Tạp chí CƠ HỌC 1981 số 3 (trang 17 – 25)

DAO ĐỘNG DỪNG CỦA CÁC HỆ ĐÀN NHỚT DƯỚI KÍCH ĐỘNG NGẪU NHIÊN

NGUYỄN TIẾN KHIÊM

TRONG lý thuyết dao động ngẫu nhiên, bài toán nghiên cứu ảnh hưởng của các yếu tố ngẫu nhiên lên quá trình dao động của các hệ cơ học được mô tả bằng phương trình vi tích phân còn chưa được quan tâm nhiều. So với phương trình vi phân, ngoài những tính chất tương tự, phương trình vi tích phân còn có những tính chất đặc biệt. Vì vậy để có thể áp dụng các phương pháp quen thuộc đối với phương trình vi phân cho phương trình vi tích phân cần phải có những nghiên cứu cụ thể. Bài báo này nhằm mục đích ứng dụng phương pháp giả định chuẩn để nghiên cứu dao động dừng của các hệ đàn nhớt phi tuyến. Trước khi đi vào công việc chính là thiết lập các quan hệ để xác định các đặc trưng xác suất cần thiết, chúng ta đưa ra những công thức phổ đối với phương trình vi tích phân tuyến tính.

§1. DAO ĐỘNG DỪNG CỦA CÁC HỆ TUYẾN TÍNH

Xét phương trình:

$$\ddot{X} + 2h\dot{X} + \omega_0^2 X = \lambda_1 \int_0^t K_1(t-s)\,X(s)\,ds + \lambda_2 \int_0^t K_2(t-s)\,\dot{X}(s)ds + \xi(t), \tag{1.1}$$

trong đó $\xi(t)$ là quá trình ngẫu nhiên dừng, chuẩn có kỳ vọng bằng không.

Dễ dàng chứng minh được điều sau đây: Đối với hệ (1.1) quá trình ra cũng àl chuẩn và trong trường hợp hệ suy biến ổn định tiệm cận đều, tồn tại dao động dừng.

Việc chứng minh X(t) là chuẩn không có gì khó khăn. Người ta đã chứng minh được điều tổng quát hơn: Tác dụng của một toán tử tuyến tính lên quá trình chuẩn cho ta quá trình chuẩn. Để chứng minh tồn tại quá trình dừng ta sử dụng kết quả trong [2]. Theo kết quả này nghiệm của (1.1) có dạng:

$$X(t) = N(t) + \int_0^t \bigcup(t-s)\,\xi(s)\,ds \tag{1.2}$$

trong đó N(t) và $\bigcup(t)$ là các hàm tiền định tìm được từ các phương trình vi tích phân. Nếu hệ suy biến (khi $\xi = 0$) ổn định tiệm cận đều [3] $N(t) \to 0$ khi $t \to \infty$ do đó:

$$X(t) = \int_0^\infty \bigcup(\sigma)\,\xi(t-\sigma)\,d\sigma \tag{1.3}$$

ıghiệm dừng của hệ (1,1). Ở đây cần lưu ý rằng quá trình dừng là quá trình có các trưng xác suất được xét ở thời điểm rất lớn (tức $t \to \infty$). Trong (1.3) nếu biết U(t) các đặc trưng xác suất sẽ dễ dàng tìm được. Tuy nhiên cũng có thể thiết lập các công c phổ, tương tự như đối với phương trình vi phân.

