Tạp chí CƠ HỌC 1981 số 4 (trang 12 – 19)

TÍNH ỨNG SUẤT PHẲNG TRONG TẤM CÓ GỜ

VŨ MẠNH LÃNG

§ 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

TẤM mỏng có gờ thường được sử dụng để xây dựng các công trình, phương tiện phục vụ giao thông (cầu, tàu thủy, máy bay v.v...). Trong quá trình tính toán để thiết kế các loại công trình, phương tiện đó cần phải xác định độ bền của tấm có gờ trong trường hợp kết cấu làm việc kéo (nén). Bài này giới hạn trong việc tính ứng suất phẳng của tấm có gờ, tức là xét sự làm việc của tấm có gờ chịu tác dụng của ngoại lực nằm trong cùng một mặt phẳng

Để tính ứng suất phẳng của dạng kết cấu này, ở đây đã dùng phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH), nhằm khắc phục một số khó khăn gặp phải khi tính theo các phương pháp khác. Khi sử dụng phương pháp PTHH đã quan tâm đến việc chọn giả thiết về hàm chuyền vị thích hợp với bài toán; xây dựng các ma trận cứng cho các loại phần tử tương ứng và cuối cùng nêu lên một phương thức tập hợp các phần tử lập nên hệ. Những vấn đề khác được thực hiện theo các lập luận của phương pháp PTHH sẽ không trình bày ở đây

§ 2. CHỌN GIẢ THIẾT VỀ HÀM CHUYỀN VỊ

Kết cấu gồm bản phẳng có tăng cường các gờ theo một hoặc hai hướng được chỉ thành các phần tử tấm và phần tử gờ. Các phần tử này nối với nhau tại các điểm nút. Ở mỗi nút xét các chuyền vị u và v theo hai hướng của mặt phẳng kết cấu. Giả sử lưới chia song song với các gờ, đối với phần tử gờ tại nút chỉ xét chuyền vị theo một hướng — hướng dọc theo trục của gờ ; còn đối với phần tử tấm xét chuyền vị theo hai hướng tại mỗi nút. Việc bố trí gờ theo một hướng nhằm tăng cường sự làm việc theo hướng đó. Ngoài việc xét các chuyền vị tại nút, xét thêm các chuyền vị trung bình dọc theo biên của phần tử tấm và phần tử gờ ; điều này làm tăng thêm tính liên đới làm việc giữa phần tử tấm và phần tử gờ. Hàm chuyền vị đối với các phần tử tấm và phần tử gờ sẽ được chọn sao cho số hệ số tự do phải bằng số chuyền vị cần xác định, hơn nữa hàm chuyền vị cần phải thỏa mãn các điều kiện để bài toán hội tụ [1]

Đối với phần tử gờ (hình 1.a), tại mỗi nút xét các chuyền vị dọc theo trục, xét thêm chuyền vị trung bình dọc theo phần tử giữa hai nút. Chọn giả thiết về hàm chuyền vị như sau :

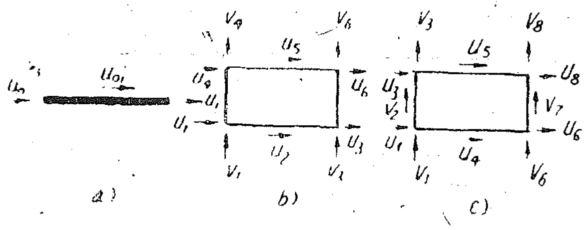
$$u = a_1 + a_2x + a_3x^2 \tag{2.1}$$

Trường hợp tấm có gờ theo một hướng, ở nút của phần tử tấm xét các chuyền vị theo hai hướng, ngoài ra còn xét thêm các chuyền vị trung bình dọc biên theo hướng có tăng cường gờ (hình 1b). Giả thiết về hàm chuyền vị được chọn :

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2x + a_3x^2 + y(a_4 + a_5x + a_6x^2) \\ v &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy \end{aligned} \tag{2.2}$$

Tương tự xét phần tử tấm trong kết cấu tấm có gờ theo hai hướng (hình 1c), chọn giả thiết về hàm chuyển vị :

$$u = a_1 + a_2x + a_3x^2 + y(a_4 + a_5x + a_6x^2) \qquad (2.3)$$
$$v = b_1 + b_2y + b_3Y^2 + x(b_4 + b_5y + b_6y^2)$$



