Tạp chí CƠ HỌC 1981 số 3 (trang 7 – 11)

HIỆN TƯỢNG ỔN ĐỊNH QUAN LIÊN TRONG HỆ Á TUYẾN NHIỀU BẬC TỰ DO

NGUYỄN VĂN ĐÌNH

TRONG [1, 2], nhờ khảo sát các hệ á tuyến tự chấn và thông số hai bậc tự do, chúng ta đã nhận biết hiện tượng ổn định quan liên. Dưới đây, xét trường hợp hệ á tuyến nhiều bậc tự do.

§ 1. HỆ TỰ CHẤN

Cho hệ phương trình vi phân dao động mô tả hệ tự chấn:

$$\ddot{x} + p^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, x_1, \dot{x}_1, ..., x_n, \dot{x}_n) \tag{1.1}$$

$$\ddot{x}_i + p_i^2 x_i = \varepsilon f_i(x, \dot{x}, x_1, \dot{x}_1, ..., x_n, \dot{x}_n) \tag{1.2}$$

trong đó: i – chỉ số chạy từ 1 đến n; x, x_i – các tọa độ; dấu « . » – ký hiệu đạo hàm theo thời gian; p, p_i – các tần số riêng; f, f_i – các đa thức của x, $\dot{x}$, x_i, $\dot{x}_i$; ε – tham số bé.

Giả thiết không xảy ra (nội) cộng hưởng. Trong hệ, ngoài chế độ cân bằng (các kích động tự chấn không gây dao động) và các chế độ dao động hỗn hợp (nhiều kích động tự chấn gây dao động) có thể xảy ra chế độ đơn tần của riêng từng tọa độ (các kích động khác không gây dao động). Để cụ thể, xét chế độ đơn tần của riêng x, đặt:

$$x = a\sin(pt + \varphi) \quad ; \quad \dot{x} = ap\cos(pt + \varphi) \tag{1.3}$$

$$x_i = a_i \sin p_i t + b_i \cos p_i t; \quad \dot{x}_i = p_i(a_i \cos p_i t - b_i \sin p_i t) \tag{1.4}$$

trong đó: a, φ (biên độ và pha); a_i, b_i – các biến mới.

Hệ phương trình vi phân dao động trở thành:

$$\dot{a} = \frac{\varepsilon}{p} f\cos(pt + \varphi) \; ; \qquad \dot{\varphi} = \frac{-\varepsilon}{p} f\sin(pt + \varphi) \tag{1.5}$$

$$\dot{a}_i = \frac{\varepsilon}{p_i} f_i \cos p_i t \quad ; \qquad \dot{b}_i = -\frac{\varepsilon}{p_i} f_i \sin p_i t \tag{1.6}$$

Tiến hành trung bình hóa với chú ý rằng, kết quả là giữ lại các số hạng bằng (sau biến đổi lượng giác để triển khai vế phải thành sin, cos của tổ hợp các bội cung). Hệ phương trình trung bình có những đặc điểm:

– Vế phải không chứa góc pha φ;

– Ở vế phải hai phương trình tương ứng (1.5), các số hạng là bậc chẵn đối với từng cặp a_i, b_i;

— Ở vế phải của cặp phương trình thứ j trong hệ phương trình tương ứng hệ (1.6), ác số hạng đều chứa a_j hoặc b_j.

Cụ thể hơn:

$$\dot{a} = \varepsilon p(a, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n);\ \dot{\varphi} = \varepsilon Q(a, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) \tag{1.7}$$

$$\dot{a}_i = \varepsilon \{ a_i p_i (a, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) + b_i Q_i (a, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) \}$$
$$\dot{b}_i = \varepsilon \{ a_i R_i (a, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) + b_i S_i (a, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n) \} \tag{1.8}$$

rong đó: P, Q, P_i, Q_i, R_i, S_i — các đa thức của $a, a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$; P, Q — các hàm hứa từng cặp a_i, b_i ở bậc chẵn.

