Tạp chí Cơ Học 1981 số 2 (trang 22 - 26)

DAO ĐỘNG XOẮN CỦA CẦU TREO DẦM CỨNG VỚI TIẾT DIỆN NGANG BIẾN ĐỔI

NGUYỄN VĂN TỈNH

§ ĐẶT VẤN ĐỀ

ĐỂ phân tích đầy đủ các tính chất động lực của cầu treo cần phải biết được tần số dao động riêng xoắn của cầu. Phần lớn các tài liệu đã biết chỉ mới giải quyết bài toán dao động xoắn của cầu treo dầm cứng với tiết diện ngang không đổi [1, 2, 3], A.V. Smirmov [4] tính dao động xoắn của cầu treo có tiết diện ngang biến đổi dạng hình sin và giải bằng phương pháp gần đúng Bubnov Galerkin.

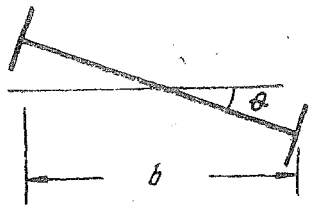
Trong bài này sẽ giải bài toán dao động xoắn đối với cầu treo có tiết diện ngang biến đổi bằng phương pháp ma trận chuyển tiếp, một phương pháp cho phép ta lập chương trình máy tính thuận tiện.

§1. XÁC ĐỊNH MA TRẬN CHUYỂN TIẾP

Trong trường hợp cầu treo dầm cứng với tiết diện ngang biến đổi, ta có thể xem gần đúng là tiết diện ở mỗi đoạn $[i-1, i]$ của cầu là hằng số. Đối với đoạn $[i-1, i]$ đó phương trình dao động xoắn viết được :

$$EJ_\omega \frac{\partial^4 \bar{\theta}(x,t)}{\partial x^4} - GJ_d \frac{\partial^2 \bar{\theta}(x,t)}{\partial x^2} - Hg \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{\theta}(x,t)}{\partial x^2} + bq \frac{\bar{H}_d}{Hg} + 2m\rho^2 \frac{\partial^2 \bar{\theta}(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (1.1)$$

Trong đó :



Hình 1

$\bar{\theta}$ — góc xoắn [h.1]
b — chiều rộng của cầu,
E — mô dun đàn hồi uốn, G — mo dun đàn hồi xoắn
J_ω — mô men quán tính tĩnh của tiết diện,
J_d — mô men quán tính xoắn thuần túy,
ρ — bán kính quán tính của tiết diện ngang,
q — trọng lượng một đơn vị dài của cầu,
m — khối lượng một đơn vị dài của cầu,
H_g — lực kéo ngang tĩnh trong cáp,
H_d — lực kéo ngang động trong cáp.

Đối với phương trình trên ta tìm nghiệm dưới dạng :

$$\bar{\theta} = \theta(x)e^{i\omega t}, \quad \bar{H}_d = H_d e^{i\omega t}$$

Sau khi thay các đại lượng trên vào phương trình (1.1) ta nhận được:

$$EJ_\omega\theta^{IV}(x) - (GJ_d + \frac{b}{2} H_g)\theta''(x) - 2m\rho^2\omega^2\theta'(x) + bq\frac{H_d}{H_g} = 0 \quad (1.2)$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (1.2) được xác định:

$$\theta = C_1 ch\frac{\lambda_1}{a_i}x + C_2 sh\frac{\lambda_1}{a_i}x + C_3\cos\frac{\lambda_2}{a_i}x + C_4\sin\frac{\lambda_2}{a_i}x + \frac{bqH_d}{2m\rho^2\omega^2 H_g} \quad (1.3)$$

Trong đó:

a_i – chiều dài của đoạn $[i-1, i]$,

ω – tần số dao động xoắn của cáp,

còn λ_1 và λ_2 là các nghiệm của phương trình đặc trưng được tính theo công thức sau đây:

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{GJ_d + \frac{b^2}{2} H_g}{2EJ_\omega}}\left[\pm 1 + \sqrt{1 + \frac{8EJ_\omega m\rho^2\omega^2}{\left(GJ_d + \frac{b^2}{2} H_g\right)^2}}\right] \quad (1.4)$$

