Tạp chí CƠ HỌC 1981 số 4 (trang 6 — 11)

DAO ĐỘNG NGẪU NHIÊN TRONG HỆ CẤP BA DƯỚI KÍCH ĐỘNG NGẪU NHIÊN ỒN TRẮNG

KIỀU THẾ ĐỨC, NGUYỄN ĐÔNG ANH

TRONG những năm gần đây xuất hiện nhiều công trình nghiên cứu dao động trong các hệ cấp ba [1, 2] do có nhiều bài toán cơ học đưa đến. Trong bài báo này xét ảnh hưởng của kích động ngẫu nhiên lên các hệ nói trên.

§1. HỆ CẤP BA ÔTÔNÔM

Ta xét phương trình vi phân cấp ba [1, 2] ôtônôm chịu kích động ngẫu nhiên ồn trắng

$$\dddot{X} + \eta\ddot{X} + \Omega^2\dot{X} + \eta\Omega^2 X = \varepsilon F(X, \dot{X}, \ddot{X}) + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma G(X, \dot{X}, \ddot{X})\,\xi(t) \tag{1.1}$$

với η, Ω, σ = const. Nghiệm của (1.1) ta tìm ở dạng sau

$$\begin{aligned} X &= Ce^{-\eta t} + A\cos\psi, \\ \dot{X} &= -\eta Ce^{-\eta t} - A\Omega\sin\psi, \qquad \psi = \Omega t + \theta \\ \ddot{X} &= \eta^2 Ce^{-\eta t} - A\Omega^2\cos\psi, \end{aligned} \tag{1.2}$$

trong đó $C(t)$, $A(t)$, $\theta(t)$ là các quá trình Macốp khuyếch tán. Từ (1.1), (1.2), sử dụng công thức vi phân Itô [3] ta nhận được hệ phương trình vi phân Itô sau cho $C(t)$, $A(t)$, $\theta(t)$:

$$\begin{aligned} dC &= \varepsilon e^{\eta t}\alpha_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi)\,dt + \sqrt{\varepsilon}\,e^{\eta t}\beta_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi)\,d\xi(t) \\ dA &= \varepsilon\alpha_2(Ce^{-\eta t}, A, \psi)\,dt + \sqrt{\varepsilon}\,\beta_2(Ce^{-\eta t}, A, \psi)\,d\xi(t) \\ d\theta &= \varepsilon\alpha_3(Ce^{-\eta t}, A, \psi)\,dt + \sqrt{\varepsilon}\,\beta_3(Ce^{-\eta t}, A, \psi)\,d\xi(t) \end{aligned} \tag{1.3}$$

trong đó

$$\alpha_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi) = F_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi)\,(\Omega^2 + \eta^2)^{-1}$$

$$\alpha_2(Ce^{-\eta t}, A, \psi) = -\frac{(\Omega\cos\psi + \eta\sin\psi)}{\Omega(\Omega^2 + \eta^2)}F_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi) + {}$$
$$+ \frac{\sigma^2(\Omega\sin\psi - \eta\cos\psi)^2}{2A\Omega^2(\Omega^2 + \eta^2)^2}\,G_1^2(Ce^{-\eta t}, A, \psi)$$

$$\alpha_3(Ce^{-\eta t}, A, \psi) = \frac{\Omega\sin\psi - \eta\cos\psi}{A\Omega(\Omega^2 + \eta^2)}F_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi) + {}$$
$$+ \frac{\sigma^2(\Omega\cos\psi + \eta\sin\psi)(\Omega\sin\psi - \eta\cos\psi)}{A^2\Omega^2(\Omega^2 + \eta^2)^2}\,G_1^2(Ce^{-\eta t}, A, \psi)$$

$$\beta_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi) = \frac{\sigma G_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi)}{\Omega^2 + \eta^2}$$

$$\beta_2(Ce^{-\eta t}, A, \psi) = -\frac{\sigma G_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi)(\Omega\cos\psi + \eta\sin\psi)}{\Omega(\Omega^2 + \eta^2)}$$

$$\beta_3(Ce^{-\eta t}, A, \psi) = \frac{\sigma G_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi)(\Omega\sin\psi - \eta\cos\psi)}{A\Omega(\Omega^2 + \eta^2)}$$

$$\begin{aligned} F_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi) &= F(Ce^{-\eta t} + A\cos\psi, \; -\eta Ce^{-\eta t} - \\ &- A\Omega\sin\psi, \; \eta^2 Ce^{-\eta t} - A\Omega^2\cos\psi) \\ G_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi) &= G(Ce^{-\eta t} + A\cos\psi, \; \eta Ce^{-\eta t} - \\ & A\Omega\sin\psi, \; \eta^2 Ce^{-\eta t} - A\Omega^2\cos\psi) \end{aligned} \tag{1.4}$$