Hình 1

Hàm chuyển vị đối với phần tử tấm chọn ở trên phản ánh điều kiện làm việc tại biên gần giống như gờ

§ 3. XÂY DỰNG MA TRẬN CỨNG

Để có thể thành lập được thuật toán tính theo phương pháp phần tử hữu hạn, phải xây dựng được những ma trận cứng cần thiết cho các loại phần tử khác nhau. Dựa vào những giả thiết nêu ở phần trên sẽ tiến hành xây dựng các ma trận cứng cho các phần tử gờ và tấm theo các thủ tục của phương pháp phần tử hữu hạn.

3.1. Phần tử gờ: Xét phần tử gờ có diện tích tiết diện là F, mô đun đàn hồi E và độ dài L. Dựa theo giả thiết về hàm chuyển vị (2.1) sẽ thiết lập quan hệ giữa lực và chuyển vị qua ma trận cứng K_G. Để xây dựng hàm nội suy xét các giá trị $U(x)$ tại hai đầu của phần tử và giá trị trung bình dọc theo chiều dài của phần tử.

$$U_o = a_1$$

$$U_{o1} = \frac{1}{L}\int_0^L U(x)\,dx = a_1 + a_2\frac{L}{2} + a_3\frac{L^2}{3} \qquad (3.1)$$

$$U_1 = a_1 + a_2L + a_3L^2$$

Lúc đó $U(x)$ có thể viết dưới dạng:

$$U(x) = \left\{\left(1 - \frac{4x}{L} + \frac{3x^2}{L^2}\right)\left(\frac{6x}{L} - \frac{6x^2}{L^2}\right)\left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x}{L}\right)\right\}\begin{Bmatrix} U_o \\ U_{o1} \\ U_1 \end{Bmatrix} \qquad (3.2)$$

Xây dựng các ma trận cần thiết theo công thức tính ma trận cứng của phương pháp PTHH, sau khi tính toán nhận được ma trận cứng K_G của phần tử gờ:

$$K_G = \frac{2EF}{L}\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} \qquad (3.3)$$

3.2. Phần tử tấm trong kết cấu có gờ theo một hướng.

Xét phần tử tấm (hình 1.b) theo hướng chuyển vị u là hướng sẽ làm việc liên đới với các gờ tăng cường. Giả thiết về hàm chuyển vị được chọn theo (2.2). Phần tử tấm có kích thước là a, b, mô đun đàn hồi E, hệ số vật liệu ν, độ dày t. Các chuyển vị u_2 và u_5 là các chuyển vị trung bình dọc theo biên được xác định theo công thức:

$$U_{tb} = \frac{1}{a}\int_0^a u(x, y)\,dx$$

Sau khi tính giá trị của hàm chuyển vị tại các điểm nút và giá trị trung bình của chuyển vị $u(x)$ ở biên song song với trục Y, hàm chuyển vị $u(x, y)$ và $v(x,y)$ được biểu diễn qua các chuyển vị đã biết. Ma trận cứng của phần tử K_{B1} được tính theo [1]. Giá trị cụ thể của ma trận K_{B1} xem trên bảng 1.

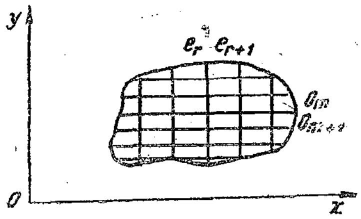
3.3. Phần tử tấm trong kết cấu có gờ theo hai hướng:

Xét phần tử tấm trong kết cấu có gờ theo hai hướng (hình 1c) xuất phát từ điều kiện làm việc, giả thiết về hàm chuyển vị được chọn theo (2.3).

Quá trình xây dựng ma trận cứng được thực hiện tương tự, giá trị cụ thể của ma trận K_{B2} xem bảng 2.

§ 4. XÂY DỰNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH TÍNH TOÁN

Sau khi có các phần tử của ma trận cứng, việc tập hợp các phần tử để lập nên hệ phương trình cơ bản của toàn hệ thống được thực hiện theo cách ghép chuyển vị. Trong tính toán việc xây dựng hệ phương trình cơ bản của toàn hệ là một quá trình phức tạp, tỉ mỉ, có thể thực hiện theo các thuật toán khác nhau. Thuật toán trình bày dưới đây xét cho trường hợp kết cấu mỏng có gờ bố trí theo một hướng còn trường hợp gờ bố trí theo hai hướng suy ra tương tự.



