Tạp chí CƠ HỌC 1981 số 2 (trang 14 – 21)

VỀ VẤN ĐỀ XÁC ĐỊNH PHẢN LỰC ĐỘNG LỰC VÀ ỨNG LỰC TRONG MỘT HỆ THANH

ĐỖ SANH

TRONG chuyên khảo [1] đã trình bày một phương pháp xác định các phản lực động lực và các ứng lực của một hệ thanh. Trong bài báo này chúng tôi giải quyết vấn đề nêu trên bằng một phương pháp tổng quát và đơn giản.

§1. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG VỚI NHÂN TỬ CỦA MỘT CƠ HỆ

Chúng ta khảo sát một hệ cơ học với liên kết hôlônôm dạng

$$g_\alpha(t, q_i) = 0\,; \quad \alpha = \overline{1, r}\,; \quad i = \overline{1, n}$$

Như đã biết [2], để xác định chuyển động của cơ hệ và các phản lực liên kết chúng ta sử dụng các phương trình sau:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_v}(T)^o - \frac{\partial}{\partial q_v}(T)^o = Q_v + \sum_{h=p+1}^{n} Q_h \frac{\partial \overset{o}{q_h}}{\partial q_v}\,; \tag{1.1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_\alpha}\right)^o - \left(\frac{\partial T}{\partial u_\alpha}\right)^o = \sum_{h=p+1}^{n} Q_h \left(\frac{\partial q_h}{\partial u_\alpha}\right)^o + \lambda_\alpha \tag{1.2}$$

ở đó **T** là biểu thức động năng của cơ hệ có dạng [2]:

$$T = T(t, q_v, u_\alpha, \dot{q}_v, \dot{u}_\alpha),$$

ký hiệu $(\ )^o$ có nghĩa rằng trong dấu ngoặc chúng ta lấy $u_\alpha = \dot{u}_\alpha = 0$; ở đó $u_\alpha = g_\alpha(t, q_i)$; q_i là các tọa độ mở rộng $(i = \overline{1, n})$; q_v là các tọa độ mở rộng độc lập $(v = \overline{1, p}$, $p = n - r)$; Q_v, Q_h là các lực mở rộng.

§2. XÁC ĐỊNH PHẢN LỰC ĐỘNG LỰC TRONG CÁC CƠ CẤU

Chúng ta khảo sát một hệ n thanh nối với nhau bằng các bản lề $A_1, \ldots, A_n$, ở đó A_1 là cố định. Thanh A_iA_{i+1} có độ dài l_i, khối lượng m_i, còn trọng tâm C_i của nó cách A_i một khoảng S_i. Chúng ta giả sử rằng tại C_i có tác dụng mômen M_i và các lực thẳng đứng X_i, các lực nằm ngang Y_i. Ngoài ra chúng ta giả thiết thêm rằng tại điểm cuối của thanh thứ n có tác dụng lực thẳng đứng P, lực nằm ngang Q và mômen M. Chúng ta sẽ thảo luận hai bài toán sau:

Bài toán thứ nhất:

Xác định các phản lực tại các bản lề $A_j (j=\overline{2,n})$. Chúng ta chọn trục A_1x thẳng đứng và trục A_1y nằm ngang và các tọa độ mở rộng q_i, q'_j, $q''_j (i=\overline{1,n};\ j=\overline{2,n})$, ở đó q_i là góc giữa thanh A_i, A_{i+1} và trục thẳng đứng A_1x còn q'_j, q''_j là tọa độ của điểm $A_j\ (j=\overline{2,n})$. Dễ dàng nhận thấy rằng hệ chịu các liên kết hôlonôm dạng

$$q'_j - \sum_{i=1}^{j-1} l_i \cos q_i = 0;\quad q''_j - \sum_{i=1}^{j-1} l_i \sin q_i = 0;\quad j=\overline{2,n}.$$

Các lực mở rộng Q_i, Q'_j, Q''_j sẽ là

$$Q_i = \sum_{j=i}^{n} M_j + M - (Y_i\cos q_i - X_i \sin q_i)S_i,$$

$$Q'_j = \sum_{i=j}^{n} X_i + P;\quad Q''_j = \sum_{i=j}^{n} Y_i + Q;\quad j=\overline{2,n}.$$

Chúng ta đưa vào các biến phụ u_j và v_j:

$$u_j = q'_j - \sum_{i=1}^{j-1} l_i \cos q_i;\quad v_j = q''_j - \sum_{i=1}^{j-1} l_i \sin q_i;\quad j=\overline{2,n}.$$

Động năng của hệ được tính nhờ công thức:

$$2T = \sum_{i=1}^{n} (J_i\dot{q}_i^2 + m_i v_i^2)$$

ở đó J_i là mômen quán tính của thanh $A_i A_{i+1}$ đối với khối tâm C_i, vận tốc của nó bằng:

$$v_{ix} = \dot{u}_i - S_i \sin q_i \dot{q}_i;$$
$$v_{iy} = \dot{v}_i - S_i \cos q_i \dot{q}_i;\quad v_1 = u_1 = 0$$

