Tạp chí CƠ HỌC 1981 số 3 (trang 12 — 16)

XÁC ĐỊNH CÁC THAM SỐ ỔN ĐỊNH CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH HỆ SỐ TUẦN HOÀN

NGUYỄN VĂN KHANG

§ MỞ ĐẦU

TRONG động lực học cơ cấu các phương trình vi phân mô tả các quá trình dao động thường là hệ phương trình vi phân với hệ số tuần hoàn [1, 2, 3, 5]. Các hệ số của chúng là hàm của các tham số của cơ cấu như khối lượng, mô men quán tính, độ dài, hệ số đàn hồi, hệ số cản... của các khâu. Do đó, bài toán xác định các tham số để cho cơ hệ ổn định động lực là bài toán rất quan trọng về mặt ứng dụng.

Dưới đây trình bày một phương pháp số tính các nghiệm của phương trình đặc trưng. Sau đó áp dụng phương pháp MONTE – CARLO xác định các tham số của cơ hệ sao cho hệ phương trình vi phân tuyến tính hệ số tuần hoàn mô tả chuyển động của nó ổn định tiệm cận

§ 1. THUẬT TOÁN XÁC ĐỊNH NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG

Xét hệ phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)x_1 + \dots + p_{sn}(t)x_n + f_s(t)\,; \quad (s = 1,\dots, n) \tag{1.1}$$

trong đó $p_{sj}(t)$ và $f_s(t)$ là các hàm liên tục, tuần hoàn của t với chu kỳ T. Hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương ứng có dạng :

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)x_1 + \dots + p_{sn}(t)x_n\,; \quad (s = 1,\dots, n) \tag{1.2}$$

Hệ phương trình (1.2) có thể viết dưới dạng ma trận như sau :

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x \tag{1.2'}$$

Theo [6] phương trình đặc trưng của hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất hệ số tuần hoàn (1.2) không phụ thuộc vào việc chọn hệ nghiệm cơ bản. Vì vậy, ta có thể chọn hệ nghiệm của các phương trình (1.2) thỏa mãn các điều kiện đầu.

$$x_S^{(j)}(0) = \begin{cases} 1 & (S = j) \\ 0 & (S \neq j) \end{cases} \tag{1.3}$$

làm hệ nghiệm cơ bản. Khi đó phương trình đặc trưng của hệ phương trình vi phân tuyến tính (1.2) có dạng:

$$| A - \rho E | = 0 \tag{1.4}$$

Trong đó E là ma trận đơn vị, còn A là ma trận với các phần tử là giá trị tại t = T của các nghiệm của hệ nghiệm cơ bản nêu trên.

$$A = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}(T) & x_1^{(2)}(T) \ldots & x_1^{(n)}(T) \\ x_2^{(1)}(T) & x_2^{(2)}(T) \ldots & x_2^{(n)}(T) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{(1)}(T) & x_n^{(2)}(T) \ldots & x_n^{(n)}(T) \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

Như thế ta có thể đưa bài toán tìm nghiệm phương trình đặc trưng (1.4) về bài toán tính các giá trị riêng và các véc tơ riêng tương ứng của ma trận A:

$$(A - \rho_k E) y_k = 0 \tag{1.6}$$

Từ đó rút ra một thuật toán xác định nghiệm phương trình đặc trưng của hệ phương trình vi phân (1.2)

– Bước một: Xác định ma trận A bằng cách tích phân bằng số hệ phương trình vi phân (1.2) với các điều kiện đầu (1.3).

– Bước hai: Tính các giá trị riêng ρ_k và nếu cần tính cả các véc tơ riêng tương ứng y_k theo phương trình (1.6). Chú ý rằng ta không nhất thiết phải tính tất cả các giá trị riêng và các véc tơ riêng, mà chỉ cần tính giá trị riêng có môđun lớn nhất mà thôi.

§2. XÁC ĐỊNH CÁC THAM SỐ ỔN ĐỊNH

Trong trường hợp tổng quát các nghiệm của phương trình đặc trưng (1.4) là hàm của m tham số $u_1, u_2, \ldots, u_m$ của hệ cơ học:

$$\rho_k = \rho_k(u_1, u_2, \ldots, u_m) \tag{2.1}$$

Theo [6] nếu tất cả các nghiệm của phương trình đặc trưng (1.4) đều có môđun nhỏ thua đơn vị thì nghiệm x = 0 của hệ phương trình vi phân (1.2) ổn định tiệm cận. Khi đó hệ phương trình vi phân tuyến tính (1.1) ổn định tiệm cận. Nếu dù chỉ có một nghiệm của phương trình đặc trưng có môđun lớn hơn đơn vị thì nghiệm x = 0 của hệ phương trình vi phân (1.2) sẽ không ổn định. Khi đó hệ phương trình vi phân tuyến tính (1,1) sẽ không ổn định. Trường hợp phương trình đặc trưng có nghiệm có môđun bằng đơn vị, nhưng không có nghiệm nào có môđun lớn hơn đơn vị gọi là trường hợp tới hạn. Trong công trình này không xét tới trường hợp tới hạn.