Chế độ khảo sát tương ứng nghiệm $a_i = b_i = 0$. với biên độ a_o xác định từ hương trình:

$$p(a, 0, 0, \dots, 0, 0) = 0 \tag{1.9}$$

à góc pha φ_o có biểu thức;

$$\varphi_o = \varepsilon Q(a_o, 0, 0, \dots, 0, 0)t + \text{hằng} \tag{1.10}$$

Giả thiết nghiệm a_o, $a_i = b_i = 0$ là cô lập. Do những đặc điểm đã nêu trên, hệ iến phân có dạng đơn giản:

$$\delta\dot{a} = \varepsilon \left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)_o \delta a \tag{1.11}$$

$$\delta\dot{a}_i = \varepsilon p_{io}\delta a_i + \varepsilon Q_{io}\delta b_i \tag{1.12}$$
$$\delta\dot{b}_i = \varepsilon R_{io}\delta a_i + \varepsilon S_{io}\delta b_i$$

rong đó chỉ số «0» là ký hiệu yêu cầu tính các hàm tại nghiệm tương ứng chế độ :hảo sát.

Phương trình đặc trưng có dạng tích:

$$D(\lambda) = \left(\varepsilon \frac{\partial p}{\partial s_o} - \lambda\right) \cdot \prod_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \varepsilon p_{io} - \lambda & \varepsilon Q_{io} \\ \varepsilon R_{io} & \varepsilon S_{io} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{1.13}$$

Các điều kiện ổn định tách thành hai nhóm:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial a}\right)_o < 0 \tag{1.14}$$

$$p'_{io} + S_{io} < 0\ ;\ P_{io}S_{io} - R_{io}Q_{io} > 0 \tag{1.15}$$

Có thể tìm được ý nghĩa các điều kiện ổn định như sau;

— Trước hết, khảo sát dao động của x khi cách ly nó khỏi ảnh hưởng của các tọa độ khác. Đó là dao động «tự thân» mô tả bởi phương trình vi phân (1.1) khi $x_i = \dot{x}_i = 0$.

$$\ddot{x} + p^2 x = \varepsilon f'(x, \dot{x}) = \varepsilon f(x, \dot{x}, 0, 0, \dots, 0, 0) \tag{1.16}$$

Thực hiện phép đổi biến (1.3) và tiến hành trung bình hóa, chúng ta được:

$$\dot{a} = \varepsilon p'(a)\ ;\ \dot{\varphi} = \varepsilon Q'(a) \tag{1.17}$$

Dễ dàng nhận thấy, dù ngay từ đầu cho $x_i = \dot{x}_i = 0$ hay chỉ sau khi biến đổi mới đặt $a_i = b_i = 0$, kết quả vẫn là một. Vậy:

$$P(a, 0, 0, \dots, 0, 0) = P'(a)$$
$$\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)_o = \left(\frac{\partial P'}{\partial a}\right)_o \tag{1.18}$$

Như thế chế độ đơn tần của riêng x trùng với chế độ dao động tự thân của nó và (1.14) chính là điều kiện ổn định của bản thân chế độ dao động — điều kiện ổn định «tự thân».

Bây giờ, xét trạng thái cân bằng của x_j khi được cách ly với các tọa độ x_i $(i \neq j)$ khác nhưng chịu ảnh hưởng của dao động tự thân của x. Đó là trạng thái cân bằng ở hệ mô tả bởi phương trình thứ j trong hệ (1,2) khi $x_i = \dot{x}_i = 0 \, (i \neq j)$ và x biến thiên theo quy luật dao động tự thân đã tìm được:

$$\ddot{x}_j + p_j^2 x_j = \varepsilon f_j^{*}\left[a_o\sin(pt+\varphi_o),\ a_o p\cos(pt+\varphi_o),\ x_j,\ \dot{x}_j\right]$$

$$= \varepsilon f_j\left[a_o\sin(pt+\varphi_o),\ a_o p\cos(pt+\varphi_o),\ 0,\ 0,\ \ldots,\ x_j,\ \dot{x}_j,\ \ldots,\ 0,\ 0\right] \quad (1.19)$$