Hình 2

Toàn bộ kết cấu được chia thành n dải D_1, D_2, D_3,... D_n. Mỗi dải có n_m phần tử tấm, các phần tử gờ được bố trí giữa các phần tử tấm e_r và e_{r+1}. Ma trận cứng của phần tử tấm cho trên bảng 1 được viết dưới dạng khối như sau:

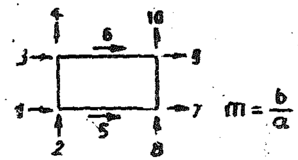
$$K^r = \left\|\begin{array}{c|c|c} K^r_{11} & K^r_{12} & K^r_{13} \\ \hline K^r_{21} & K^r_{22} & K^r_{23} \\ \hline K^r_{31} & K^r_{32} & K^r_{33} \end{array}\right\| \tag{4.1}$$

Trong đó K^r là ma trận (10×10)

K^r_{11} và K^r_{33} là ma trận (4×4)

K^r_{22} là ma trận (2×2)

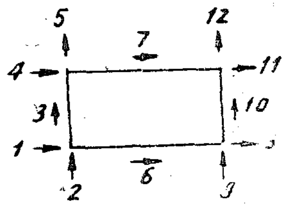
Bảng 1



ĐỐI XỨNG

$$
K_{B1} = \frac{Et}{1-\nu^2}
\begin{bmatrix}
\frac{4}{3m}+\frac{1-\nu}{15m} \\
\frac{\nu}{2} & \frac{1}{3m}+\frac{1-\nu}{6}m \\
\frac{2}{3m}-\frac{1-\nu}{15m} & \frac{\nu}{2} & \frac{4}{3}m+\frac{1-\nu}{15m} \\
-\frac{\nu}{2} & -\frac{1}{3m}+\frac{1-\nu}{12}m & -\frac{\nu}{2} & \frac{1}{3m}+\frac{1-\nu}{6}m \\
-2m-\frac{1-\nu}{20m} & \frac{1-3\nu}{4} & -m+\frac{1-\nu}{20m} & \frac{1+\nu}{4} & 4m+\frac{3(1-\nu)}{5m} \\
-m+\frac{1-\nu}{20m} & -\frac{1+\nu}{4} & -2m-\frac{1-\nu}{20m} & -\frac{1-3\nu}{4} & 2m-\frac{3(1-\nu)}{5m} & 4m+\frac{3(1-\nu)}{5m} \\
\frac{2}{3m}-\frac{1-\nu}{60m} & 0 & \frac{1}{3}m+\frac{1-\nu}{60m} & 0 & -2m-\frac{1-\nu}{20m} & -m+\frac{1-\nu}{20m} & \frac{4}{3}m+\frac{1-\nu}{15m} \\
0 & \frac{1}{6m}-\frac{1-\nu}{6}m & 0 & -\frac{1}{6m}-\frac{1-\nu}{12m} & -\frac{1-3\nu}{4} & \frac{1+\nu}{4} & -\frac{\nu}{2} & \frac{1}{3m}+\frac{1-\nu}{6}m \\
\frac{m}{3}+\frac{1-\nu}{60m} & 0 & \frac{2}{3}m-\frac{1-\nu}{60m} & 0 & -m+\frac{1-\nu}{20m} & -2m-\frac{1-\nu}{20m} & \frac{2}{3}m+\frac{1-\nu}{15m} & -\frac{\nu}{2} & \frac{4}{3}m+\frac{1-\nu}{15m} \\
0 & -\frac{1}{6m}-\frac{1-\nu}{12}m & 0 & \frac{1}{6m}-\frac{1-\nu}{6}m & -\frac{1+\nu}{4} & \frac{1-3\nu}{4} & \frac{\nu}{2} & -\frac{1}{3m}+\frac{1-\nu}{12}m & \frac{\nu}{2} & \frac{1}{3m}+\frac{1-\nu}{6}m
\end{bmatrix}
$$

