0}, & a_0 &= \frac{E}{M}, & t_1 &= \Omega t \\ \nu_1 &= \frac{\nu}{\Omega}, & \Omega^2 &= \frac{K}{M}, & \omega^2 &= \frac{k}{m}, & p &= \frac{\omega}{\Omega}, & \alpha &= \frac{m}{M} \\ \delta_1 &= \frac{\delta}{M\Omega}, & \eta_1 &= \frac{\eta}{m\Omega}, & \beta_1 &= \frac{E^2}{\Omega^2 M^3} \beta, & \gamma_1 &= \frac{E^2}{\Omega^2 m M^2} \gamma. \end{aligned}$$

Для удобства записи будем опускать индекс 1 при буквах, т. е. сохраним за новыми переменными и параметрами прежние обозначения.

2. Задача решалась на электронной машине непрерывного действия "Полет" путем моделирования системы уравнений (1.3) и (1.4). При моделировании этих уравнений значения безразмерных параметров p и η были выбраны оптимальными для стационарных колебаний по формулам, предложенным в [1, 7],

$$p = \frac{1}{1 + \alpha}, \quad \eta^2 = \frac{3}{2} \frac{\alpha}{(1 + \alpha)^3} \quad (2.1)$$

Для упрощения будем считать, что мгновенная частота внешней силы $\nu(t)$ изменяется по заданному линейному закону, т. е.

$$\frac{d\nu}{dt} = \mu = \text{const.} \quad (2.2)$$

Чтобы реализовать на машине электрическую схему модели, соответствующую системе уравнений (1.3), потребовалось выбрать максимумы переменных в масштабе 100 в, а также ряд масштабных коэффициентов. Ниже числовые значения взяты для случая $\mu = 0.001$, $\delta = 0.03$.

Переменная	$y,$	$y' = \frac{dy}{dt},$	$x,$	$x' = \frac{dx}{dt}$
Масштаб	$k_1 = \frac{100}{y^*} = \frac{100}{30},$	$k_2 = \frac{100}{y'^*} = \frac{100}{40},$	$k_3 = \frac{100}{x^*} = \frac{100}{30},$	$k_4 = \frac{100}{x'^*} = \frac{100}{40}$
Переменная	$y' = \frac{dy}{dt},$	$y'' = \frac{dy'}{dt},$	$x' = \frac{dx}{dt},$	$x'' = \frac{dx'}{dt}$
Масштаб	$k_{11} = \frac{100}{y'^*} = \frac{100}{300},$	$k_{12} = \frac{100}{y''^*} = \frac{100}{200},$	$k_{13} = \frac{100}{x'^*} = \frac{100}{300},$	$k_{14} = \frac{100}{x''^*} = \frac{100}{200}$

Здесь звездочка обозначает значение переменной, соответствующее 100 в, τ - машинное время.

Произведем замену времени так, чтобы процесс, наблюдаемый на модели, длился 200 сек. Для этого нужно ввести машинное время $\tau = bt$, где $b = 200\mu/\nu_{\max}$.

Исходные уравнения (1.3) преобразовываются при помощи введения масштабов и замены переменных

$$z_1 = k_1 y, \quad z_2 = k_2 \frac{dy}{dt}, \quad z_3 = k_3 x, \quad z_4 = k_4 \frac{dx}{dt}, \quad z_5 = k_5 \theta, \quad z_6 = k_6 \frac{d\theta}{dt}$$