Dùng phép thế $D = Ce^{-\eta t}$ ta đưa (1.3) về dạng chuẩn

$$\begin{aligned} dD &= -\eta D dt + \varepsilon\alpha_1(D, A, \psi)\,dt + \sqrt{\varepsilon}\,\beta_1(D, A, \psi)\,d\xi(t) \\ dA &= \varepsilon\alpha_2(D, A, \psi)\,dt + \sqrt{\varepsilon}\,\beta_2(D, A, \psi)\,d\xi(t) \\ d\theta &= \varepsilon\alpha_3(D, A, \psi)\,dt + \sqrt{\varepsilon}\,\beta_3(D, A, \psi)\,d\xi(t) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Xét (1.5) ta thấy rằng A, θ là các biến chậm còn D là biến nhanh. Mặt khác do tính phụ thuộc liên tục của nghiệm phương trình vi phân Itô theo tham số [4] nên với t đủ lớn ta có thể xấp xỉ $D \approx 0$. Khi đó (1.5) có dạng

$$\begin{aligned} dA &= \varepsilon\alpha_2(0, A, \psi)dt + \sqrt{\varepsilon}\,\beta_2(0, A, \psi)d\xi(t) \\ d\theta &= \varepsilon\beta_3(0, A, \psi)dt + \sqrt{\varepsilon}\,\beta_3(0, A, \psi)d\xi(t) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Áp dụng phương pháp trung bình hóa [3] cho (1.6) ta nhận được

$$\begin{aligned} dA &= \varepsilon\overline{\alpha_2}(A)dt + \sigma_{22}(A)d\xi_1 + \sigma_{23}(A)d\xi_2 \\ d\theta &= \varepsilon\overline{\alpha_3}(A)dt + \sigma_{32}(A)d\xi_1 + \sigma_{33}(A)d\xi_2 \end{aligned} \tag{1.7}$$

trong đó

$$\overline{\alpha_i}(A) = \underset{t}{M}(\alpha_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \alpha_2(0, A, \Omega t + \theta)\,dt, \quad i = 2,3,$$

ma trận $[\sigma_{ij}(A)]$ là căn bậc hai của ma trận

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \underset{t}{M}(\beta_2^2) & \varepsilon \underset{t}{M}(\beta_2\beta_3) \\ \varepsilon \underset{t}{M}(\beta_3\beta_2) & \varepsilon \underset{t}{M}(\beta_3^2) \end{pmatrix}$$

Đối với hệ (1.7) ta lập được phương trình FPK sau

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= -\varepsilon\frac{\partial}{\partial A}(\overline{\alpha_2}(A)W) - \varepsilon\frac{\partial}{\partial\theta}(\overline{\alpha_3}(A)W) + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial A^2}(K_{22}(A)W) + \\ &\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial A}(K_{23}(A)W) + \frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(K_{33}(A)W) \end{aligned} \tag{1.8}$$

với các kí hiệu

$$K_{22}(A) = \underset{t}{M}(\beta_2^2), \quad K_{23}(A) = \underset{t}{M}(\beta_2\beta_3), \quad K_{33}(A) = \underset{t}{M}(\beta_3^2) \tag{1.9}$$

Trong nhiều trường hợp phương trình FPK (1.8) cho nghiệm dừng

$$W_d(A) = \frac{h}{K_{22}(A)} \exp\left\{-2\int^{A} \frac{\overline{\alpha_2}(A)}{K_{22}(A)} dA\right\} \tag{1.10}$$