$$K_{B2}=\frac{Et}{1-\nu^2}\left|\begin{array}{cccccccccccc}
\frac{4}{3m}+\frac{1-\nu}{15m} \\
\nu & \frac{4}{3m}+\frac{1-\nu}{15}m \\
-\nu & -\frac{2}{m}-\frac{1-\nu}{20}m & \frac{4}{m}+\frac{3(1-\nu)}{5}m \\
\frac{2}{3}m-\frac{1-\nu}{15m} & 0 & \nu & \frac{4}{3}m+\frac{1-\nu}{15}m \\
0 & \frac{2}{3m}-\frac{1-\nu}{60}m & -\frac{2}{m}\ \frac{1-\nu}{20}m & -\nu & \frac{4}{3m}+\frac{1-\nu}{15}m \\
-2m-\frac{1-\nu}{20m} & -\nu & \frac{1+\nu}{2} & -m+\frac{1-\nu}{20m} & 0 & 4m+\frac{3}{5}\left(\frac{1-\nu}{m}\right) \\
-m-\frac{1-\nu}{20m} & 0 & -\frac{1+\nu}{2} & -2m-\frac{1-\nu}{20m} & \nu & 2m-\frac{3}{5}\frac{1-\nu}{20m} & 4m+\frac{3}{5}\frac{1-\nu}{m} \\
\frac{2}{3}m-\frac{1-\nu}{60m} & 0 & 0 & \frac{m}{3}+\frac{1-\nu}{60m} & 0 & -2m-\frac{1-\nu}{20m} & -m+\frac{1+\nu}{20m} & \frac{4m}{3}+\frac{1-\nu}{15m} \\
0 & \frac{2}{3m}-\frac{1-\nu}{15}m & -\frac{1}{m}+\frac{1-\nu}{20}m & 0 & \frac{1}{3m}+\frac{1-\nu}{60}m & \nu & 0 & -\nu & \frac{4}{3m}+\frac{1-\nu}{15}m \\
0 & -\frac{1}{m}+\frac{1-\nu}{20}m & \frac{2}{m}-\frac{3}{5}(1-\nu)m & 0 & -\frac{1}{m}+\frac{1-\nu}{60}m & -\frac{1+\nu}{2} & \frac{1+\nu}{2} & \nu & -\frac{2}{m}-\frac{1-\nu}{20}m & \frac{4}{m}+\frac{3}{5}(1-\nu)m \\
\frac{m}{3}+\frac{1-\nu}{60m} & 9 & 0 & \frac{2}{3}m-\frac{1-\nu}{60m} & 0 & -m+\frac{1-\nu}{20m} & -2m-\frac{1-\nu}{20m} & \frac{2}{3}m-\frac{1-\nu}{15m} & 0 & -\nu & \frac{4}{3}m+\frac{1-\nu}{15m} \\
0 & \frac{1}{3m}+\frac{1-\nu}{60}m & -\frac{1}{m}+\frac{1-\nu}{20}m & 0 & \frac{2}{3m}-\frac{1-\nu}{15}m & 0 & -\nu & 0 & \frac{3}{3m}-\frac{1-\nu}{60}m & -\frac{2}{m}-\frac{1-\nu}{20}m & \nu & \frac{4}{3m}+\frac{1-\nu}{15}m
\end{array}\right|$$



$m = \frac{b}{}$

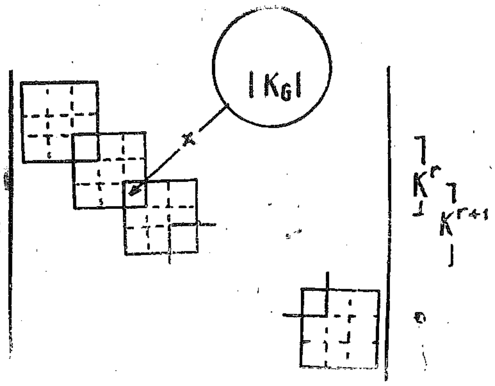
ĐỐI XỨNG

Ma trận cứng của hai phần tử tấm e_r và e_{r+1} của dải D_j:

$$K^{r,r+1} = \begin{vmatrix} K_{11}^{r} & K_{12}^{r} & K_{13}^{r} & & \\ K_{21}^{r} & K_{22}^{r} & K_{23}^{r} & & \\ K_{31}^{r} & K_{32}^{r} & K_{33}^{r}+K_{11}^{r+1} & K_{12}^{r+1} & K_{13}^{r+1} \\ & & K_{21}^{r+1} & K_{22}^{r+1} & K_{23}^{r+1} \\ & & K_{31}^{r+1} & K_{32}^{r+1} & K_{33}^{r+1} \end{vmatrix} \qquad (4.2)$$

Quan hệ giữa lực và chuyển vị của dải D_j được xây dựng tương tự: nếu giữa hai phần tử tấm e_r và e_{r+1} của dải có phần tử gờ, khi ấy ma trận cứng của phần tử gờ sẽ được cộng vào vị trí tương ứng trong (4.3).