Thật vậy, nhân hai vế (1.1) với $X(t_1)$ lấy kỳ vọng, chú ý trong phương trình nhận ıc phải cho t hiền $\to \infty$, ta được:

$$\ddot{R}_x(\tau) + 2h\dot{R}_x(\tau) + \omega_o^2 R_x(\tau) = \lambda_1 \int_{-\infty}^{\tau} K_1(\tau-\sigma)R_x(\sigma)d\sigma +$$

$$+ \lambda_2 \int_{-\infty}^{\tau} K_2(\tau-\sigma)\dot{R}_x(\sigma)d\sigma + R_{\xi x}(\tau) \tag{1.4}$$

Tương tự, nhân hai vế (1.1) với $\xi(t_1)$ lấy kỳ vọng:

$$\ddot{R}_{x\xi}(\tau) + 2h\dot{R}_{x\xi}(\tau) + \omega_o^2 R_{x\xi}(\tau) =$$

$$= \lambda_1 \int_{-\infty}^{\tau} K_1(\tau-\sigma)R_{x\xi}(\sigma)d\sigma + \lambda_2 \int_{-o}^{\tau} K_2(\tau-\sigma)\dot{R}_{x\xi}(\sigma)d\sigma + R_{\xi}(\tau) \tag{1.5}$$

Xét các hàm sau

$$\mathcal{K}_i(t) = \begin{cases} K_i(t) & \text{với } t \geqslant o \\ o & \text{với } t < o \end{cases} \tag{1.6}$$

Biến đổi Fouriê hai vế (1.4) và (1.5) ta được:

$$S_x(\omega) = (B(i\omega))^{-1} S_{x\xi}(-\omega) \tag{1.7}$$

$$S_{x\xi}(\omega) = (B(i\omega))^{-1} S_{\xi}(\omega) \tag{1.8}$$

ıg đó: $B(i\omega) = -\omega^2 + 2hi\omega + \omega_o^2 - \lambda_1 \overline{\mathcal{K}_1}(i\omega) - i\omega\lambda_2\overline{\mathcal{K}_2}(i\omega)$ (1.9)

$\overline{\mathcal{K}_i}(i\omega)$ là biến đổi Fouriê của $\mathcal{K}_i(t)$, $i = 1,2$,

ıy (1.8) vào (1 7) ta có:

$$S_x(\omega) = |B(i\omega)|^{-2} S_{\xi}(\omega) \tag{1.10}$$

g thức (1,10) hoàn toàn tương tự công thức xác định mật độ phổ đối với phương trình phân. Khác biệt duy nhất ở đây là trong biểu thức hàm truyền $B(i\omega)$ có chứa các biến Fouriê của các hàm $\mathcal{K}_i$. Nếu $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ta nhận được chính công thức mật độ phổ phương trình vi phân.

Từ (1.10) có thể tìm được hàm tương quan:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \frac{S_{\xi}(\omega)}{|B(i\omega)|^2} d\omega \tag{1.11}$$

phương sai:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |B(i\omega)|^{-2} S_{\xi}(\omega)\, d\omega \tag{1.12}$$

§ 2. PHƯƠNG PHÁP GIẢ ĐỊNH CHUẨN ĐỐI VỚI PHƯƠNG TRÌNH VI TÍCH PHÂN PHI TUYẾN

Trong mục này chúng ta sẽ nghiên cứu dao động dừng của hệ:

$$\ddot{X}_1 + 2h\,\dot{X}_1 + \omega_0^2 X_1 = \varepsilon f(X_1, \dot{X}_1) + \varepsilon \int_0^t K(t-S)\,\varphi(X_1(S), \dot{X}_1(S))\,dS + \xi(t) \tag{2.1}$$

$\xi(t)$ là quá trình ngẫu nhiên dừng chuẩn có kỳ vọng bằng không. Đặt $X(t) = X_1(t) - m$, m là kỳ vọng của X_1 vì ta chỉ xét nghiệm dừng nên $m = \text{const}$. Khi đó (2.1) có dạng:

$$\ddot{X} + 2h\dot{X} + \omega_0^2 X + \omega_0^2 m = \varepsilon f(X+m, \dot{X}) + \varepsilon \int_0^t K(t-S)\,\varphi(X(S)+m, \dot{X}(S))\,dS + \xi(t) \tag{2.2}$$