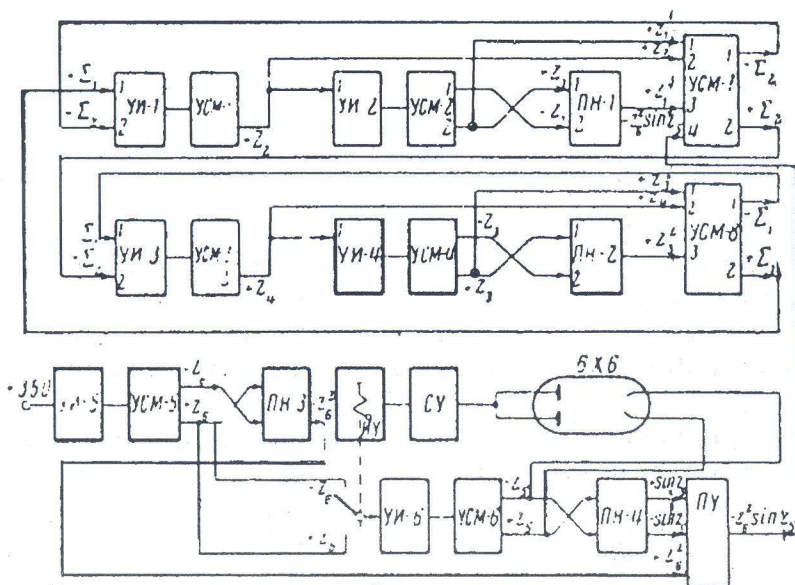
в систему машинных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dz_1}{d\tau} &= l_{11}z_2, \\ \frac{dz_2}{d\tau} &= \alpha(l_{21}z_3 + l_{22}z_4 + l_{23}z_3^3) - (l_{24}z_1 + l_{25}z_2 + l_{26}z_1^3 - l_{27}z_6^2 \sin z_5) \\ \frac{dz_3}{d\tau} &= l_{31}z_4 \\ \frac{dz_4}{d\tau} &= -(1 + \alpha)(l_{41}z_3 + l_{42}z_4 + l_{43}z_3^3) + (l_{44}z_1 + l_{45}z_2 + l_{46}z_1^3 - l_{47}z_6^2 \sin z_5) \\ \frac{dz_5}{d\tau} &= z_6, \quad \frac{dz_6}{d\tau} = 0.286 \quad (2.3) \end{aligned}$$

здесь

$$\begin{aligned} l_{11} &= \frac{k_{11}}{bk_2}, & l_{21} &= \frac{p^2k_{12}}{bk_3}, & l_{22} &= \frac{\eta k_2}{bk_4}, & l_{23} &= \frac{\gamma k_{12}}{bk_3^2}, & l_{24} &= \frac{k_{12}}{bk_1} \\ l_{25} &= \frac{\delta k_{12}}{bk_2}, & l_{26} &= \frac{\beta k_{12}}{bk_1^3}, & l_{27} &= \frac{k_{12}}{bk_6^2}, & l_{31} &= \frac{k_{13}}{bk_4}, & l_{41} &= \frac{p^2k_{14}}{bk_3} \\ l_{42} &= \frac{\gamma k_{14}}{bk_4}, & l_{43} &= \frac{\gamma k_{14}}{bk_3^3}, & l_{44} &= \frac{k_{14}}{bk_1}, & l_{45} &= \frac{\delta k_{14}}{bk_2}, & l_{46} &= \frac{\beta k_{14}}{bk_1^3} & l_{47} &= \frac{k_{14}}{bk_6^2} \end{aligned}$$

Для системы уравнений (2.3) была составлена моделирующая система, блок-схема которой приведена на Фиг. 2 где УИ - усилитель интегрирующий УСМ - усилитель суммирующий, ПН - панель нелинейности, ПУ - панель умножения, СУ - сравнивающее устройство, ИУ - исполнительное устройство.



Фиг. 2

Чтобы реализовать функцию $\sin \theta(t)$, потребовалось изготовить специальные блоки СУ и ИУ по схемам, предложенным в [8, 9].