Từ những nhận xét trên ta đưa ra định nghĩa: Nếu tất cả các nghiệm $\rho_k(u_1 u_2, \ldots, u_m)$ của phương trình đặc trưng (1.4) đều có môđun nhỏ thua đơn vị, thì véc tơ tham số

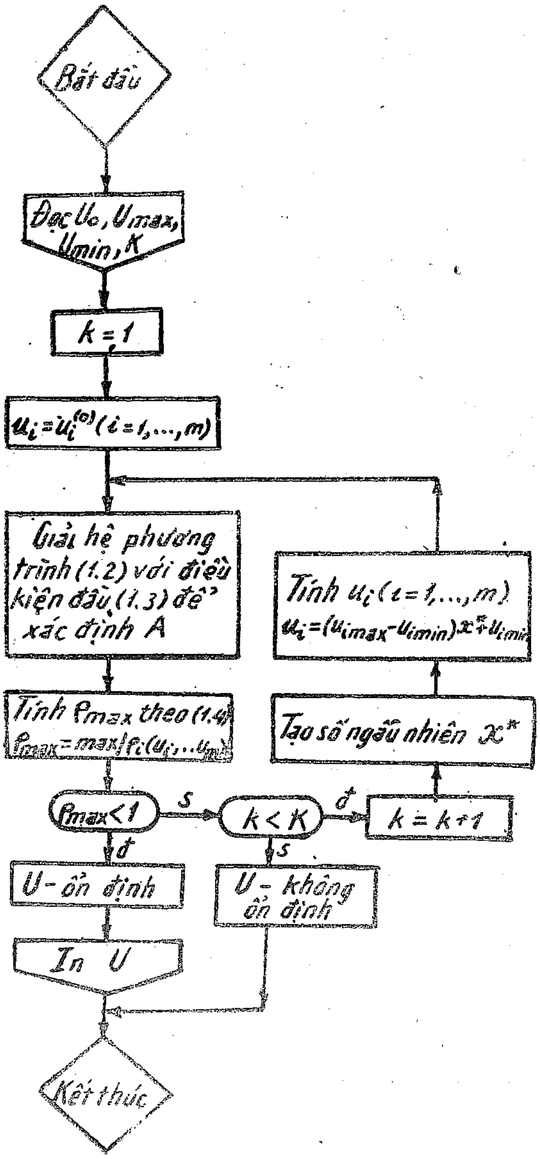
$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$$

của hệ cơ học mô tả bởi hệ phương trình vi phân (1.1) được gọi là véc tơ tham số ổn định tiệm cận. Nếu dù chỉ có một nghiệm của phương trình đặc trưng (1.4) có môđun lớn hơn đơn vị thì vec tơ tham số U của hệ cơ học mô tả bởi hệ phương trình vi phân (1.1) là vec tơ tham số không ổn định.

Chú ý rằng m tham số chọn tùy ý của hệ cơ học xác định một không gian m chiều. Trong các bài toán kỹ thuật các tham số này thường nằm trong một miền xác định. Trong nhiều bài toán các điều kiện rằng buộc các tham số có dạng:

$$U_{min} \leqslant U \leqslant U_{max} \qquad (2.2)$$

Dưới đây chúng ta sử dụng phương pháp MONTE-CARLO /4/ để xác định véc tơ tham số ổn định. Thuật toán xác định véc tơ tham số ổn định tiệm cận của một hệ cơ học mô tả bởi hệ phương trình vi phân (1.1) thực hiện theo sơ đồ sau (hình 1):



Hình 1

Tương ứng với thuật toán nêu trên, ở Bộ môn Cơ lý thuyết Trường Đại học Bách khoa Hà nội đã xây dựng một chương trình bộ phận bằng ngôn ngữ FORTRAN để xác định các tham số ổn định của hệ cơ học mô tả bởi hệ phương trình vi phân (1. 1). Chương trình này là một bộ phận của hệ chương trình tính toán động lực học cơ cấu.

§3. THÍ DỤ ÁP DỤNG

Để làm ví dụ ta xét phương trình Mathieu

$$\ddot{x} + (a + b\cos t)x = 0 \qquad (3.1)$$

Sự ổn định của phương trình này đã được khảo sát kỹ. Hình vẽ 2 cho ta biết các miền ổn định và các miền không ổn định của phương trình (3.1). Trong đó miền gạch gạch là miền ổn định [1].