Lấy kỳ vọng hai vế, cho $t \to \infty$ ta được

$$\omega_0^2 m = \varepsilon \langle f(X+m, \dot{X})\rangle + \varepsilon \int_0^\infty K(\sigma) \langle \varphi(X(t-\sigma)+m, \dot{X}(t-\sigma))\rangle\, d\sigma \tag{2.3}$$

Giả thiết $X(t)$, $\dot{X}(t)$, $\xi(t)$ là chuẩn đồng thời, khi đó dễ dàng tính được:

$$\begin{aligned} &\langle f(X+m, \dot{X})\rangle = P(\sigma_x^2, \sigma_{\dot{x}}^2, m) \\ &\langle \varphi(X+m, \dot{X})\rangle = Q(\sigma_x, \sigma_{\dot{x}}^2, m) \end{aligned} \tag{2.4}$$

Vì vậy (2.3) là phương trình để xác định m có dạng:

$$\omega_0^2 m = \varepsilon (P\sigma_x^2, \sigma_{\dot{x}}^2, m) + \varepsilon k_\infty Q(\sigma_x^2, \sigma_{\dot{x}}^2, m),\quad k_\infty = \int_0^\infty K(\sigma)\,d\sigma \tag{2.5}$$

Bây giờ ta chuyển sang việc thiết lập phương trình của $R_x(\tau)$

Nhân hai vế (2.2) với $X(t_1)$, lấy kỳ vọng;

$$\ddot{R}_x(\tau) + 2h\dot{R}_x(\tau) + \omega_0^2 R_x(\tau) = \varepsilon \langle f(X+m, \dot{X})X(t_1)\rangle + R_{x\xi}(-\tau) + \varepsilon \int_0^t K(\sigma) \langle \varphi(X(t-\sigma)+m, \dot{X}(t-\sigma))X(t_1)\rangle\, d\sigma \tag{2.6}$$

Theo giả thiết $(X, \dot{X}, \xi)$ là chuẩn ta có thể tính được:

$$\langle f(X+m, \dot{X})X(t_1)\rangle = \alpha_1 R_x(\tau) + \alpha_2 \dot{R}_x(\tau) \tag{2.7}$$

với

$$\alpha_1 = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} \int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} f(x+m, \dot{x}) \frac{x}{\sigma_x^2}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{\dot{x}^2}{\sigma_{\dot{x}}^2}\right)} dx\, d\dot{x}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}} \int\!\!\int_{-\infty}^{\infty} f(x+m, \dot{x}) \frac{\dot{x}}{\sigma_{\dot{x}}^2}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{\dot{x}^2}{\sigma_{\dot{x}}^2}\right)} dx\, d\dot{x} \tag{2.8}$$

và tương tự:

$$< \varphi(X(t-\sigma)+m,\ \dot{X}(t-\sigma))\,X(t_1) > = \beta_1 R_x(t-\sigma) + \beta_2 \dot{R}_x(t-\sigma) \tag{2.9}$$

với

$$\beta_1 = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}}\int\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+m,\ \dot{x})\,\frac{x}{\sigma_x^2}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{\dot{x}^2}{\sigma_{\dot{x}}^2}\right)}\, dx\, d\dot{x}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_{\dot{x}}}\int\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x+m,\ \dot{x})\,\frac{\dot{x}}{\sigma_{\dot{x}}^2}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{\dot{x}}{\sigma_{\dot{x}}^2}\right)}\, dx\, d\dot{x} \tag{2.0}$$

Thay (2.7) và (2.9) vào (2.6), đổi biến dưới dấu tích phân, cho $t \to \infty$ ta được phương trình:

$$\ddot{R}_x(\tau) + (2h - \varepsilon\alpha_2)\,\dot{R}_x(\tau) + (\omega_0^2 - \varepsilon\alpha_1)\,R_x(\tau) =$$

$$\varepsilon\beta_1 \int_{-\infty}^{\tau} K(\tau-\sigma)\,R_x(\sigma)\,d\sigma + \varepsilon\beta_2 \int_{-\infty}^{\tau} K(\tau-\sigma)\,\dot{R}_x(\sigma)\,d\sigma + R_{x\xi}(-\tau) \tag{2.11}$$