Thực hiện phép biến đổi dạng (1.4) rồi tiến hành trung bình hóa, chúng ta được:

$$\begin{aligned} \dot{a}_j &= \varepsilon\left\{a_j P_j^{*}(a_o, a_j, b_j) + b_j Q_j^{*}(a_o, a_j, b_j)\right\} \\ \dot{b}_j &= \varepsilon\left\{a_j Q_j^{*}(a_o, a_j, b_j) + b_j S_j^{*}(a_o, a_j, b_j)\right\} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Cũng như trên có thể nhận thấy:

$$\begin{aligned} P_{jo} &= P_j^{*}(a_o, 0, 0);\ Q_{jo} = Q_j^{*}(a_o, 0, 0) \\ R_{jo} &= R_j^{*}(a_o, 0, 0);\ S_{jo} = S_j^{*}(a_o\, 0, 0) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Như thế cặp điều kiện thứ j trong nhóm (I.15) là điều kiện ổn định của trạng thái cân bằng $x_j = 0$ khi bị kích động bởi riêng chế độ dao động tự thân của x. Gọi đó là điều kiện ổn định quan liên vì nó thể hiện ảnh hưởng của xu thế tự chân của tọa độ x_j. (gọi là xu thế vì dao động không xảy ra).

Để rõ hơn, xét trạng thái cân bằng của x_j khi cách ly nó với tất cả các tọa độ khác kể cả x, Kết quả cho thấy, các điều kiện ổn định vẫn có dạng (1.15) nhưng mất đi những số hạng phụ thuộc chỉ a_o- Trong các hệ hai bậc tự do khảo sát ở [1,2]. các số hạng này là những lực cản hoặc độ lệch tần bổ sung; Ở đây, chúng vẫn có ý nghĩa đó vì, dễ dàng thấy rằng, chúng bắt nguồn từ những số hạng chỉ phụ thuộc vào $x, \dot{x}, x_j, \dot{x}_j$, có bậc chẵn đối với $x, \dot{x}$ và bậc nhất đối với $x_j, \dot{x}_j$. Như thế, chế độ dao động tự thân của x, qua các lực cản và độ lệch tần bổ sung đã làm thay đổi những thông số ổn định của trạng thái cân bằng của tọa độ x_j. Tương ứng khi x_j cân bằng ổn định, chế độ dao động đơn tần của x có thể được thiết lập và ổn định.

§2. HỆ THÔNG SỐ VÀ TỰ CHẤN THÔNG SỐ

Cho hệ phương trình vi phân dao động:

$$\ddot{x} + p^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_n, \dot{x}_n, t) \quad (2.1)$$

$$\ddot{x}_i + p_i^2 x_i = \varepsilon f_i(x, \dot{x}, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_n, \dot{x}_n, t) \quad (2.2)$$

trong đó vế phải có thêm những hàm khai triển thành cấp hữu hạn Phuriê với hệ số là đa thức của $x, \dot{x}, x_i, \dot{x}_i$, nhưng không có số hạng chỉ phụ thuộc thời gian (kích động cưỡng bức). Đó là hệ phương trình vi phân mô tả hệ dao động thông số hoặc hỗn hợp tự chấn thông số.

Giả thiết chỉ xảy ra cộng hưởng giữa từng tần số riêng với từng tần số ngoại lực. Không làm mất tính tổng quát, xem đó là cộng hưởng đúng.

Khảo sát và tìm ý nghĩa các điều kiện ổn định của chế độ dao động đơn tần của riêng x dưới kích động cộng hưởng loại thông số hoặc hỗn hợp tự chấn – thông số (để có thể, ở xấp xỉ thứ nhất, xảy ra chế độ này, phải có những điều kiện nhất định: thí dụ, ở phương trình thứ j trong hệ (2.2), không có mặt số hạng là tích của hàm điều hòa tần số p_j với hàm chẵn đối với $x, \dot{x}$). Thực hiện phép biến đổi (1.3) (1.4) để đưa hệ phương trình vi phân về dạng (1.5), (1.6) rồi tiến hành trung bình hóa. Kết quả cho hệ:

$$\dot{a} = \varepsilon p(a, \varphi, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n); \quad \dot{\varphi} = \varepsilon Q(a, \varphi, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n). \tag{2.3}$$

$$\dot{a}_i = \varepsilon p_i(a, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n); \quad \dot{b}_i = \varepsilon Q_i(a, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) \tag{2.4}$$

trong đó: P, Q — các hàm phụ thuộc φ và là bậc chẵn đối với từng cặp, a_i, b_i; P_j, Q_j — bậc chẵn đối với a và đối với từng cặp a_i, b_i $(i \neq j)$.

