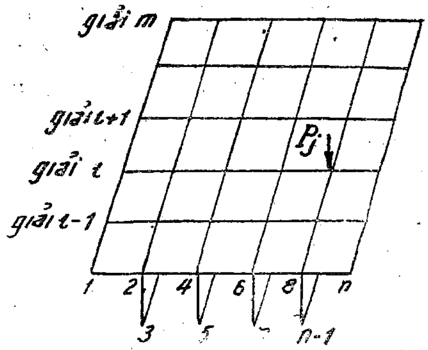
Tạp chí CƠ HỌC 1981 số 4 (Trang 26 – 30)

PHƯƠNG PHÁP CHUYỀN TIẾP TRÊN HỆ TẤM CÓ SƯỜN

BÙI ĐỨC TÂN

§ ĐẶT VẤN ĐỀ

KHI tính toán nội lực cầu hệ dầm (dầm đặc, dầm hộp, dầm thép — bêtông liên hợp) theo phương pháp phần tử hữu hạn, ta chia chúng thành các phần tử tấm hoặc tấm và thanh. Để tiết kiệm bộ nhớ của máy tính trong trường hợp số lượng các phần tử quá lớn trong bài báo trình bày 1 phương pháp chuyền tiếp trên hệ tấm có sườn. Giả sử cầu hệ dầm được chia thành các phần tử tấm nối cứng tại nút như hình 1. Mỗi nút có 6 chuyền vị độc lập nên số ần của hệ là $6n \times m$. Nếu ta chỉ lấy chuyền vị của giải nút đầu tiên làm ần số rồi lần lượt chuyền tiếp đến các giải tiếp theo và thành lập điều kiện biên ở giải nút cuối cùng thì kích thước của ma trận A trong hệ phương trình $A\vec{X} + \vec{B} = 0$ sẽ giảm xuống n lần so với phương pháp chuyền vị thông thường.



Hình 1

§1. GIẢ THIẾT VÀ KÝ HIỆU

1. Sử dụng các giả thiết quen thuộc của cơ học kết cấu ta xét hệ có m giải nút mỗi giải đều có n nút.

2. Véctơ chuyền vị (hoặc phản lực) của các nút thuộc giải i ($i = 1 \div m$) ký hiệu là $\vec{U}_{i(6n)}$. Theo cách đánh số của hình vẽ chỉ số mỗi nút của giải i biến thiên từ $(i-1)n + 1$ đến ni.

3. Để cho đơn giản, ta gọi

$$K^{S}_{lt\,(6\times 6)}$$

là khối con của ma trận độ cứng của phần tử tâm S. biểu thị lực hút tại 1. chuyền vị, tại nút t ($l, t \in s$) gây ra sau khi đã biến đổi theo hệ tọa độ chung.

§ 2. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CHUYỀN TIẾP

Giả sử chọn $\vec{U}_1$ làm vectơ ẩn số ban đầu và $\vec{U}_{i-1}$, $\vec{U}_i$ đã được biểu diễn qua $\vec{U}_1$, từ điều kiện cân bằng tĩnh tại giải i ta rút ra $\vec{U}_{i+1}$ như sau:

$$\vec{U}_{i+1} = -\mathcal{K}^{-1}_{i,\,i+1}\left(\mathcal{K}_{i,\,i-1}\vec{U}_{i-1} + \mathcal{K}_{i,\,i}\vec{U}_i + \vec{P}_i\right) \tag{2.1}$$

Ở đây:

$\vec{P}_i$ — vectơ tải trọng ngoài tại giải i, (6n). $\mathcal{K}_{i-1,\,i}$, $\mathcal{K}_{i,\,i}$, $\mathcal{K}_{i,\,i+1}$ là các ma trận độ cứng thuộc giải i, mỗi phần tử của chúng biểu thị lực nút trên giải i do chuyền vị tương ứng trên giải i−1, i hay i+1 gây ra.

Ta hãy xét cấu trúc của các ma trận này. Vì các giải có số lượng nút như nhau nên chúng là những ma trận vuông cấp 6n × 6n, chứa n × n khối con cấp 6 × 6. Tùy theo dạng kết cấu, mỗi ma trận này sẽ có một số nhất định đường chéo khối. Như hình vẽ, số đường chéo khối của chúng là 4, bởi vì mỗi nút của giải i, có liên hệ nhiều nhất là 4 và ít nhất là 2, với các nút thuộc giải i−1, i hay i+1.

