

PHÂN TÍCH BẢN TRỰC HƯỚNG BẰNG LÝ THUYẾT TƯƠNG ĐƯƠNG

NGUYỄN MẠNH YÊN

§ MỞ ĐẦU

Ý nghĩa thay thế kết cấu thực bằng kết cấu tương đương nhằm đơn giản tính toán, không phải là mới mẻ, mà ngay từ thế kỷ XVII, Euler L. đã đề nghị thay thế nghiên cứu màng mỏng bằng hệ dầm mềm trực giao, đến năm 1774 Bernoulli A. đã mở rộng cách tương đương này vào nghiên cứu bản bằng cách dùng lưới dầm trực giao tương đương.

Tiếp tục theo chiều hướng đó có Timoshenko, Hrennikoff, Рканицын,... đã mô hình một vật thể đàn hồi liên tục bằng một hệ thanh với các giả thiết tương đương khác nhau. Bài toán bản mỏng đàn hồi đẳng hướng cũng đã được nhiều tác giả nghiên cứu bằng các phương pháp tương đương như Marcus, Ewell, Okubo và Abzams, Wieghard, Riedel, Spierig, Lighfoot, Yettram và Husain v.v... và đã đưa lại kết quả khả quan.

Gần hơn hết, năm 1970 Elie Absi đã trình bày một đường lối tổng quát để tính toán tương đương giữa hai hệ đàn hồi cùng chịu ngoại lực tác dụng như nhau, bằng cách xét sự tương đương về năng lượng biến dạng đàn hồi của hệ thực và hệ thay thế tương đương [1]. Trong lý thuyết tương đương của mình, Absi E. đã sử dụng các nguyên lý biến phân năng lượng được trình bày dưới ngôn ngữ ma trận và dẫn đến sử dụng các phương pháp quen thuộc của Cơ học kết cấu như phương pháp lực hoặc phương pháp chuyển vị để phân tích các kết cấu tương đương.

Trong bài này, chúng tôi trình bày cách vận dụng lý thuyết tương đương năng lượng phân tích các bản mỏng đàn hồi trực hướng các kết quả đạt được là tổng quát cho các loại bản trực hướng vật liệu hay hình học, cũng như các bản đàn hồi đẳng hướng [2].

§ 1. TÓM TẮT CƠ SỞ LÝ LUẬN CỦA LTĐ

Xét hai hệ đàn hồi (vật thể + tác dụng), có thể tích và chịu tác dụng giống nhau. Thế năng tổng cộng của hệ thứ nhất là π và của hệ thứ hai là π' , được giả thiết là bảo toàn. Các hàm thế năng này được tính theo công thức:

$$\pi = \int_V U_0 dv + \Phi \quad (1.1)$$

và

$$\pi' = \int_V U'_0 dv + \Phi \quad (1.2)$$

và U'_0 là thế năng biến dạng chứa trong một đơn vị thể tích của hệ thứ nhất và hệ thứ hai, còn được gọi là mật độ thế năng. Φ là thế năng của ngoại lực tác dụng lên hệ.

Người ta định nghĩa rằng hai hệ nói trên tương đương nhau, nếu thỏa mãn điều kiện biến phân sau:

$$\delta\pi = \delta\pi' = 0 \quad (1.3)$$

Từ điều kiện này, người ta có thể thay thế việc phân tích một hệ thực bằng phân tích của một hệ giả tương đương có các luật đối xử khác nhau, miễn là chúng thỏa mãn các trường biến dạng thỏa mãn điều kiện (1.3).

Người ta cũng đã đi đến xét tương đương giữa hai hệ trong một số trường hợp thể như sau:

1. Mật độ thế năng của hai hệ bằng nhau, tức là:

$$U_0 = U'_0 \quad (1.4)$$

2. Mật độ thế năng của hai hệ khác nhau một lượng không đổi

$$u_0, \text{ tức là: } U_0 = U'_0 + u_0 \quad (1.5)$$

3.
$$\pi = \alpha\pi' \quad (1.6)$$

Trong đó, α là một hệ số bất kỳ và thể tích của hai hệ khác nhau.

Như vậy, sự tương đương có thể thực hiện giữa:

- hệ liên tục với một hệ liên tục khác.
- hệ liên tục với một hệ rời rạc.
- hệ rời rạc với một hệ rời rạc khác.