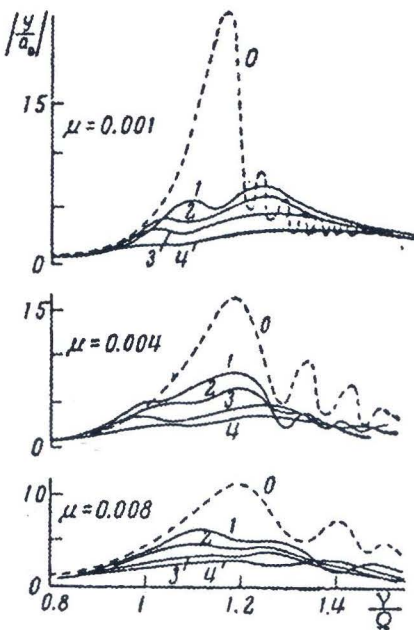
Программа моделирования линейной системы ($\beta = \gamma = 0$) преследовала следующие цели:

(а) изучить нестационарные колебания главной массы в зависимости от отношения масс $\alpha = m/M$;

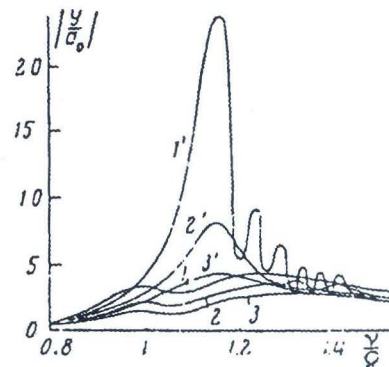
(б) изучить характер нестационарных колебаний главной массы при разных скоростях изменения частоты внешней силы μ ;

(в) выяснить влияние трения δ на максимум амплитуд колебания главной массы.

На Фиг. 3 приведены построенные по данным осциллограмм амплитудные кривые колебаний главной массы в линейной системе, для которой значение коэффициента трения δ принято равным $\delta = 0.03$. Эти амплитудные кривые характеризуют прохождение через резонанс системы со скоростью изменения частоты внешней силы $\mu = 0.001$, $\mu = 0.004$ и $\mu = 0.008$. Пунктирная кривая 0 представляет амплитудную кривую колебаний главной массы в системе без гасителя, а кривые 1, 2, 3, 4 - амплитудные кривые колебаний главной массы в системе с гасителем при значениях отношений масс α , соответственно равных $1/30$, $1/20$, $1/10$, $1/2$. Значения отношения массы $\alpha = m/M$ выбраны в широком диапазоне, чтобы выяснить поведение системы при увеличении массы гасителя.



Фиг. 3



Фиг. 4

На амплитудных кривых колебаний 1, 2, 3, 4 видны два резонансных пика, характерных для системы с гасителем. По сравнению с кривой 0,

кривые 1-4 меняются более плавно, на них почти не замечается характер затухающих биений (под биениями понимаются всплески на кривой переходного процесса). Видно также, что все кривые 1-4 лежат ниже кривой 0, соответствующей отсутствию гасителя. Максимум амплитуд колебаний главной массы в системе с гасителем меньше максимума амплитуд ее колебаний в системе без гасителя в несколько раз в зависимости от значений отношений масс. При этом следует заметить, что подобно тому, как это имеет место в стационарных режимах колебаний, в режимах прохождения через резонанс максимумы амплитуд колебаний главной массы тем меньше, чем больше отношение масс.

На Фиг. 4 представлены амплитудные кривые колебаний главной массы при разных значениях коэффициента трения, отнесенного к главной массе $\delta = 0.03$ (кривые 1',1), $\delta = 0.1$ (кривые 2',2) и $\delta = 0.2$ (кривые 3',3) для случая, когда скорость изменения частоты внешней силы равна $\mu = 0.001$. Из Фиг. 4 видно, что в системе без гасителя максимум амплитуд колебаний главной массы существенно зависит от трения δ (см. кривые 1', 2', 3'), а в системе с гасителем он зависит от этого трения только незначительно (см. кривые 1, 2, 3, где отношение масс принято равным $\alpha = 0.1$). Таким образом, работа динамического гасителя в нестационарных режимах при прохождении через резонанс будет более эффективной в механических системах с весьма малой силой сопротивления движению.