Chế độ khảo sát tương ứng nghiệm $a_i = b_i = 0$ và với biên độ a_0 và gốc pha φ_0 xác định từ hệ phương trình:

$$P(a, \varphi, 0, 0, \ldots, 0, 0) = 0, \quad Q(a, \varphi, 0, 0, \ldots, 0, 0) = 0 \tag{2.5}$$

Giả thiết đó là nghiệm cô lập. Hệ biến phân là:

$$\begin{aligned} \delta\dot{a} &= \varepsilon\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)_0 \delta a + \varepsilon\left(\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right)_0 \delta\varphi \\ \delta\dot{\varphi} &= \varepsilon\left(\frac{\partial Q}{\partial a}\right)_0 \delta a + \varepsilon\left(\frac{\partial Q}{\partial \varphi}\right)_0 \delta\varphi \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} \delta\dot{a}_i &= \varepsilon\left(\frac{\partial P_i}{\partial a_i}\right)_0 \delta a_i + \varepsilon\left(\frac{\partial P_i}{\partial b_i}\right)_0 \delta b_i \\ \delta\dot{b}_i &= \varepsilon\left(\frac{\partial Q_i}{\partial a_i}\right)_0 \delta a_i + \varepsilon\left(\frac{\partial Q_i}{\partial b_i}\right)_0 \delta b_i \end{aligned} \tag{2.7}$$

trong đó chỉ số «0» vẫn có ý nghĩa đã biết. Phương trình đặc trưng có dạng tích:

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \varepsilon\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)_0 - \lambda & \varepsilon\left(\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right)_0 \\ \varepsilon\left(\frac{\partial Q}{\partial a}\right)_0 & \varepsilon\left(\frac{\partial Q}{\partial \varphi}\right)_0 - \lambda \end{vmatrix} \prod_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \varepsilon\left(\frac{\partial P_i}{\partial a_i}\right)_0 - \lambda & \varepsilon\left(\frac{\partial P_i}{\partial b_i}\right)_0 \\ \varepsilon\left(\frac{\partial Q_i}{\partial a_i}\right)_0 & \varepsilon\left(\frac{\partial Q_i}{\partial b_i}\right)_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2.8}$$

Các điều kiện ổn định bao gồm:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)_0 + \left(\frac{\partial Q}{\partial \varphi}\right)_0 < 0; \quad \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)_0 \left(\frac{\partial Q}{\partial \varphi}\right)_0 - \left(\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right)_0 \left(\frac{\partial Q}{\partial a}\right)_0 > 0 \tag{2.9}$$

$$\left(\frac{\partial P_i}{\partial a_i}\right)_0 + \left(\frac{\partial Q_i}{\partial b_i}\right)_0 < 0; \quad \left(\frac{\partial P_i}{\partial a_i}\right)_0 \left(\frac{\partial Q_i}{\partial b_i}\right)_0 - \left(\frac{\partial P_i}{\partial b_i}\right)_0 \left(\frac{\partial Q_i}{\partial a_i}\right)_0 > 0 \tag{2.10}$$

Tiến hành tìm hiểu ý nghĩa các điều kiện ổn định như ở §1, kết quả cho thấy:

— Chế độ dao động khảo sát là chế độ dao động tự thân của x và do đó (2.9) là hai điều kiện ổn định tự thân;

— Các điều kiện (2.10) là các điều kiện ổn định quan liên thể hiện ảnh hưởng của các xu thế đơn tần khác đến tính ổn định của chế độ dao động đơn tần của riêng xi

§3. HỆ CÓ KÍCH ĐỘNG CƯỠNG BỨC

Đặt thêm vào hệ khảo sát kích động cưỡng bức là hàm khai triển thành cấp hữu hạn Phuariê với hệ số hằng. Xét trường hợp tổng quát có đồng thời kích động không cộng hưởng và cộng hưởng. Hệ phương trình vi phân dao động có dạng:

$$\ddot{x} + p^2 x = F(t) + \varepsilon f(x, \dot{x}, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_n, \dot{x}_n, t) \tag{3.1}$$

$$\ddot{x}_i + p_i^2 x_i = F_i(t) + \varepsilon f_i(x, \dot{x}, x_1, \dot{x}_1, \ldots, x_n, \dot{x}_n, t) \tag{3.2}$$

a) Dao động thuần cưỡng bức không cộng hưởng — Trong những điều kiện nhất định, có thể xảy ra dao động thuần cưỡng bức không cộng hưởng:

$$x = x_0(t); \quad x_i = x_{i_0}(t) \tag{3.3}$$

tương ứng nghiệm của hệ suy biến.