Tương tự, nhân hai vế (2.2) với $\xi(t_1)$ lấy kỳ vọng, tính các tích phân theo giả thiết cuối cùng ta cũng sẽ thu được phương trình:

$$\ddot{R}_{x\xi}(\tau) + (2h - \varepsilon\alpha_2)\,\dot{R}_{x\xi}(\tau) + (\omega_0^2 - \varepsilon\alpha_1)\,R_{x\xi}(\tau) =$$

$$\varepsilon\beta_1 \int_{-\infty}^{\tau} K(\tau-\sigma)\,R_{x\xi}(\sigma)\,d\sigma + \varepsilon\beta_2 \int_{-\infty}^{\tau} K(\tau-\sigma)\,\dot{R}_{x\xi}(\sigma)\,d\sigma + R_\xi(\tau). \tag{2.12}$$

Đưa vào xét các hàm (1.6), biến đổi Fourie hai vế (2.11) và (2.12) ta có:

$$S_x(\omega) = (B(i\omega))^{-1}\, S_{x\xi}(-\omega) \tag{2.13}$$

$$S_{x\xi}(\omega) = (B(i\omega))^{-1}\, S_\xi(\omega) \tag{2.14}$$

Thay (2.14) vào (2.13) ta nhận được:

$$S_x(\omega) = |B(i\omega)|^{-2}\, S_\xi(\omega) \tag{2.15}$$

trong đó $B(i\omega) = -\omega^2 + (2h - \varepsilon\alpha_2)\, i\omega + (\omega_0 - \varepsilon\alpha_1) - \varepsilon\beta_1 \mathcal{K}(i\omega) - \varepsilon\beta_2\, i\omega\, \mathcal{K}(i\omega)$. Từ (2.15) dễ dàng thu được các công thức:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}\,|B(i\omega)|^{-2}\, S_\xi(\omega)\, d\omega, \tag{2.16}$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |B(i\omega)|^{-2}\, S_\xi(\omega)\, d\omega$$

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2\,|B(i\omega)|^{-2}\, S_\xi(\omega)\, d\omega$$

Hai đẳng thức cuối trong (2.16) cùng với (2.5) cho ta hệ phương trình đại số khép kín để xác định m, σ_x^2, $\sigma_{\dot{x}}^2$. Muốn tìm hàm tương quan ta phải tính tiếp tích phân đầu trong (2.16).

§3. MỘT PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU PHƯƠNG TRÌNH VI TÍCH PHÂN DẠNG ĐẶC BIỆT

Như ở mục 2 ta đã biết, nếu dùng phương pháp phổ để tìm các đặc trưng xác suất của quá trình nghiệm bắt buộc chúng ta phải tính các tích phân (2.16). Khó khăn nhất là tìm hàm tương quan. Hơn nữa dùng phương pháp này đòi hỏi chúng ta phải biết biến đổi Fourièr của nhân K(t). Để tránh những khó khăn trên, ở đây chúng ta sẽ đưa ra sơ đồ ứng dụng phương pháp trung bình hóa để giải trực tiếp các phương trình (2.11) và (2.12) tìm hàm tương quan. Bằng phương pháp này chúng ta tránh được việc tính các tích phân (2.16) và chỉ cần biết các biến đổi côsin và sin của nhân K, chúng là các hằng số.