Tương tự như trong tài liệu [5], quan hệ phụ thuộc giữa θ và H_d viết được bằng biểu thức:

$$\frac{H_d l\mu}{E_c F_c} = \frac{bq}{2Hg}\int_0^l \theta(x)dx \quad (1.5)$$

với: $l = \sum_{i=1}^{k} a_i$, f – độ võng của điểm giữa cáp, hệ số μ được tính:

$$\mu = 1 + \frac{16f^2}{3l^2}$$

E_cF_c – độ bền kéo của cáp

Trên cơ sở đẳng thức (1.3) và (1.5) ta nhận được nghiệm tổng quát sau đây; sau khi biến đổi và thực hiện các pháp tính toán phụ:

$$\theta = C_1\left(Ch\frac{\lambda_1}{a_i}x + C_1^*\right) + C_2\left(sh\frac{\lambda_1}{a_i}x + C_2^*\right) + C_3\left(\cos\frac{\lambda_2}{a_i}x + C_3^*\right) + C_4\left(\sin\frac{\lambda_2}{a_i}x + C_4^*\right) \quad (1.6)$$

với:
$$C_1^* = \frac{s}{\lambda_1} sh\frac{l}{a_1}\lambda_1, \quad C_2^* = -\frac{s}{\lambda_1}\left(1 - ch\frac{l}{a_1}\lambda_1\right), \quad C_3^* = \frac{s}{\lambda_2}\sin\frac{l}{a_i}\lambda_2,$$

$$C_4^* = \frac{s}{\lambda_2}\left(1 - \cos\frac{l}{a_i}\lambda_2\right), \quad s = \frac{ba_iqK}{2m\rho^2\omega^2 Hg - bqlK}, \quad K = \frac{bqE_cF_c}{2lHg\mu} \quad (1.7)$$

Từ phương trình (1.6) ta tính các đạo hàm của hàm $\theta(x)$ tới đạo hàm bậc bốn, từ đó ta nhận được:

$$\begin{pmatrix} \theta(x) \\ \theta'(x) \\ \frac{B(x)}{EJ_\omega} \\ \frac{L(x)}{EJ_\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1^* + ch\varkappa u_1 & C_2^* + sh\varkappa u_1 & C_3^* + \cos\varkappa u_2 & C_4^* + \sin\varkappa u_2 \\ u_1 sh\varkappa u_1 & u_1 ch\varkappa u_1 & -u_2\sin\varkappa u_2 & u_2\cos\varkappa u_2 \\ -u_1^2 ch\varkappa u_1 & -u_1^2 sh\varkappa u_1 & u_2^2\cos\varkappa u_2 & u_2^2\sin\varkappa u_2 \\ (u^2u_1 - u_1^3)sh\varkappa u_1 & (u_2u_1 - u_1^3)ch\varkappa u_1 & -(u^2u_2 + u_2^3)\sin\varkappa u_2 & (u^2u_2 + u_3^2)\cos\varkappa u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

ặc dạng ngắn gọn:

$$\{T\} = [u(x)]\ \{c\} \tag{1.9}$$

ong đó: $u_1 = \frac{\lambda_1}{a_i}$, $u_2 = \frac{\lambda_2}{a_i}$, $u = \sqrt{\frac{GJ_d + \frac{b^2}{2} Hg}{EJ_\omega}}$

$B(x) = -EJ_\omega\theta''$ $-B_i$ mô men

$L(x) = \left(GJ_d + \frac{b^2}{2} Hg\right)\theta' - EJ_\omega\theta'''$ – mô men xoắn.

a ký hiệg:

$$\{T(x=0)\} = \{T_{i-1}\}, \quad [u(x=0)] = [u_i(0)],$$
$$\{T(x=a_i)\} = \{T_i\}, \quad [u(x=a_i)] = [u(a_i)].$$