§ 2. PHÂN TÍCH BẢN ĐÀN HỒI TRỤC HƯỚNG BẰNG LTTĐ

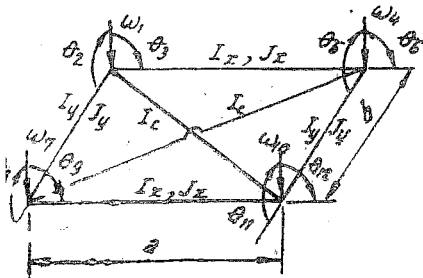
Chúng tôi đã dùng mô hình thanh tương đương để thay thế bản trục hướng. Công việc được thực hiện gồm hai bước rõ rệt:

- Nghiên cứu mô hình tương đương theo LTTĐ
- Thiết lập phương trình chính tắc theo phương pháp chuyển vị cho cả lưới các mô hình tương đương.

2.1. Nghiên cứu các mô hình tương đương.

Đã được dùng hai loại mô hình tương đương:

- Mô hình chữ nhật có hai thanh chéo
- Mô hình chữ nhật không có các thanh chéo



Hình 1

2.1.1. Mô hình chữ nhật có hai thanh chéo (hình 1)

Mô hình gồm 6 thanh được nối cứng với nhau ở hai đầu thanh, hai thanh chéo không nối với nhau ở điểm giữa của chúng.

Mô hình được chọn đối xứng, riêng hai thanh chéo được giả thiết bỏ qua độ cứng xoắn. Giống như một phần tử bản mỏng đàn hồi, tại

đỉnh của mô hình, được xét đến ba thành phần chuyển vị: chuyển vị thẳng đứng w tại hai góc xoay θ_x và θ_y . Như vậy cả mô hình có véc tơ chuyển vị nút:

$$\{u\}^T = [w_1 \theta_2 \theta_3 w_4 \theta_5 \theta_6 w_7 \theta_8 \theta_9 w_{10} \theta_{11} \theta_{12}] \quad (2.1)$$

Năng lượng biến dạng đàn hồi của mô hình tương đương, được xác định bằng tổng các năng lượng biến dạng đàn hồi do uốn và do xoắn tích lũy trong từng thanh:

$$W = (\rho_x + \rho_c \cos^4 \alpha) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^2 + (\rho_y + \rho_c \sin^4 \alpha) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)^2 + (4\rho_c \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \gamma_x + \gamma_y) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2\rho_c \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (2.2)$$

Trong đó, $\rho_x = E_x I_{x\alpha}$; $\rho_y = E_y I_{y\beta}$; $\rho_c = E_c I_{c\alpha}$ $\gamma_x = GJ_{x\alpha}$; $\gamma_y = GJ_{y\beta}$. (2.3)

I_x, I_y, I_c mô men quán tính tiết diện của các thanh trong mô hình E_x, E_y, E_c , đặc trưng đàn hồi vật liệu theo các phương x, y và phương chéo.

a, b, l , là chiều dài của các thanh trong mô hình α là góc nhọn hợp giữa thanh chéo và trục x .

Năng lượng biến dạng đàn hồi của một phần tử bản có cùng kích thước với mô hình tương đương và có bề dày h ; được xác định theo [3]:

$$U = \frac{1}{2} ab \left\{ D_x \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^2 + D_y \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)^2 + 2D_v \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 4D_{xy} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \quad (2.4)$$

Trong đó, D_x, D_y , là độ cứng uốn theo phương x và y .

D_v độ cứng uốn trong mặt phẳng ngang của bản.

D_{xy} độ cứng xoắn của bản.