$K_{Dj}^{1} =$



(4.3)

Cấp của ma trận K_{Dj}^{1} là $(6m + 4)$ nếu số phần tử của dải D_j là m. Thực hiện phép biến đổi B đưa ma trận K_{Dj}^{1} về K_{Dj}^{2}

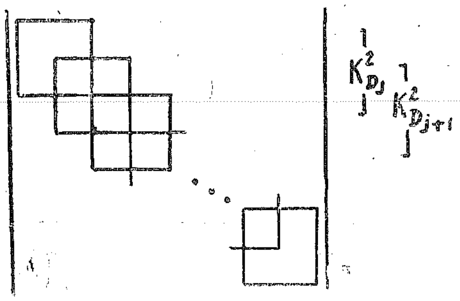
$$K_{D_j}^{2} = B^{*}\, K_{D_j}^{1}\, B \qquad (4.4)$$

B^* là chuyển vị của B.

Thực chất của phép biến đổi B nhằm sắp xếp lại các hàng và cột của ma trận K_{Dj}^{1} theo thứ tự mới từ mép trên đến mép dưới của dải để phù hợp với dải tiếp sau. (Khi lập chương trình tính trên máy tính không cần xây dựng ma trận B mà chỉ cần thực hiện việc đổi hàng, đổi cột của ma trận $K_{D_j}^{1}$).

Từ ma trận K_{Dj}^{2} xây dựng ma trận của toàn hệ thống theo (4.5).

$\bar{K} =$



(4.5)

Cuối cùng giải hệ phương trình có dạng ba đường chéo khối

$$\overrightarrow{Kr} = \overrightarrow{R}$$

K suy từ $\overline{K}$ sau khi đã thực hiện các điều kiện biên

$\vec{r}$ véctơ các chuyển vị cần xác định

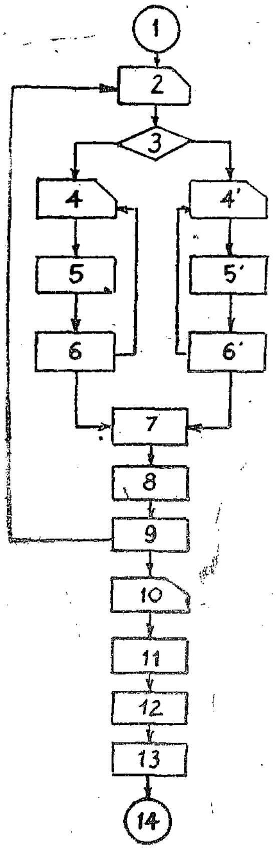
$\vec{R}$ véctơ ngoại lực

Ứng suất ở điểm bất kỳ của phần tử tấm và phần tử gờ được xác định qua các chuyển vị đã biết.

§ 5. ÁP DỤNG TÍNH TOÁN

Để có thể áp dụng trong tính toán đã lập hệ thống chương trình tính trên các máy tính điện tử ODRA 1304 và IBM 360 – 40. Trong hệ thống chương trình tính đã sử dụng các chương trình con chuyên dụng thể hiện các thuật toán trình bày ở trên: thư viện ma trận cứng các loại phần tử, chương trình mẫu sắp xếp lại các hàng và các cột của ma trận, chương trình mẫu giải ma trận ba đường chéo khối, chương trình mẫu đảo, in ma trận, tính nội lực v.v... Điều này sẽ cho khả năng sử dụng để giải bài toán kết cấu mỏng có gờ ở trạng thái chịu lực khác nữa.