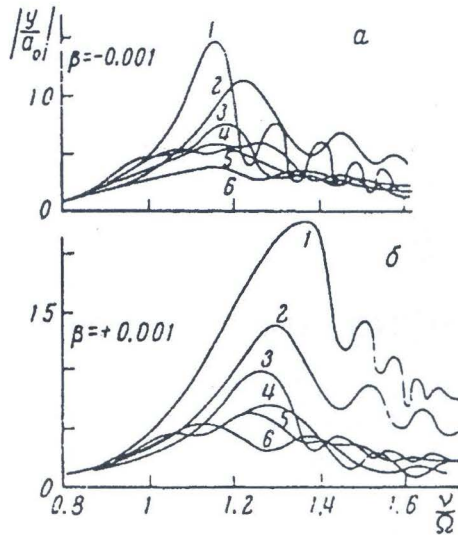
Анализ полученных результатов приводит к заключению, что динамический гаситель пригоден для уменьшения колебаний в нестационарных режимах при прохождении через резонанс.

В программе моделирования нелинейной системы, кроме перечисленных для линейной системы задач, основное внимание уделялось выяснению специфических особенностей, возникающих при нелинейной характеристике пружины, в частности, выяснению влияния нелинейности пружин на максимум амплитуд колебаний главной массы. Во всех обследованных случаях наличие виброгасителя приводит к значительному уменьшению максимума амплитуд колебаний главной массы.

При моделировании нелинейной системы отдельно рассматривались два случая: а) жесткая главная пружина ($\beta > 0$) в сочетании с жесткой ($\gamma > 0$) и мягкой ($\gamma < 0$) пружинами гасителя; б) мягкая главная пружина ($\beta < 0$) в сочетании с жесткой и мягкой пружинами гасителя.

Некоторые результаты моделирования нелинейной системы представлены на Фиг. 5. На Фиг. 5,а приведены амплитудные кривые колебаний главной массы в нелинейной системе с мягкой характеристикой главной пружины, а на Фиг. 5,б амплитудные кривые колебаний главной массы в системе с жесткой характеристикой главной пружины. Значения основных параметров системы выбирались такими же, какие использовались при моделировании линейной системы. За значения коэффициентов нелинейности взяты числа $\beta = \pm 10^{-3}$, $\gamma = \pm 10^{-3}$. На этих фигурах кривые 1, 3, 5 характеризуют прохождение резонансной зоны со скоростью изменения частоты внешней силы $\mu = 0.004$, кривые 2, 4, 6 характеризуют более быстрое прохождение резонансной зоны со скоростью изменения

частоты $\mu = 0.008$. Кривые 3, 4 - амплитудные кривые колебаний главной массы в системе с гасителем, имеющим мягкую характеристическую ($\gamma = -10^{-3}$), а кривые 5 и 6 - амплитудные кривые в системе с гасителем, имеющим жесткую характеристику ($\gamma = +10^{-3}$), где отношение масс принято равным $\alpha = 0.05$.



Фиг. 5

Нелинейность пружин вносит не только качественные изменения в картину движения системы [10], но и оказывает существенное влияние на максимум амплитуд колебаний главной массы. При сопоставлении кривых на фиг. 5 сразу видно, что в нелинейной динамической системе гаситель, имеющий пружину с мягкой характеристикой, в меньшей степени, а гаситель, имеющий пружину с жесткой характеристикой, в большей степени снижают амплитуды колебаний главной массы при прохождении через резонанс. Наибольший эффект гашения нестационарных колебаний главной массы в рассмотренных случаях достигался в системе с мягкой характеристикой главной пружины в сочетании с гасителем, имеющим пружину с жесткой характеристикой.