Một cách tổng quát, ma trận độ cứng $\mathcal{K}_{i,\,p}$, (với p = i−1, i và i+1) có dạng:

$$\mathcal{K}_{i\,,\,p} = [K_{kq}]\,;\quad k,q = 1 \div n \tag{2.2a}$$

trong đó

$$K_{kq} = \Sigma\, K^{S}_{lt\;(6\times 6)} \tag{2.2b}$$

K_{kq} biểu thị các thành phần lực của nút k (k ∈ i) do chuyền vị nút q. (q ∈ p) gây ra. Đương nhiên khi k ∈ i và q ∈ p không chung phần tử S thì $K_{kq} = 0$. Dấu tổng ở vế phải của (2.2b) thực hiện trên mọi phần tử S có chung k và q. tức là tổng các ma trận độ cứng (1.1) của các phần tử có chung nút

$$\begin{aligned} l &= (i-1)n + k \\ t &= (p-1)n + q \end{aligned} \tag{2.2c}$$

Biểu thức (2.1) viết dưới dạng tổng quát cho những hệ chứa các phần tử bất kỳ chỉ cần các giải có số lượng phần tử nút như nhau. Như hình vẽ, sau khi chọn $\vec{U}_1$ làm vectơ ẩn ban đầu, quá trình chuyền tiếp sẽ bắt đầu từ giải i = 2 đến giải i = m. Dễ thấy rằng khi ở giải i có liên kết cứng thì chuyền vị tương ứng với liên kết đó bằng không và phản lực tương ứng phải xem là ẩn số. Lúc đó các ma trận độ cứng $\mathcal{K}_{i\,,\,p}$ trong (2.1) phải biến đổi:

$$\vec{U}_{i+1} = -\mathcal{K}^{-1}_{i,\,i+1}\left(\mathcal{K}_{i,\,i-1}\vec{U}_{i-1} + \mathcal{K}^{*}_{i,\,i}\vec{U}_i + X_i + \vec{P}_i\right) \tag{2.3a}$$

và

$$\vec{U}_{i+2} = -\mathcal{K}^{-1}_{i+1,\,i+2}\left(\mathcal{K}^{*}_{i+1,\,i}\vec{U}_i + \mathcal{K}_{i+1,\,i+1}\vec{U}_{i+1} + \vec{P}_{i+1}\right) \tag{2.3b}$$

Trong đó $\mathcal{K}^{*}_{i,\,i}$ và $\mathcal{K}^{*}_{i+1,\,i}$ là các ma trận độ cứng $\mathcal{K}_{i,\,i}$ và $\mathcal{K}_{i+1,\,i}$ đã biến đổi, sao cho các phần tử trên cột tương ứng với liên kết cứng bằng không. Ngoài các ẩn số ban đầu chứa trong $\vec{U}_1$, vectơ $\vec{X}_i$ trong (2.3b) biểu thị các phản lực là ẩn số bổ sung của giải i. $\vec{X}_i$ có chiều là 6n, gồm các phần tử 0, trừ các phần tử tương ứng với liên kết cứng trên giải i bằng −1.

§3. ĐIỀU KIỆN BIÊN

Điều kiện biên để giải ẩn số ban đầu là các thành phần lực hay chuyển vị đã biết trước. Chẳng hạn, tại giải nút cuối cùng trên hình vẽ có r liên kết cứng thì ta có ngay r phương trình chứa ẩn số ban đầu biểu thị các chuyển vị tương ứng với liên kết đó bằng không trích trong hệ phương trình xác định chuyển vị nút của giải m:

$$\vec{U}_m = -\mathcal{K}^{-1}_{m-1,m}(\mathcal{K}_{m-1,m-2}\vec{U}_{m-2} + \mathcal{K}_{m-1,m-1}\vec{U}_{m-1} + \vec{P}_{m-1}) \quad (3.1a)$$

Giả sử hệ chỉ có 6n ẩn ban đầu, để giải chúng, ngoài r phương trình lấy trong (3.1a), số còn lại (6n−r) phương trình lấy được trong hệ phương trình cân bằng tĩnh tại các nút của giải m:

$$\mathcal{K}^{*}_{m,m}\vec{U}_m + \mathcal{K}_{m,m-1}\vec{U}_{m-1} + \vec{P}_m = 0 \quad (3.1b)$$

Rõ ràng khi gặp gối cứng phải đưa thêm ẩn vào các ẩn số ban đầu, nhưng chính tại các gối cứng đó ta thành lập được điều kiện biên bổ sung biểu thị chuyển vị bằng không. Nếu hệ có gối đàn hồi thì các yếu tố lực của gối đàn hồi sẽ có mặt trong các ma trận độ cứng giải $\mathcal{K}_{i,p}$ trong (2.1), và hệ số đàn hồi của gối cho phép ta xác định các phản lực tương ứng.