Dễ dàng nhận thấy các phương trình (2-11) và (2.12) có thể đưa về dạng:

$$\dot{V}(\tau) = AV(\tau) + \varepsilon\int_{-\infty}^{\tau} \Gamma(\tau - s) V(s)\, ds + F(t) \tag{3.1}$$

trong đó: $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 + \varepsilon\alpha_1 & \varepsilon\alpha_2 - 2h \end{pmatrix}; \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_1 K & \beta_2 k \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

và đối với phương trình (2.11):

$$V = V_1 = \begin{pmatrix} R_x \\ \dot{R}_x \end{pmatrix}, \quad F_1 = F = \begin{pmatrix} 0 \\ R_{x\xi}(-\tau) \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

đối với (2,12) thì: $$V = V_2 = \begin{pmatrix} R_{x\xi} \\ \dot{R}_{x\xi} \end{pmatrix}; \quad F = F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ R_\xi \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Vì các hàm R_x, $\dot{R}_x$, $R_{x\xi}$, $\dot{R}_{x\xi}$ có tính chất:

$$R_x(\tau),\ \dot{R}_x(\tau),\ R_{x\xi}(\tau),\ \dot{R}_{x\xi}(\tau) \to 0 \text{ khi } \tau \to -\infty$$

nên có thể đặt: $$V = \int_{-\infty}^{\tau} U(\tau - s)\, F(s) ds \tag{3.5}$$

Thay (3.5) vào (3.1) ta được phương trình để xác định $U(\tau)$

$$\dot{U}(\tau) = A\, U(\tau) + \varepsilon \int_{0}^{\tau} \Gamma(\tau - s)\, U(s) ds; \quad U(o) = I \tag{3.6}$$

Như vậy nếu biết nghiệm của (3.6) thì nghiệm của (3.1) sẽ có dạng (3.5). Bài toán trở nên đơn giản hơn là giải phương trình vi tích phân dạng quen thuộc (3.6) Sử dụng phương pháp trung bình hóa, phương trình (3.6) được thay bằng phương trình vi phân tuyến tính:

$$\dot{U}(\tau) = (A + \varepsilon\overline{\Gamma})\, U(\tau); \quad U(o) = I \tag{3.7}$$

trong đó: $$\overline{\Gamma} = \int_0^{\infty} \Gamma(\sigma)\, H(-\sigma) d\sigma,$$ H(t) là ma trận cơ bản của A

Đây là phương trình vi phân tuyến tính với hệ số hằng, có thể giải rất dễ dàng. Giả sử $U(\tau)$ đã tìm được, khi đó nghiệm của (2-11) và (2.12) sẽ là:

$$V_1(\tau) = \int_0^{\infty} U(\sigma)\, F_1(\tau - \sigma)\, d\sigma$$

$$V_2(\tau) = \int_0^{\infty} U(\sigma)\, F_2(\tau - \sigma)\, d\sigma \tag{3.8}$$

Chú ý của các biểu thức của V_2 và F_1 ta thấy :

$$F_1(\tau) = T\, V_2(-\tau)\, ; \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

do đó nghiệm của (2.11) có thể viết thành :

$$V_1 = \int_0^\infty U(\sigma)\, d\sigma \int^\infty T\, U(s)\, F_2(\sigma - s - \tau) ds \tag{3.10}$$

Nếu viết U dưới dạng

$$U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

ta sẽ có :

$$R_x(\tau) = \int\int_0^\infty u_2(\sigma_1)\, u_2(\sigma_2)\, R_\xi(\sigma_1 - \sigma_2 - \tau)\, d\sigma_1 d\sigma_2$$

$$\dot{R}_x(\tau) = \int\int_0^\infty u_4(\sigma_1)\, u_2(\sigma_2)\, R_\xi(\sigma_1 - \sigma_2 - \tau)\, d\sigma_1 d\sigma_2 \tag{3.12}$$

Vì U thỏa mãn (3. 6) nên u_2 và u_4 thỏa mãn :

$$\dot{u}_2 = u_4, \quad u_4(0) = 1, \quad u_2(0) = 0 \tag{3.13}$$

$$\ddot{u}_2 + (2h - \varepsilon\alpha_2)\dot{u}_2 + (\omega_0^2 - \varepsilon\alpha_1)u_2 = \varepsilon\beta_1 \int_0^t K(t-s)\, u_2(s)\, ds + \varepsilon\beta_2 \int_0^t K(t-s)\, \dot{u}_2(s) ds \quad (3.13)$$