Mật độ dừng $W_d(A)$ (1.10) có thể đạt cực trị ở tại các giá trị biên độ A^* xác định bởi phương trình

$$2\overline{\alpha_2}(A^*) = \frac{dK_{22}(A^*)}{dA^*} \tag{1.11}$$

§ 2. HỆ CẤP BA KHÔNG ÔTÔNÔM

Ta xét phương trình vi phân cấp ba không ôtônôm [1, 2] chịu kích động $\dot{\xi}(t)$ ồn trắng

$$\dddot{X} + \eta\ddot{X} + \Omega^2\dot{X} + \eta\Omega^2 X = \varepsilon F(\gamma t, X, \dot{X}, \ddot{X}) + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma G(\gamma t, X, \dot{X}, \ddot{X})\,\dot{\xi}(t) \tag{2.1}$$

trong đó F, G là các hàm tuần hoàn theo $\tau = \gamma t$ chu kỳ 2π. Xét miền cộng hưởng

$$\Omega^2 = \left(\frac{P}{q}\gamma\right)^2 + \varepsilon\Delta \tag{2.2}$$

Khi đó có thể viết (2.1) như sau

$$\dddot{X} + \eta\ddot{X} + \left(\frac{P}{q}\gamma\right)^2\dot{X} + \eta\left(\frac{P}{q}\gamma\right)^2 X = \varepsilon\widetilde{F}(\gamma t, X, \dot{X}, \ddot{X}) + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma G(\gamma t, X, \dot{X}, \ddot{X})\,\dot{\xi}(t) \tag{2.3}$$

với

$$\widetilde{F} = F - \Delta\dot{X} - \eta\Delta X \tag{2.4}$$

Nghiệm của (2.3) ta tìm ở dạng sau

$$X = Ce^{-\eta t} + A\cos\psi, \tag{2.5}$$

$$\dot{X} = -\eta Ce^{-\eta t} - \frac{P}{q}\gamma A\sin\psi, \qquad \psi = \frac{P}{q}\gamma t + \theta.$$

$$\ddot{X} = \eta^2 Ce^{-\eta t} - \left(\frac{P}{q}\gamma\right)^2 A\cos\psi,$$

Tương tự như trong mục 1 ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned}
dC &= \varepsilon e^{\eta t}\alpha_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi, \gamma t)\,dt + \sqrt{\varepsilon}\, e^{\eta t}\beta_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi, \gamma t)\,d\xi \\
dA &= \varepsilon\alpha_2(Ce^{-\eta t}, A, \psi, \gamma t)\,dt + \sqrt{\varepsilon}\,\beta_2(Ce^{-\eta t}, A, \psi, \gamma t)\,d\xi \\
d\theta &= \varepsilon\alpha_3(Ce^{-\eta t}, A, \psi, \gamma t)\,dt + \sqrt{\varepsilon}\,\beta_3(Ce^{-t\eta}, A, \psi, \gamma t)\,d\xi
\end{aligned} \tag{2.6}$$

trong đó

$$\alpha_1 = \widetilde{F}_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi, \gamma t)\left[\left(\frac{P}{q}\gamma\right)^2 + \eta^2\right]^{-1},$$

$$\alpha_2 = \frac{\sigma^2\left(\frac{P}{q}\gamma\sin\psi - \eta\cos\psi\right)^2 G_1^2}{2A\left(\frac{P}{q}\gamma\right)^2\left[\left(\frac{P}{q}\gamma\right)^2 + \eta^2\right]^2} - \frac{\left(\frac{P}{q}\gamma\cos\psi + \eta\sin\psi\right)\widetilde{F}_1}{\frac{P}{q}\gamma\left[\left(\frac{P}{q}\gamma\right)^2 + \eta^2\right]},$$

$$\alpha_3 = \frac{\left(\frac{P}{q}\gamma\sin\psi - \eta\cos\psi\right)\widetilde{F_1}}{A\left(\frac{P}{q}\gamma\right)\left[\left(\frac{P}{q}\gamma\right)^2 + \eta^2\right]} + \frac{\sigma^2\left(\frac{P}{q}\gamma\cos\psi + \eta\sin\psi\right)\left(\frac{P}{q}\gamma\sin\psi - \eta\cos\psi\right)G_1^2}{A\left(\frac{P}{q}\gamma\right)^2\left[\left(\frac{P}{q}\gamma\right)^2 + \eta^2\right]^2},$$