Tóm lại, để giải bài toán theo phương pháp trên ta cần thực hiện các bước sau:

1. Phân chia kết cấu thành các phần tử S và thành lập các ma trận độ cứng phần tử K^s (1.1)

2. Xác định vectơ ẩn số ban đầu và xây dựng các ma trận độ cứng của giải $\mathcal{K}_{i,p}$ theo (2.2a), (2.2b). Nếu có các gối cứng trung gian thì biến đổi $\mathcal{K}_{i,p}$ để có $\mathcal{K}^{*}_{i,p}$ trong (2.3a), (2.3b)

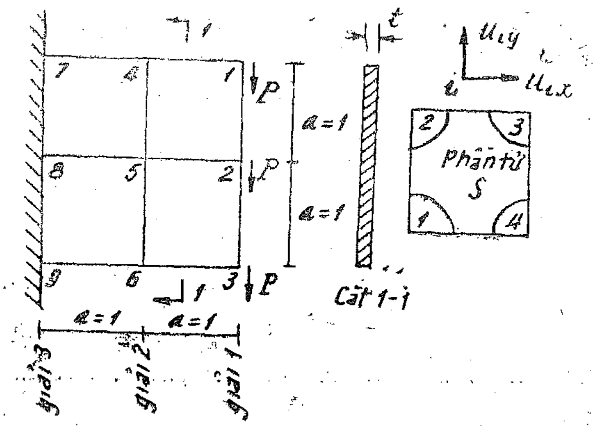
3. Thực hiện chuyển tiếp theo (2.1) để có vectơ chuyển vị giải nút cuối cùng.

4. Thành lập điều kiện biên theo (3.1a), (3.1b) và giải ra ẩn ban đầu.

5. Lặp lại bước 3 để tìm chuyển vị nút của các giải và từ chuyển vị nút tính nội lực nút của hệ.

§4 THÍ DỤ

Ta hãy xét một thí dụ đơn giản bằng số để nói rõ phương pháp. Cần xác định chuyển vị nút của tấm phẳng như hình 2. Chia tấm làm 4 phần tử, chiều dương của chuyển vị và thứ tự nút ghi trên hình vẽ. Cho trước ma trận độ cứng của 1 phần tử (K^s_{ij})



Hình 2

$$
K^{s} = K^{s}_{1t} = \frac{E.t}{48}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} \quad 1 & & \quad 2 & & \quad 3 & & \quad 4 & \end{array} \\
\left(\begin{array}{rrrrrrrr}
32 & 10 & -7 & 5 & -8 & -10 & -17 & -5 \\
10 & 32 & -5 & -17 & -10 & -8 & 5 & -7 \\
-7 & -5 & 32 & -10 & -17 & 5 & -8 & 10 \\
5 & -17 & -10 & 32 & -5 & -7 & 10 & -8 \\
-8 & -10 & -17 & -5 & 32 & 10 & -7 & 5 \\
-10 & -8 & 5 & -7 & 10 & 32 & -5 & -17 \\
-17 & 5 & -8 & 10 & -7 & -5 & 32 & -10 \\
-5 & -7 & 10 & -8 & 5 & -17 & -10 & 32
\end{array}\right)
\end{array}
\begin{array}{c} 1 \\ \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ 4 \\ \end{array}
$$

Chọn các chuyển vị nút giải 1 làm ẩn ban đầu:

$$\vec{U_1} = \{U_{1x},\ U_{1y},\ U_{2x},\ U_{2y},\ U_{3x},\ U_{3y}\}$$

Véctơ tải trọng tại giải 1:

$$\vec{P_1} = \{0 \quad -P \quad 0 \quad -P \quad 0 \quad -P\}$$

Ta có các $\mathcal{K}_{i,p}$ như sau:

$$
\mathcal{K}_{1,1} = \begin{pmatrix}
K^{s}_{33} & K^{s}_{34} & 0 \\
K^{s}_{43} & K^{s}_{44} + K^{s}_{33} & K^{s}_{34} \\
0 & K^{s}_{43} & K^{s}_{44}
\end{pmatrix}
$$