ừ từ đẳng thức (1.9) viết được:

$$\{T_{i-1}\} = [u_i(0)]\{c\}$$

rong đó

$$[u_i(0)] = \begin{pmatrix} c_1^* + 1 & c_2^* & c_3^* + 1 & c_4^* \\ 0 & u_1 & 0 & u_2 \\ -u_1^2 & 0 & u_2^2 & 0 \\ 0 & u^2u_1 - u_1^3 & 0 & u^2u_2 + u_2^3 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

ừ đó

$$\{c\} = [u_i^{-1}]\ \{T_{i-1}\} \tag{1.11}$$

Thay đẳng thức trên vào phương trình (1.1) ta được:

$$\{T(x)\} = [u(x)]\ [u_i^{-1}(0)]\ \{T_{i-1}\} \tag{1.12}$$

và từ đó rút ra:

$$\{T_i\} = [u_i(a_i)]\ [u_i^{-1}(0)]\{T_{i-1}\} \tag{1.13}$$

Ma trận $[u_i^{-1}(0)]$ ta tính từ biểu thức (1.10):

$$[u_i^{-1}(0)] = \begin{pmatrix} \frac{u_2^2}{v_1} & \frac{u_2^2 v_4}{v_1 v_2} & \frac{-(1+C_3^*)}{v_1} & \frac{u_2^2 v_3}{v_1 v_2} \\ 0 & \frac{u^2u_2 + u_2^3}{v_2} & 0 & \frac{-u_2}{v_2} \\ \frac{u_1^2}{v_1} & \frac{u_1^2 v_4}{v_1 v_2} & \frac{1+C_1^*}{v_1} & \frac{u_2^2 v_3}{v_1 v_2} \\ 0 & \frac{u_1^3 - u^2u_1}{v_2} & 0 & \frac{u_1}{v_2} \end{pmatrix} \tag{1.14}$$

trong đó:

$$v_1 = u_2^2(1+C_1^*) + u_1^2(1+C_3^*), \quad v_2 = u_1u_2^3 + u_2u_1^3, \quad v_3 = -u_1C_4^* + u_2C_2^*,$$

$$v_4 = C_4^*(u^2u_1 - u_1^3) - C_2^*(u^2u_2 + u_2^3) \tag{1.15}$$

Sau khi thay $x = a_i$ vào ma trận $[u_i(x)]$ từ phương trình (1.8) ta nhận được:

$$[u_i(a_i)] = \begin{bmatrix} C_1^* + ch\lambda_1 & C_2^* + sh\lambda_1 & C_3^* + \cos\lambda_2 & C_4^* + \sin\lambda_2 \\ u_1 sh\lambda_1 & u_1 ch\lambda_1 & -u_2 \sin\lambda_2 & u_2\cos\lambda_2 \\ -u_1^2 ch\lambda_1 & -u_1^2 sh\lambda_1 & u_2^2\cos\lambda_2 & u_2^2\sin\lambda_2 \\ (u^2u_1 - u_1^3)sh\lambda_1 & (u^2u_1 - u_1^3)ch\lambda_1 & (u^2u_2 - u_2^3)\sin\lambda_2 & (u^2u_2 - u_2^3)\cos\lambda_2 \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

Từ điều kiện cân bằng của nút «i» ta nhận được ma trận nút:

$$[W_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ v & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

với:
$$v = \frac{2m\rho^2 a_i \omega^2}{EJ_\omega}$$

Cuối cùng ta viết được ma trên chuyển tiếp cho mỗi đoạn:

$$[P_i] = [w_i]\,[u_i(a_i)]\,[u_i^{-1}(o)] \tag{1.18}$$

Đối với cầu treo có k đoạn:

$$[P] = \prod_{i=1}^{k} [p_i] \tag{1.19}$$

Còn đối với các dao động phản đối xứng thì các hệ số C_1^*, C_2^*, C_3^*, C_4^* bằng không.

Trong trường hợp cầu treo dầm cứng với tiết diện ngang không đổi thì:

$$[P] = [u(l)]\,[u^{-1}(0)] \tag{1.20}$$

Sử dụng điều kiện biên và ứng dụng phương pháp gần đúng dần, ta có thể tính được tần số dao động xoắn của cầu treo bằng cách cho các định thức tương ứng của ma trận chuyển tiếp bằng không.