$\omega = \omega(x, y)$ hàm chuyển vị của bản

So sánh (2.2) và (2.4) dẫn đến hệ phương trình sau:

$$\left. \begin{aligned} \rho_x + \rho_c \cos^4 \alpha &= \frac{1}{2} ab D_x \\ \rho_y + \rho_c \sin^4 \alpha &= \frac{1}{2} ab D_y \\ \rho_c \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha &= \frac{1}{2} ab D_v \\ \gamma_x + \gamma_y + 4\rho_c \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha &= 2ab D_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Giải hệ (2.5), chúng ta xác định được các đặc trưng uốn và xoắn của thanh theo các đặc trưng của bản.

$$\left. \begin{aligned} \rho_x &= \frac{1}{2} ab \left[D_x - \frac{a^2}{b^2} D_v \right] \\ \rho_y &= \frac{1}{2} ab \left[D_y - \frac{b^2}{a^2} D_v \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

$$\rho_c = \frac{1}{2} ab D_v$$

$$\gamma_x + \gamma_y = 2ab [D_{xy} - D_v]$$

Nếu giả thiết độ cứng xoắn tỉ lệ nghịch với chiều dài của thanh thì có thể tính được đặc trưng xoắn của từng thanh.

$$\gamma_x = \frac{2ab^2}{a+b} [D_{xy} - D_v]; \quad \gamma_y = \frac{2a^2b}{a+b} [D_{xy} - D_v] \quad (2.7)$$

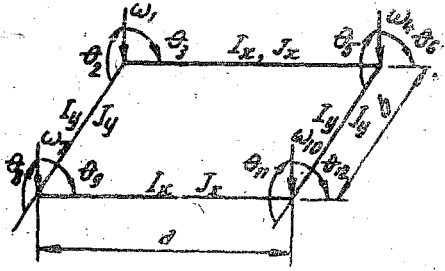
Từ (2.6) và (2.7) suy ra các đặc trưng hình học của tiết diện các thanh ghi trên mô hình (h. 1):

$$I_x = \frac{b}{2E_x} \left[D_x - D_v \frac{a^2}{b^2} \right]; \quad I_y = \frac{a}{2E_y} \left[D_y - D_v \frac{b^2}{a^2} \right]; \quad (2.8)$$

$$I_c = \frac{ab D_y}{2E_c \sqrt{a^2 + b^2}} \left[1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right];$$

$$J_x = \frac{2b^2}{G(a+b)} [D_{xy} - D_v], \quad J_y = \frac{2a^2}{G(a+b)} [D_{xy} - D_v].$$

2.1.2. Mô hình chữ nhật không thanh chéo (hình 2).



Hình 2

Mô hình gồm 4 thanh được nối cứng với nhau ở các đỉnh. Mô hình được chọn đối xứng. Các chuyển vị nút của mô hình cũng được xét giống như (2.1).

Năng lượng biến dạng đàn hồi của mô hình cũng được tính bằng tổng năng lượng biến dạng do uốn và xoắn của từng thanh.

$$W = \rho_x \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^2 + \rho_y \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)^2 + (\gamma_x + \gamma_y) \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 \quad (2.9)$$

Trong đó các ký hiệu đã được giải thích ở phần trên.

Năng lượng biến dạng đàn hồi của phân tử bản có cùng kích thước với mô hình a có bề dày h, với giả thiết bỏ qua các thành phần nội lực màng [3]:

$$U = \frac{1}{2} abh \left\{ D_x \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right)^2 + D_y \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)^2 + 4 D_{xy} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \quad (2.10)$$

Trong đó các ký hiệu cũng đã được giải thích ở phần trên.

So sánh (2.9) và (2.10) sẽ dẫn đến hệ phương trình:

$$\rho_x = \frac{1}{2} ab D_x$$

$$\rho_y = \frac{1}{2} ab D_y \quad (2.14)$$

$$\gamma_x + \gamma_y = 2ab D_{xy}$$

Giả thiết độ cứng xoắn tỉ lệ nghịch với chiều dài thanh, chúng ta có:

$$\gamma_x = \frac{2ab^2}{a+b} D_{xy}; \quad \gamma_y = \frac{2a^2b}{a+b} D_{xy} \quad (2.12)$$

Từ (2.11) và (2.12) có thể xác định được đặc trưng tiết diện các thanh:

$$I_x = \frac{D_x}{2E_x} b; \quad I_y = \frac{D_y}{2E_y} a; \quad (2.13)$$

$$J_x = \frac{2b^2}{G(a+b)} D_{xy}; \quad J_y = \frac{2a^2}{G(a+b)} D_{xy}.$$

Nhận xét: Các kết quả (2.11), (2.12) và (2.13) có thể nhận được từ các kết quả (2.6), (2.7) và (2.8) bằng cách thừa nhận rằng $D_v = 0$.