$$
\mathcal{K}_{2,2} = \begin{pmatrix}
K^{s}_{22} + K^{s}_{33} & K^{s}_{21} + K^{s}_{34} & 0 \\
K^{s}_{43} + K^{s}_{12} & \sum\limits_{j=1}^{4} K^{s}_{jj} & K^{s}_{21} + K^{s}_{34} \\
0 & K^{s}_{43} + K^{s}_{12} & K^{s}_{44} + K^{s}_{11}
\end{pmatrix}
$$

$$
\mathcal{K}_{1,2} = \begin{pmatrix}
K^{s}_{32} & K^{s}_{31} & 0 \\
K^{s}_{42} & K^{s}_{41} + K^{s}_{32} & K^{s}_{31} \\
0 & K^{s}_{42} & K^{s}_{41}
\end{pmatrix}
$$

$$\mathcal{K}_{2.1} = \mathcal{K}^{T}_{1.2}; \quad \mathcal{K}_{2,3} = \mathcal{K}_{1.2}$$

Sử dụng phương trình (2.1) với $i = 1 \div 2$ ta có hệ phương trình chính tắc của điều kiện biên, biểu thị các chuyển vị nút của giải 3 bằng không:

$$
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
59{,}11 & -26{,}045 & -31{,}937 & 24{,}312 & -2{,}11 & 30{,}950 & -1{,}606 \\
137{,}706 & 437{,}190 & -117{,}390 & -598{,}165 & -14{,}706 & 303{,}389 & 14{,}855 \\
-8{,}327 & 249{,}310 & 71{,}638 & -323{,}273 & -15{,}355 & 81{,}310 & 4{,}682 \\
-96{,}723 & -544{,}581 & 33{,}217 & 885{,}713 & 96{,}723 & -544{,}581 & -19{,}747 \\
-3{,}058 & -73{,}615 & -32{,}100 & 59{,}113 & 58{,}605 & -16{,}615 & 0{,}397 \\
8{,}639 & 30{,}362 & 53{,}805 & -64{,}245 & -131{,}640 & 164{,}162 & 6{,}482
\end{bmatrix}
\times
\begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \end{bmatrix}
$$

Hệ này được chuyển vị nút của giải 1 (nhân với $\frac{48P}{Et}$):

$U_{1x} = 0{,}105419$; $U_{1y} = -0{,}253151$; $U_{2x} = -0{,}026383$

$U_{2y} = -0{,}235955$: $U_{3x} = -0{,}156680$; $U_{3y} = -0{,}215031$

Quá trình lặp lại cho:

$$U_{4x} = 0{,}077768 \;;\; U_{4y} = -0{,}091825 \;;\; U_{5x} = -0{,}016382$$
$$U_{5y} = -0{,}088058 \;;\; U_{6x} = -0{,}102285 \;;\; U_{6y} = -0{,}110896$$

Phương pháp chuyền tiếp trên đây cũng có những ưu khuyết điểm như phương pháp ma trận chuyền. Điều đáng quan tâm là cấp của ma trận nghịch đảo nhỏ thua cấp của hệ phương trình chính tắc theo phương pháp chuyền vị thông thường m lần. Phương pháp cũng rất tiện lợi khi áp dụng vào hệ thanh không gian phức tạp, hệ dầm hộp v.v..

Địa chỉ:
Trung học giao thông vận tải đường bộ

Nhận ngày 20-10-1980

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ПОНОМАРЕВ К.К. Расчет элементов конструкций с применением ЭЦВМ, М. 1972.
2. УЛИЦКИЙ Б.Е. и другие. Пространственные расчеты мостов. М. 1967.
3. АЛЕКСАНДРОВ А.В. и другие. Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ. М. 1976.
4. HỒ ANH TUẤN, TRẦN BÌNH. Phương pháp phần tử hữu hạn. Hà nội, 1978.
5. KERSTEN R. Das Reduction verfahren der Baustatik — Verfahren Ubetragungsmatrizen. Berlin, 1962.

РЕЗЮМЕ

МЕТОД ПЕРЕХОДА В СИСТЕМЕ РЕБРИСТЫХ ПЛАСТИНОК

Главная идея этого метода представляет собой применение матриц жескости к автоматизации перехода начальных неизвестных в проблемах ребристых пластинок. Процесс перехода осуществляемся путём применения уравнений статического равновесия в узлах.

Рассмотренный выше метод также приготен в проблемах сложных пространственных стержневых систем и коробчатых балок.