§2. THÍ DỤ

Để minh họa cho sự đúng đắn của phần lý thuyết đã trình bày trong phần này ta tính ví dụ cụ thể cho cầu treo với các số liệu kỹ thuật đã cho trong tài liệu [2]:

$$l = 500\text{m}, \quad b = 21\text{m}, \quad q = 147{,}0983\text{kNm}^{-1}, \quad E = 20{,}593.10^7\text{kNm}^{-2}$$

$$E_c = 15.6905.10^7\text{KNm}^{-2}, \quad F_c = 0{,}2\text{m}^2, \quad J_\omega = 525\text{m}^6, \quad J_d = 4{,}5.10^{-4}\text{m}^4,$$

$$G = 7{,}9433.10^7\text{kNm}^{-2}. \quad Hg = 91936{,}4063\text{kN}, \quad 2m = 4220{,}8188\text{kNséc}^2,$$

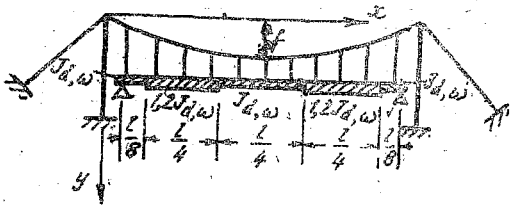
với điều kiện biên: $\theta(0) = \theta(l) = \theta''(0) = \theta''(l) = 0$

Tính cho hai trường hợp:

a) Dầm cứng có tiết diện ngang không đổi.

b) Dầm cứng có tiết diện ngang thay đổi, chia ra 5 đoạn như hình 2.

Chương trình tính toán viết theo ngôn ngữ Algol và được tính tại Trung tâm tính toán của trường Đại học Bách khoa Poznan.



Hình 2

Kết quả tính toán như sau:

Tần số dao động xoắn	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
Trường hợp a/	1,243	1,732	2,196	2,650
Trường hợp b/	1,672	1,960	2,809	4,369

§3. KẾT LUẬN

Phương pháp giới thiệu trong bài này cho phép ta xác định được tần số dao động xoắn của cầu treo dầm cứng với tiết diện ngang biến đổi. Ưu điểm của phương pháp này là việc lập chương trình tính toán được dễ dàng vì phần chủ yếu của tính toán là thực hiện phép nhân các ma trận.

Từ kết quả thu được ta nhận thấy nếu độ chịu xoắn của dầm cứng tăng lên thì tần số dao động xoắn cũng tăng lên, mặc dù lúc đó độ chịu kéo của cáp và khối lượng riêng của cầu không đổi. Thí dụ tần số dao động chính ω_1 trong trường hợp «b» lớn hơn trong trường hợp a/ tới 34%.

Địa chỉ

Đại học xây dựng

Nhận ngày 16/12/1979

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Solocki R. Szymkiewicz J.** Uklady pretowe i powierzchniowe. Obliczemia dynamiczne, Warszawa 1964,

2. **Hawranck Steinhardt B.** Theorie und Berechnung der Stahlbracken, Berlin 1958.

3. ЧЕРВЯКОВ А.В.В. Канонические методы определения собственных частот и форм крутильных колебаний висячих мостов. Рас. прост. систем в строит. Мех. Саратов, ум—Т, 1972.

4. СМИРНОВ В.А. Висячие мосты больших пролетов, Изд. Высшая школа, Москва, 1970.

5. **Tinh** N.V. Macierzowe sformulowanie drgán mlasnych ukladu ciegnowo — pretowego, Arch. Inz Lad. t. XXI. z.4. 1975.

SUMMARY

TORSIONAL VIBRATION OF SUSPENSION BRIDGE WITH A VARIABLE CROSS SECTION

The transfer matrix method to torsional vibrations of a suspension bridge with variable cross sections is reported.

The method described above is particularly suitable for implementing an efficient computer program. A numerical example is also givens.