$$\beta_1 = \sigma G_1(Ce^{-\eta t}, A, \psi, \gamma t)\left[\left(\frac{P}{q}\gamma\right)^2 - \eta^2\right]^{-1}$$

$$\beta_2 = -\sigma\left(\frac{P}{q}\gamma\cos\psi + \eta\sin\psi\right)G_1\left[\frac{P}{q}\gamma\left(\left(\frac{P}{q}\gamma\right)^2 + \eta^2\right)\right]^{-1}$$

$$\beta_3 = \sigma\left(\frac{P}{q}\gamma\sin\psi - \eta\cos\psi\right)G_1\left[A\frac{P}{q}\gamma\left(\left(\frac{P}{q}\gamma\right)^2 + \eta^2\right)\right]^{-1}$$

các kí hiệu $\widetilde{F_1}$, G_1 được dùng tương tự như ở mục 1.

Giống như ở mục 1 từ hệ (2.6) ta xét hệ con sau

$$\begin{aligned} dA &= \varepsilon\alpha_2(0, A, \psi, \gamma t)\,dt + \sqrt{\varepsilon}\,\beta_2(0, A, \psi, \gamma t)\,d\xi(t) \\ d\theta &= \varepsilon\alpha_3(0, A, \psi, \gamma t)\,dt + \sqrt{\varepsilon}\,\beta_3(0, A, \psi, \gamma t)\,d\xi(t) \end{aligned} \tag{2.7}$$

Áp dụng phương pháp trung bình hóa [3] ta có

$$\begin{aligned} dA &= \varepsilon\overline{\alpha_2}(A, \theta)\,dt + \sigma_{22}(A, \theta)\,d\xi_1 + \sigma_{23}(A, \theta)\,d\xi_2 \\ d\theta &= \varepsilon\overline{\alpha_3}(A, \theta)\,dt + \sigma_{32}(A, \theta)\,d\xi_1 + \sigma_{33}(A, \theta)\,d\xi_2 \end{aligned}$$

trong đó

$$\overline{\alpha}_2(A, \theta) = \underset{t}{M}\left[\alpha_2\left(0, A, \frac{p}{q}\gamma t + \theta, \gamma t\right)\right]$$

$$\overline{\alpha}_3(A, \theta) = \underset{t}{M}\left[\alpha_3\left(0, A, \frac{p}{q}\gamma t + \theta, \gamma t\right)\right]$$

$[\sigma_{ij}]$ là căn bậc hai của ma trận

$$\varepsilon\begin{pmatrix} K_{22}(A, \theta) & K_{23}(A, \theta) \\ K_{32}(A, \theta) & K_{33}(A, \theta) \end{pmatrix}$$

Phương trình FPK cho hệ (2.8) sẽ là

$$-\frac{\partial}{\partial A}\left(\overline{\alpha}_2(A, \theta)W\right) - \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\overline{\alpha}_3(A, \theta)W\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial A^2}(K_{22}(A, \theta)W) + \frac{\partial^2}{\partial A\partial\theta}(K_{23}(A, \theta)W) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(K_{33}(A, \theta)W) = 0 \tag{2.9}$$

Phương trình (2.9) nói chung vẫn khó giải. Để khảo sát chúng có thể sử dụng một vài phương pháp đề nghị trong [5]. Ta chú ý các hệ số của phương trình (2.9) trong nhiều trường hợp là các đa thức với số mũ nguyên của biên độ A do đó nghiệm có thể tìm dưới dạng

$$\ln W = \mu\ln A + \sum_{i=0}^{\infty}\Phi_i(\theta)A^i$$

§ 3. VÍ DỤ

Xét dao động ngẫu nhiên của hệ Cấp ba Van der Pol với ảnh hưởng của ma sát Culon

$$\dddot{X} + \eta\ddot{X} + \Omega^2\dot{X} + \eta\Omega^2X = \varepsilon(1 - X^2)\dot{X} - \varepsilon h_0\,\mathrm{Sign}\dot{X} + \sqrt{\varepsilon}\,\sigma\dot{\xi}(t) \tag{3.1}$$