Và lúc này (3.12) có thể viết lại :

$$\dot{R}_x(\tau) = \int\int_0^\infty \dot{u}_2(\sigma_1)\, u_2(\sigma_2)\, R_\xi(\sigma_1 - \sigma_2 - \tau) d\sigma_1 d\sigma_2$$

$$R_x(\tau) = \int\int_0^\infty u_2(\sigma_1) u_2(\sigma_2)\, R_\xi(\sigma_1 - \sigma_2 - \tau) d\sigma_1 d\sigma_2 \tag{3.14}$$

Tóm lại hàm tương quan phải tìm có dạng (3.14) trong đó $u_2(t)$ xác định từ (3.13).

Trong đó (3.14) đặt $\tau = 0$ ta được hai quan hệ để xác định các phương sai :

$$\sigma_x^2 = \int\int_0^\infty u_2(\sigma_1)\, u_2(\sigma_2)\, R_\xi(\sigma_1 - \sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2$$

$$0 = \int\int_0^\infty \dot{u}_2(\sigma_1)\, u_2(\sigma_2)\, R_\xi(\sigma_1 - \sigma_2)\, d\sigma_1\, d\sigma_2 \tag{3.15}$$

Như vậy cùng với (2.5) cho ta hệ phương trình đại số kín để xác định m, σ_x^2, $\sigma_{\dot{x}}^2$

§ 4. VÍ DỤ

Xét dao động ngang của một thanh đàn nhớt chịu tải trọng dọc kkông đổi dưới kích động ngẫu nhiên. Trường hợp tiền định được nghiên cứu trong [4]. Không có gì thay đổi, trong trường hợp kích động ngẫu nhiên cũng có thể nhận được phương trình :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = -\varepsilon r X^3 + \varepsilon \int_0^t K(t-s)\,[\alpha X(s) + \beta X^3(s)]\,ds + \xi(t) \tag{4.1}$$

Giả sử $\xi(t)$ là quá trình ngẫu nhiên dừng và chuẩn có kỳ vọng bằng không.

Trong trường hợp này:

$$f(X, \dot{X}) = -\nu X^3; \quad \varphi(X, \dot{X}) = \alpha X + \beta X^3 \tag{4.2}$$

nên dễ dàng tính được:

$$P(\sigma_x^2, \sigma_{\dot{x}}^2, m) = \langle f(X+m, \dot{X}) \rangle = -\nu m\,(3\sigma_x^2 + m^2)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sigma_x^2} \langle f(X+m, \dot{X})\, X \rangle = -3\nu\,(\sigma_x^2 + m^2) \tag{4.3}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sigma_{\dot{x}}^2} \langle f(X+m, \dot{X})\, \dot{X} \rangle = 0$$

và

$$Q(\sigma_x^2, \sigma_{\dot{x}}^2, m) = \langle \varphi(X+m, \dot{X}) \rangle = m\,[\alpha + \beta(3\sigma_x^2 + m^2)] \tag{4.4}$$

$$\beta_1 = \frac{1}{\sigma_x^2} \langle \varphi(X+m, \dot{X})\, X \rangle = \alpha + 3\beta\,(\sigma_x^2 + m^2)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\sigma_{\dot{x}}^2} \langle \varphi(X+m, \dot{X})\, \dot{X} \rangle = 0$$

Phương trình để xác định m là:

$$\omega_0^2 m = \varepsilon k_\infty m[\alpha + \beta(3\sigma_x^2 + m^2)] - \varepsilon\nu m(3\sigma_x^2 + m^2) \tag{4.5}$$