Bây giờ ta sử dụng phương pháp trình bày ở trên để xác định véc tơ tham số ổn định tiệm cận. Véc tơ tham số của cơ hệ mô tả bởi phương trình vi phân (3.1) có thể lấy như sau :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad (3.2)$$

Ta chọn một số các giá trị của các tham số a và b rồi sử dụng chương trình xác định các tham số ổn định để tính. Các kết quả tính toán nghiệm phương trình đặc trưng của phương trình vi phân (3. 1) bằng máy tính điện tử Minsk-32 ở xí nghiệp tính toán thống kê Hà nội được ghi lại trong bảng 1 sau :

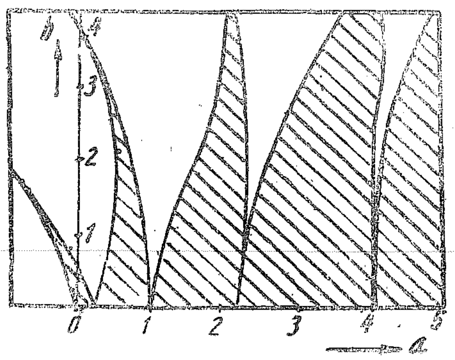
a	b	ρ_1	ρ_2	Ổn định
1,2	1,5	3,545963	0,282012	Không
1,0	1,8	5,819358	0,171840	Không
1,0	2,0	7,727455	0,129409	Không

Nếu vécto tham số đã chọn ban đầu là không ổn định tiệm cận, thì như thuật toán đã chỉ ra, máy tính sẽ tự động chọn các véc tơ tham số khác để tìm véc tơ tham số ổn định tiệm cận theo phương pháp MONTE-CARLO. Kết quả tính cho ta trên bảng 2 sau :

x^*	a	b	ρ_1	ρ_2	Ổn định
	1,2000	1,5000	3.545963	0,282012	Không
0,288783	0,5775	0,5775	−0,323708 +0,946157i	−0,323708 −0,946157i	Có

Trong đó x^* là số ngẫu nhiên.

Các kết quả thu được hoàn toàn phù hợp với bức tranh về các miền ổn định và không ổn định đã thiết lập được bằng phương pháp khác như đã vẽ ở hình 2.



Hình 2

§4 KẾT LUẬN

Trên cơ sở đưa ra khái niệm vec tơ tham số ổn định tiệm cận và vec tơ tham số hông ổn định của một hệ cơ học mô tả bởi phương trình vi phân tuyến tính hệ số tuần oàn, trong bài báo này đã đưa ra một phương pháp xác định các tham số ổn định tiệm ận của một lớp cơ hệ. Thuật toán của phương pháp nêu ra thực hiện rất dễ dàng và huận tiện trên máy tính điện tử,

Thuật toán trên đã và đang được áp dụng một cách có hiệu quả để xác định sự n định động lực của các cơ hệ phức tạp. Các kết quả đã thu được sẽ lần lượt được ông bố sau.

Cuối cùng cần nhấn mạnh rằng, phương pháp nêu trên cũng có thể áp dụng để ghiên cứu sự ổn định động lực của các cơ hệ mô tả bởi các phương trình vi phân á uyến tính hệ số tuần hoàn.

Địa chỉ : Đại học Bách khoa
Nhận ngày 9-6-1980

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Dizioglu, B.** Getriebelehre-Dynamik. Berlin: VEB Verlag Technik 1969.

2. **Nguyễn văn Khang.** Zur naherungsweisen Berechnung der dynamischen Stabilitat der Bewegung ebener Koppelgetriebe. Maschinenbautechnik 27 (1978) 7, S. 310-312.

3. **Nguyễn văn Khang.** Zur Berechnung der dynamischen Stabilitat-sbedingungen und periodischen Schwingungen des Gestells ebener Mechanismen. Rev. Mec. Appl. **25** (1980), N° 2.

4. **Dresig H.; u.s.** Methoden zur rechnergestutzten Optimierung von Konstruktionen, Karl-Marx-Stadt: KDT-BV 1972.

5. ВУЛЬФСОН И. И. Динамические расчёты цикловых механизмов. Изд. машиностроение, Ленинград, 1976.

6. ДЕМИДОВИЧ Б. Н. Лекции по математической теории устойчивости. Изд. Наука. Москва, 1967.

ZUSAMMENFASSUNG

BESTIMMUNG DER STABILIATSPARAMETER EINES LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEMS MIT PERIODISCHEN KOEFFZIENTEN

In der Mechanismendynamik ist es notwendig, die dynamischen Stabilitatsbedingungen zu bestimmen. In dieser Arbeit wird eine numerische Methode zur Berechnung der Stabilitatsparameter eines linearen Differentialgleichungssystems mit periodischen Koeffizienten behandelt. Ein Beispiel ist angegeben.