Sơ đồ khối tính toán đối với kết cấu mỏng có gờ làm việc kéo:



1. Bắt đầu
2. Các số liệu mô tả kết cấu số dải, số phần tử trong dải i...
3. Kiểm tra xem kết cấu mỏng có gờ theo một hoặc hai hướng

4-4'. Các số liệu mô tả đặc trưng vật liệu, hình học của phần tử j trong dải i

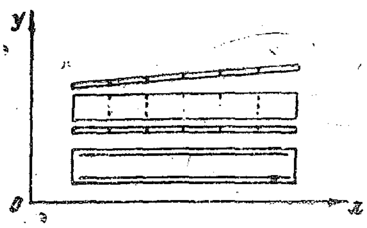
5-5'. Tính các ma trận cứng

6-6'. Xây dựng ma trận cứng của dải i

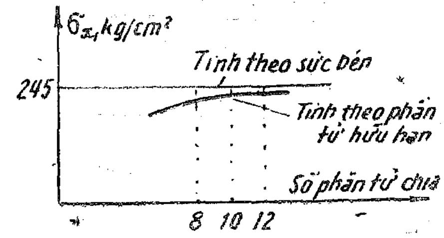
7. Đổi hàng, cột ma trận cứng của dải theo thứ tự mới
8. Thực hiện các điều kiện biên
9. Lập các khối của ma trận của hệ cơ bản
10. Các số liệu về ngoại lực
11. Giải hệ phương trình ba đường chéo khối
12. Tính nội lực
13. In các kết quả chuyển vị và nội lực.
14. Kết thúc

Hình 3

Để làm ví dụ xét một dải mỏng, hai mép được tăng cường hai gờ có tiết diện tròn (hình 4). Để tính toán theo phương pháp phần tử hữu hạn đã chia thành các phần tử tấm và phần tử gờ. Ma trận cứng của phần tử gờ lấy theo công thức (3.3), ma trận cứng của phần tử tấm lấy theo bảng 1. Các số liệu cơ bản: chiều dài của dải 600 cm, rộng 40 cm dày 1 cm, gờ tròn có đường kính 2,5 cm. Xét trường hợp kết cấu trên được ngàm hai đầu, chịu tải trọng phân bố đều theo hướng trục Y, các giá trị về ứng suất tại mép trên của tiết diện giữa khi chia kết cấu thành 8, 10, 12 phần tử bản với phần tử gờ ở mép trên và dưới lần lượt là: 205,1 kg/cm^2; 227,2 kg/cm^2; 235,9 kg/cm^2. So sánh kết quả tính theo phương pháp phần tử hữu hạn và kết quả tính theo sức bền vật liệu được đưa trên hình 5.



Hình 4



Hình 5

Cho ví dụ trên để có thể so sánh kết quả với cách tính khác, tuy nhiên phải thấy ưu điểm của thuật tính theo phương pháp PTHH là có thể tìm kết quả đối với những kết cấu phức tạp hơn ví dụ đưa ra ở trên nhiều.

§6. KẾT LUẬN

Thuật toán trình bày ở trên cho phép tính ứng suất phẳng của các dạng kết cấu mỏng có gờ thường gặp một cách thuận lợi; theo thuật toán này việc lập chương trình cho máy tính điện tử dễ dàng và tiết kiệm được nhiều ô nhớ của máy tính. Mô hình các phần tử cố gắng phản ánh sự làm việc thực của kết cấu dưới tác dụng của tải trọng trong mặt phẳng của kết cấu, các kết quả tính toán cho thấy có thể chấp nhận được.

Địa chỉ:
Viện kỹ thuật Giao thông

Nhận ngày 27-12-1980

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ZIENKIEWICZ O.C. The Finite Element Method in Engineering Science Mc Graw-Hill London 1972.

2. MAURICE LEMAIRE, ROSE – MARIE COURTADE. Calcul automatique des structures minces Annales de l'Institut technique du batiment et des travaux publics– Juin 1973.

3. GALLAGHER H., RICHARD. A Correlation study of Methods of Matrix Structural Analysis Pergamon Press 1964.

RESUMÉ

CALCUL DES PLANES CONTRAINTES DANS LA PLAQUE NERVURÉE

Ce texte décrit une méthode de calcul des Planes contraintes dans la plaque norvurée. Pour utiliser la methode des éléments finis, il faut choisir la fonction des déplacements, construire les matrices de rigidité, former le système d'équations fondamentai. Enfin, un example illustre son application.