Để khảo sát ổn định, đặt:

$$x = x_0(t) + y\,;\quad x_i = x_{i0}(t) + y_i \tag{3.4}$$

Hệ phương trình vi phân dao động trở thành:

$$\ddot{y} + p^2 y = \varepsilon f(y, \dot{y}, y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_n, \dot{y}_n, t) \tag{3.5}$$

$$\ddot{y}_i + p_i^2 y_i = \varepsilon f_i(y, \dot{y}, y_1, \dot{y}_1, \ldots, y_n, \dot{y}_n, t) \tag{3.6}$$

trong đó, để đơn giản, các hàm f, f_i vẫn giữ nguyên ký hiệu sau biến đổi.

Đặt:

$$y = a\sin pt + b\cos pt\,;\quad \dot{y} = p(a\cos pt - b\sin pt) \tag{3.7}$$

$$y_i = a_i\sin p_i t + b_i\cos p_i t\,;\quad \dot{y}_i = p_i(a_i\cos p_i t - b_i\sin p_i t) \tag{3.8}$$

Chú ý rằng, ở vế phải hệ (3.5) (3.6), có những số hạng chỉ phụ thuộc thời gian biểu diễn kích động cưỡng bức. Theo giả thiết xảy ra dao động thuần cưỡng bức không cộng hưởng, phải xem là ở mỗi phương trình trong hệ (3.5) (3.6), không có số hạng biểu diễn kích động cưỡng bức cộng hưởng chính với tần số riêng tương ứng. Hệ phương trình trung bình là:

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \varepsilon P(a, b, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, a_0) \\ \dot{b} &= \varepsilon Q(a, b, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, a_0) \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \dot{a}_i &= \varepsilon P_i(a, b, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, a_0) \\ \dot{b}_i &= \varepsilon Q_i(a, b, a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, a_0) \end{aligned} \tag{3.10}$$

trong đó: a_0 — Các thông số của dao động thuần cưỡng bức; P, Q — các hàm bậc chẵn đối với từng cặp a_i, b_i; P_j, Q_j — các hàm bậc chẵn đối với a, b và từng cặp a_i, b_i $(i \neq j)$.

Phương trình đặc trưng và các điều kiện ổn định có dạng tương tự ở § 2 (thay φ bởi b). Có thể giải thích đó là các điều kiện ổn định của trạng thái cân bằng của từng tọa độ sau khi được chế độ thuần cưỡng bức bổ sung các lực cản và độ lệch tần.

b) Dao động cưỡng bức hỗn hợp — Khảo sát chế độ dao động hỗn hợp gồm thành phần cưỡng bức không cộng hưởng và thành phần cộng hưởng của riêng y. Tiến hành khảo sát như ở § 2, kết quả cũng tương tự với chú ý rằng, các lực cản và độ lệch tần số bổ sung là do cả hai thành phần dao động gây ra.

Địa chỉ: Đại học Bách khoa

Nhận ngày 13-6-1980

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Nguyễn Văn Đình.** Hiện tượng ổn định quan liên trong hệ á tuyến tự chấn và thông số hai bậc tự do. Tạp chí Cơ học. Số 1. 1981.

2. **Nguyễn Văn Đình.** Hiện tượng ổn định quan liên trong hệ á tuyến hai bậc tự do có kích động cưỡng bức. Tạp chí Cơ học. Số 2—1981.

РЕЗЮМЕ

ОБ ЯВЛЕНИИ СВЯЗАННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В КВАЗИЛИНЕЙНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Рассматривается квазилинейная колебательная система с многими степенями свободы. Устанавливаются собственные и связанные условия устойчивости.