Dễ dàng nhận thấy rằng phương trình (4.5) cho nghiệm $m = 0$ vì vậy các biểu thức (4.3) và (4.4) trở thành:

$$P = Q = 0; \quad \alpha_2 = \beta_2 = 0; \quad \alpha_1 = -3\nu\sigma_x^2; \quad \beta_1 = \alpha + 3\beta\sigma_x^2 \tag{4.6}$$

các hệ số này chỉ chứa σ_x^2

Phương trình để xác định u_2 có dạng:

$$\ddot{u}_2 + P^2 u_2 = \varepsilon\beta_1 \int_0^t K(t-S)\,u_2(S)\,dS; \quad u_2(0) = 0; \quad \dot{u}_2(0) = 1. \tag{4.7}$$

với

$$P^2 = \omega_0^2 + 3\varepsilon\nu\sigma_x^2; \qquad \beta_1 = \alpha + 3\beta\sigma_x^2$$

Bằng phương pháp trung bình hóa nghiệm của (4.7) sẽ là:

$$u_2(t) = \frac{1}{P - \dfrac{\varepsilon\beta_1 R_c}{2P}}\, e^{-\frac{\varepsilon\beta_1 R_s t}{2P}} \sin\left(P - \frac{\varepsilon\beta_1 R_c}{2P}\right)t \tag{4.8}$$

trong đó:

$$R_s = \int_0^\infty K(\sigma)\sin P\sigma\, d\sigma; \quad R_c = \int_0^\infty K(\sigma)\cos P\sigma\, d\sigma$$

nếu coi $\cos\varepsilon\varphi \sim 1$; $\sin\varepsilon\varphi \sim 0$ khi ε rất nhỏ thì R_s, R_c có thể xấp xỉ bằng:

$$R_s = \int_0^\infty K(\sigma)\sin\omega_0\sigma\, d\sigma; \quad R_c = \int_0^\infty K(\sigma)\cos\omega_0\sigma\, d\sigma \tag{4.9}$$

Đặt $\gamma = P - \frac{\varepsilon\beta_1 R_c}{2P}$; $\lambda = \frac{\varepsilon\beta_1 R_c}{2P}$ và viết lại (4.8) ở dạng đơn giản.

$$u_2(t) = \frac{1}{\gamma} e^{-\lambda t} \sin\gamma t \tag{4.10}$$

Thay (4.10) vào (3.14) ta được biểu thức hàm tương quan :

$$R_x(\tau) = \frac{1}{\gamma^2} \int\int_0^{\infty} R_\xi(\sigma_1 - \sigma_2 - \tau) e^{-\lambda(\sigma_1+\sigma_2)} \sin\gamma\sigma_1 \sin\gamma\sigma_2 d\sigma_1 d\sigma_2 \tag{4.11}$$

và phương sai :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{\gamma^2} \int\int_0^{\infty} R_\xi(\sigma_1 - \sigma_2) e^{-\lambda(\sigma_1+\sigma_2)} \sin\gamma\sigma_1 \sin\gamma\sigma_2 d\sigma_1 d\sigma_2 \tag{4.12}$$

Nếu $\xi(4)$ là ồn trắng với cường độ S tức $R_\xi(\tau) = S\delta(\tau)$ khi đó tích phân (4.11) có thể tính được :

$$R_x(\tau) = \frac{S}{4\lambda\gamma(\gamma^2+\lambda^2)} e^{-\lambda\tau} [\gamma\cos\gamma\tau + \lambda\sin\gamma\tau] \tag{1.13}$$

cho $\tau = 0$ ta có :

$$\sigma_x^2 = \frac{S}{4\lambda(\lambda^2+\gamma^2)} \tag{4.14}$$

Thay các biểu thức của P, β_1, λ, γ vào (4.14) giải nó (một cách gần đúng) ta được phương sai cần tìm là :

$$\sigma_x^2 \approx \frac{1}{6\beta}\left(\sqrt{\alpha^2 + \frac{12\beta S}{2\varepsilon\omega_0^3 R_s}} - \alpha\right) \tag{4.15}$$

Chú ý rằng nếu trong (4.14) cho $\gamma = \beta = 0$ tức phương trình (4.1) là tuyến tính ta nhận được kết quả trong [2].