Из проведенного исследования можно сделать вывод о положительной роли динамического гасителя в нестационарных колебаниях при прохождении через резонанс как для линейных, так и для нелинейных систем.

Автор благодарит В. О. Кононенко за руководство работой и ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж.Ден - Гарторг, Механические колебания, Физматгиз, 1960.
2. R. E. Roberson, Synthesis of a nonlinear dynamic vibration absorber. Franklin Inst., 1952, vol. 254, p. 206-220.
3. F. R. Arnold, Steady - State behavior of systems provided with nonlinear dynamic vibration absorbers. J. Appl. Mech. Trans ASME, 1955, vol. 77, p.487-492.

4. В. Дж. Картер и Ф. Г. Лью, Поведение нелинейного динамического амортизатора колебаний в установившемся состоянии. Сб. "Прикладная механика", (Тр. Амер. об-ва инж.-механ.) Изд. иностр. лит., 1962 № 1, стр.80-84.
5. T. C. Snowdon, Steady - state behavior of the dynamic absorber, J. Acoust. Soc. America, 1959, No 8, p. 1096-1103.
6. T. C. Snowdon, Transient behavior of the dynamic absorber. J. Acoust. Soc. America, 1959, vol. 31, No 12, p.1668-1675.
7. Кин Н. Тонг, Теория механических колебаний, Машгиз, 1963.
8. В. С. Тарасов, Ю. В. Ракитский, А. И. Важнов, В. В. Попов, Л. И. Семенов, Методика исследования динамической устойчивости на динамических полиномах непрерывного действия. Электричество, 1960, № 4.
9. В. С. Тарасов, Ю. В. Ракитский, В. В. Дмитриев, Получение зависимостей при большем диапазоне изменения аргумента. Научно-техн. информ. бюл. Ленингр. политехн. ин-та 1959, № 5.
10. Ю. А. Митропольский, Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний. Изд-во "Наука", 1964.

DAO ĐỘNG KHÔNG DỪNG CỦA HỆ ĐỘNG LỰC CÓ BỘ TẮT CHẮN

Có không ít công trình (xem ví dụ [1-5]) nghiên cứu dao động dừng của hệ động lực có bộ tắt chấn trong cả trường hợp tuyến tính và phi tuyến. Cách đây không lâu xuất hiện những công trình, trong đó đã khảo sát dao động của các hệ trên trong những trường hợp, khi có tác động của va chạm hay kích động ngẫu nhiên (xem ví dụ, [6]). Cho đến nay chưa có những công trình nghiên cứu dao động không dừng của hệ động lực có bộ tắt chấn dưới tác dụng của lực ngoài với tần số và biên độ biến thiên. Trong khi đó có những công bố đưa ra nghi ngờ, liệu bộ tắt chấn động lực có lợi hay không để giảm dao động không dừng, và thậm chí có thể gặp những phát biểu rằng điều kiện làm việc của khối lượng chính trong hệ có bộ tắt chấn động lực không những không được cải thiện, mà còn bị xấu đi.

Công trình này xét những dao động không dừng đi qua cộng hưởng của hệ động lực có bộ tắt chấn dao động dưới tác động của lực ngoài có tần số và biên độ biến thiên.

Đồng thời cũng xét các trường hợp dao động tuyến tính và phi tuyến của vật khối lượng chính M phụ thuộc vào các tham số cơ bản của hệ, đó là tốc độ thay đổi tần số lực ngoài μ , tỷ số giữa khối lượng bộ tắt chấn và khối lượng chính $\alpha = m/M$, hệ số ma sát δ và các đặc trưng phi tuyến của các liên kết đàn hồi β , γ . Trên cơ sở những nghiên cứu của chúng tôi đã đưa ra kết luận về vai trò tích cực của bộ tắt chấn động lực có tác dụng làm giảm biên độ dao động không dừng của khối lượng chính khi đi qua cộng hưởng của hệ tuyến tính cũng như phi tuyến.