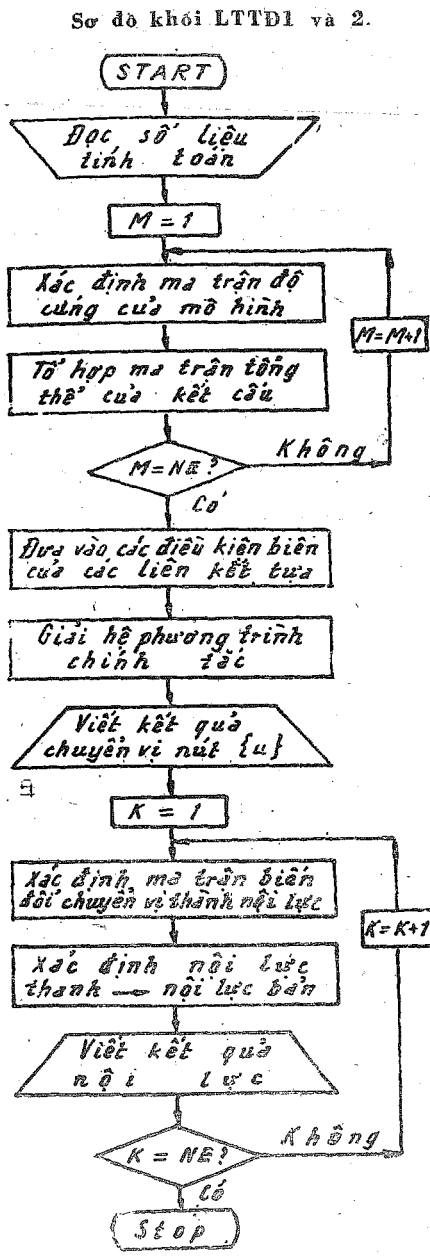
2.1.3. Phân tích mô hình thanh tương đương.

Sau khi đã xác định được các đặc trưng hình học của các thanh trong mô hình, ta có thể tiến hành phân tích mô hình bằng phương pháp chuyển vị (hoặc phương pháp lực) quen thuộc để xây dựng ma trận độ cứng (hoặc ma trận độ mềm) của mô hình [2]. Công việc này không có gì khó khăn.

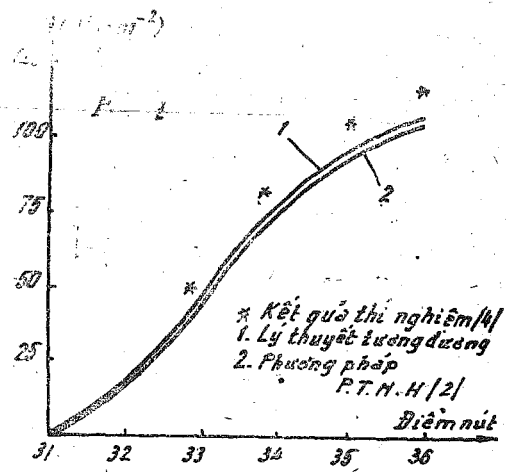
2.2. Thiết lập phương trình chính tắc theo phương pháp chuyển vị cho cả lưới các mô hình tương đương.

Bản trực hướng cần phân tích, được chia thành một lưới các phân tử chữ nhật tùy ý chọn, mỗi phân tử tương đương với mô hình thanh. Vấn đề đặt ra là ghép các