Sau khi tính toán có

$$\overline{\alpha_2}(A) = \frac{\sigma^2}{4A\Omega^2(\Omega^2+\eta^2)} - \frac{\eta}{\Omega^2+\eta^2}\left[\frac{A}{2}\left(\frac{A^2}{4}-1\right)+\frac{2h_o}{\pi\Omega}\right]$$

$$K_{22}(A) = \frac{\sigma^2}{2\Omega^2(\Omega^2+\eta^2)} \tag{3.2}$$

Thay (3.2) vào (1.10) ta nhận được

$$W_d(A) = h\,A\exp\left\{\frac{\eta\Omega^2}{\sigma^2}\left(A^2-\frac{A^4}{8}-\frac{8h_oA}{\pi\Omega}\right)\right\} \tag{3.3}$$

Hàm (3.3) sẽ đạt cực trị tại giá trị A^*

$$\frac{\sigma^2}{4\Omega^2} = \eta\left[\frac{A^{*2}}{2}\left(\frac{A^{*2}}{4}-1\right)+\frac{2h_oA^*}{\pi\Omega}\right] \tag{3.4}$$

Trong trường hợp không có ma sát Culon

$$h_o = 0 \tag{3.5}$$

thì từ (3.4) ta có

$$A_o^* = \sqrt{2+2\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{2\Omega^2\eta}}} \tag{3.6}$$

Trong trường hợp tiền định $\sigma = 0$ ta có

$$A_o^* = 2 \tag{3.7}$$

Kết quả này đã nhận được trong [1, 2]. Nếu có kích động ngẫu nhiên $\sigma \neq 0$ thì

$$A_o^* > 2 \tag{3.8}$$

Xét trường hợp có ma sát Culon $h_o \neq 0$. Gọi nghiệm của phương trình (3.4) khi $h_o \neq 0$ là $A^*_{h_o}$. Khi đó ta có

$$A_o^* - A^*_{h_o} = \frac{4h_oA_o^*}{\left(A_o^*+A^*_{h_o}\right)\left[\frac{1}{4}\left(A^{*2}_{h_o}+A^{*2}_o\right)-1\right]} \tag{3.9}$$

Mặt khác từ (3.8) suy ra vế phải của (3.9) sẽ dương. Do đó

$$A_o^* > A^*_{h_o}$$

Như vậy ma sát Culon trong trường hợp ngẫu nhiên cũng làm giảm giá trị của biên độ dao động dừng.

§4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này các tác giả đã sử dụng các phương pháp quen biết của lý thuyết dao động phi tuyến và phương trình vi phân ngẫu nhiên để nghiên cứu dao động ngẫu nhiên trong hệ ôtônôm và không ôtônôm cấp ba dưới kích động «ồn trắng». Các kết quả thu được trong trường hợp không có kích động ngẫu nhiên đều trùng hợp với kết quả trong [1, 2].

Địa chỉ:
Trường Đại học Giao thông sắt bộ
Viện Cơ học.

Nhận ngày 8-4-1980

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. NGUYỄN VĂN ĐẠO. Non — linear Oscillations of high order systems. Hanoi 1979.

2. NGUYỄN VĂN ĐẠO. Non — linear Oscillations of third order Systems, proceedings of VIII international conference on n. Osc., Prague 1979.

3. МИТРОПОЛЬСКИЙ Ю. А., КОЛОМИЕЦ В. Г. Применение асимптотических методов в стохастических системах, сб. Приближённые методы исследования нелинейных систем, 1976.

4. ГИХМАН И. И. Дифференциальные уравнения со случайными функиями. Киев, 1964.

5. NGUYỄN ĐÔNG ANH. Khảo sát dao động ngẫu nhiên bằng phương pháp phương trình Fokker — Plank — Kolmogorov. Tuyển tập các công trình nghiên cứu cơ học. Hà nội 1978.

РЕЗЮМЕ

СЛУЧАЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМАХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ТИПА БЕЛОГО ШУМА

В данной работе при помощи теории стохастических дифференциальных уравнений Ито и асимптотических методов нелинейной механики исследуются случайные колебания в системах третьего порядка под действием случайных возмущений типа белого шума. Приведен пример уравнения Ван дер Поля третьего порядка под действием силы Кулона трения и случайных возмущений. Полученное значение амплитуды стационарного случайного колебания в детерминированном случае совпадается с значением, полученным в [1, 2]. Показано что сила Кулона трения уменьшает значение амплитуды также при случае действия случайных возмущений. В работе рассмотрено также случайное колебание в неавтономных системах.