§5. MỘT VÀI NHẬN XÉT

Thay cho kết luận ở đây chúng ta đưa ra những nhận xét sau :

1) Đối với phương trình vi tích phân tuyến tính việc ứng dụng phương pháp phổ hoàn toàn tương tự như đối với phương trình vi phân.

2) Khác với phương trình vi phân, phương pháp giả định chuẩn đối với phương trình vi tích phân đòi hỏi :

a) Quan niệm mới về nghiệm dừng của phương trình vi phân hay vi tích phân ngẫu nhiên.

b) Giải những phương trình vi tích phân có dạng đặc biệt. Những phương trình và các kết quả thu được trong trường hợp này có dạng phức tạp hơn.

3) Nếu thực hiện phép tuyến tính hóa sau :

Thay các hàm phi tuyến $f(X, \dot{X})$, $\varphi(X, \dot{X})$ bằng các biểu thức :

$$f_1 = a_0 + a_1 X + a_2 \dot{X} \; ; \; \varphi_1 = b_0 + b_1 X + b_2 \dot{X} \tag{5.1}$$

các hệ số a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 tìm từ điều kiện min các biểu thức :

$$\langle (f - f_1)^2 \rangle \; ; \; \langle (\varphi - \varphi_1)^2 \rangle \tag{5.2}$$

tức là bằng:

$$a_o = \langle f(X, \dot{X}) \rangle \qquad b_o = \langle \varphi(X, \dot{X}) \rangle$$

$$a_1 = \frac{1}{\sigma_x^2} \langle f(X, \dot{X})X \rangle \qquad b_1 = \frac{1}{\sigma_x^2} \langle \varphi(X, \dot{X})X \rangle$$

$$a_2 = \frac{1}{\sigma_{\dot{x}}^2} \langle f(X, \dot{X})\dot{X} \rangle \qquad b_2 = \frac{1}{\sigma_{\dot{x}}^2} \langle \varphi(X, \dot{X})\dot{X} \rangle \tag{5.3}$$

Sau đó dùng phương pháp phổ như ở mục 1. trong trường hợp kích động là chuẩn ta sẽ nhận được kết quả hoàn toàn tương tự như kết quả của mục 3. Có nghĩa là phương pháp giả định chuẩn đối với phương trình vi tích phân tương đương với kiểu tuyến tính hóa nêu trên.

Địa chỉ:
Viện Cơ học Viện KHVN

Nhận ngày 10-7-1980

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Nguyễn Cao Mệnh.** Tuyển tập các công trình nghiên cứu Cơ học. Viện Khoa học Việt Nam, Hà nội 1978.

2. **Nguyễn Tiến Khiêm, Nguyễn Đông Anh.** Tạp chí Cơ học số 3—4, 1979.

3. **Brauer Fred.** Asymptotic stability of a class of integro-differential equations. J. Differential Equations, 1978.

4. ФИЛАТОВ А. Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Ташкент 1974

5. МАЛАХОВ А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовских процессов и их преобразований. Москва 1978.

РЕЗЮМЕ

СТАЦИОНАРНОЕ КОЛЕБАНИЕ ВЯЗКО-УПРУГИХ СИСТЕМ ПРИ СЛУЧАЙНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

В работе рассматривается стационарное колебание как линейных так и нелинейных вязко-упругих систем под действием случайных сил. Для линейных систем указывается, что они имеют аналогичные дифференциальным уравнениям свойства и получена формула для спектральной плотности. Для нелинейных систем методом «нормального предположения» составлены необходимые соотношения для определения вероятностных характеристик колебания. Последние имеют специальный вид, поэтому даньше в работе дается соответствующий метод их решения. В конце отмечается эквивалентность использованного метода одному варианту «линеаризации» нелинейных членов. В качестве примера рассматривается поперечное колебание вязко-упругого стержня, сжатого постоянной продольной силой при случайном возмущении.