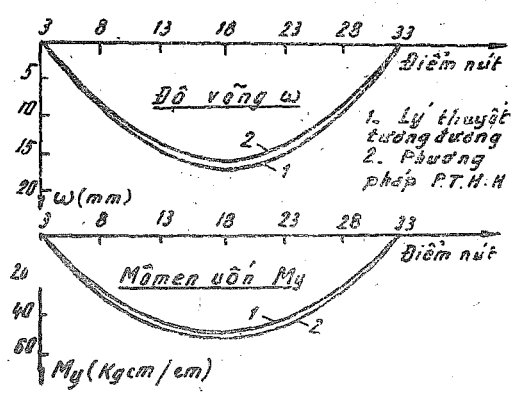
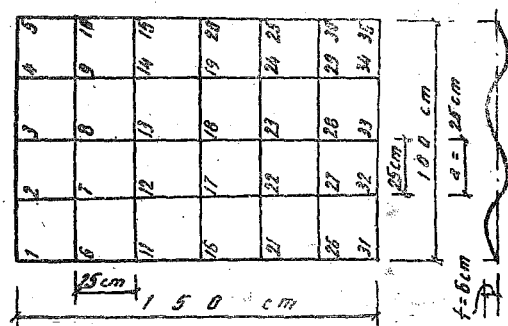
mô hình thành tương đương lại thành lưới các mô hình. Thực chất là ghép các ma trận độ cứng, các vectơ chuyển vị và các vectơ ngoại lực của từng mô hình. Công việc được thực hiện tự động hóa theo chương trình LTTĐ1 và LTTĐ2 viết bằng ngôn ngữ FORTRAN IV. Theo sơ đồ khối dưới đây (h.3).



Hình 3



Hình 4



Hình 5

§3. THÍ DỤ TÍNH TOÁN

Dưới đây là hai thí dụ tính toán đã được thực hiện bằng chương trình LTTĐ1 và LTTĐ2 trên máy tính điện tử МИНСК - 32.

Thí dụ 1. Xác định trạng chuyên vị của một bản bê tông cốt thép gờ đơn giản theo 4 cạnh và chịu lực tập trung ở chính giữa bản. Kết quả được so sánh với phương pháp - Phần tử hữu hạn [2] và kết quả thí nghiệm [4], giới thiệu trên hình 4.

Thí dụ 2. Xác định trạng thái ứng suất và chuyên vị của một bản lượn sóng, gờ đơn giản theo hai cạnh ngắn, chịu tải trọng phân bố. Kết quả được so sánh với phương pháp Phần tử hữu hạn [2], giới thiệu trên hình 5.

§4. KẾT LUẬN

Lý thuyết tương đương đem đến cho người kỹ sư thiết kế một công cụ tính toán cùng chính xác như phương pháp các phần tử hữu hạn nhưng trong một số trường hợp cụ thể nó còn dễ dàng áp dụng hơn, bởi vì kết cấu thực liên tục đã được chuyển về một hệ tương đương cấu tạo bằng các thanh. một loại kết cấu khá quen thuộc đối với người kỹ sư xây dựng.

Vì thực chất lý thuyết tương đương là một bài toán về trường, do đó khả năng mở rộng áp dụng của nó vào nhiều bài toán thuộc các lĩnh vực khác (nhiệt đàn hồi, kết cấu nền móng...) cũng gần giống như phương pháp các phần tử hữu hạn mà chúng ta đã được biết đến.

Cùng với việc xây dựng chương trình tự động hóa tính toán trên máy tính điện tử, lý thuyết tương đương có thể giúp đỡ đắc lực cho chúng ta trong các thiết kế công trình thực tế với độ chính xác đầy đủ tin cậy.

Địa chỉ:
Đại học Xây dựng

Nhận ngày 22/1/1980

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Absi E. La theorie des equivalences et son application aux divers problèmes d'elasticité et au calcul des ponts biaxiaux. Extrait de « Annales des Travaux publics de Belgique » N^o 3, 1971/1972.
2. Nguyễn mạnh Yên. « Contributii la calculul structurilor din placi de beton armat prin metoda elementelor finite si teoria echivalentelor » Teza de doctorat. Timisoara R. S. Romania 1979.
3. Timoshenko S. P., Krieger W.S. Theorie of Plates and Shells. McGraw Hill Book Co. Inc., Newyork - 1959.
4. Ilantzis, A., Coquillat G. Essai sur porteaux et dalles en béton de granulats legers, Cahier de l'A.F.B. N^o 41, Jan., 1974.

SUMMARY

ANALYSIS OF ORTHOGONAL PLATES BY THE THEORY OF EQUIVALENCES

The Principle of the Theory of Equivalences is to replace the Solid Body by a Fictitious Body which is easier to calculate.

Using an Equivalent Solid made up of Bars with Geometrical and mechanical properties, the Problem of the Orthogonal Plates is then replaced by a Problem of research of the internal force state in a structure using method of deformation.

The computer program intended for Minsk - 32 is segmented in two parts utilizing only internal Memory.