Sau một số phép biến đổi động năng của hệ có thể viết trong dạng:

$$2T = \sum_{i=2}^{n} A_{ii}\dot{q}_i^2 + \sum_{j>i=1}^{n} \cos(q_i-q_j)(m_jS_j + l_jm_j^*)\, l_i\dot{q}_i\dot{q}_j + \sum_{i>j=1}^{n} \cos(q_i-q_j)(m_is_i + l_im_i^*)\, l_j\dot{q}_i\dot{q}_j +$$
$$+ \sum_{j=2}^{n} m_j(\dot{u}_j^2 + \dot{v}_j^2) + 2\sum_{j=2}^{n} m_j\Big[\dot{v}_j\Big(s_j\cos q_j\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{j-1} l_i\cos q_i\dot{q}_i\Big) + \dot{u}_j\Big(s_j\sin q_j\dot{q}_j + \sum_{i=1}^{j-1} l_i \sin q_i\dot{q}_i\Big)\Big] \quad (2.1)$$

$$2T^{o} = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}\dot{q}_i^2 + \sum_{j>i=1}^{n} \cos(q_i-q_j)(m_jS_j + l_jm_j^*)\, l_i\dot{q}_i\dot{q}_j +$$
$$\sum_{i>j=1}^{n} \cos(q_i-q_j)(m_iS_i + l_im_i^*)\, l_i\dot{q}_i\dot{q}_j \quad (2.2)$$

ở đó:

$$A_{ii} = J_i + m_iS_i^2 + l_i^2 m_i^*;\quad m_i^* = \sum_{\rho=i+1}^{n} m_\rho;\quad i=\overline{1,n}.$$

Công thức (2.1) nhận được nhờ phương pháp truy chứng.

Khi áp dụng các phương trình (1.2) cho hệ được khảo sát, chúng ta có

$$m_j\Big(S_j \sin q_j \ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{j-1} l_i \sin q_i \ddot{q}_i + S_j \cos q_j \dot{q}_j^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{j-1} l_i \cos q_i \dot{q}_i^2\Big) = \lambda u_j + \sum_{i=j}^{n} X_i + P ; \tag{2.3}$$

$$m_j\Big(S_j \cos q_j \ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{j-1} l_i \cos q_i \ddot{q}_i + S_j \sin q_j \dot{q}_j^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{j-1} l_i \sin q_i \dot{q}_i^2\Big) = \lambda v_j + \sum_{i=j}^{n} Y_i + Q ;\ j = \overline{2,n} \tag{2.4}$$

Để xác định $\ddot{q}_i\ (i = \overline{1,n})$ chúng ta sử dụng phương trình (1.1), đó là :

$$A_{ii}\ddot{q}_i + \sum_{j=i+1}^{n} \cos(q_i - q_j)(m_j S_j + l_j m_j^*) l_i \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{i-1} \cos(q_i - q_j)(m_i S_i + l_i m_i^*) l_j \ddot{q}_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{i-1} \sin(q_i - q_j)(m_i S_i + l_i m_i^*) l_j \dot{q}_j^2 + \sum_{j=i+1}^{n} \sin(q_i - q_j)(m_j S_j + l m_j^*) l_i \dot{q}_j^2 = \sum_{j=i}^{n} M_i +$$

$$+ M + (Y_i \cos q_i - X_i \sin q_i) S_i + l_i\Big(\cos q_i \sum_{\rho=i+1}^{n} Y_\rho - \sin q_i \sum_{\rho=i+1}^{n} X_\rho\Big),\ i = \overline{1,n}. \tag{2.5}$$

Các phương trình (2.5) mô tả chuyển động của hệ được khảo sát. Từ (2.3) và (2.4) chúng ta nhận được các nhân tử $\lambda u_j, \lambda v_j\ (j = \overline{2,n})$. Dễ dàng nhìn thấy rằng các nhân tử này chính là thành phần thẳng đứng và nằm ngang của các phản lực liên kết tại bản lề A_i. Từ kết quả nhận được chúng ta nhận xét rằng các phản lực động lực có dạng bình phương đối với vận tốc.

Thí dụ 1. Khảo sát hệ 2 thành. Giả sử rằng

$$X_i = Y_i = M_i = 0 ;\quad P = Q = M = 0$$

Các phương trình (2.5) bây giờ có dạng :

$$A_{11}\ddot{q}_1 + A_{12}\ddot{q}_2 = m_2 l_1 S_2 \dot{q}_2^2 \sin(q_2 - q_1),\quad A_{12}\ddot{q}_1 + A_{22}\ddot{q}_2 = - m_2 l_1 S_2 \dot{q}_1^2 \sin(q_2 - q_1).$$

Để xác định các nhân tử λ_1, λ_2, chúng ta sử dụng các phương trình (2.3) và (2.4)

$$- m_2(l_1 \sin q_1 \ddot{q}_1 + S_2 \sin q_2 \ddot{q}_2 + l_1 \cos q_1 \dot{q}_1^2 + S_2 \cos q_2 \dot{q}_2^2) = \lambda_1$$

$$m_2(l_1 \cos q_1 \ddot{q}_1 + S_2 \cos q_2 \ddot{q}_2 - l_1 \sin q_1 \dot{q}_1^2 - S_2 \sin q_2 \dot{q}_2^2) = \lambda_2$$

ở đó : $A_{11} = J_1 + m_1 S_1^2 + m_2 l_1^2$; $A_{22} = J_2 + m_2 S_2^2$; $A_{12} = m_2 l_1 S_2 \cos(q_2 - q_1)$.

Từ đó chúng ta nhận được :

$$\lambda_1 = - m_2 l_1 \dot{q}_1^2 A_0^{-1} \{A_{11}[A_{22}\cos q_1 - S_2^2 m_2 \sin q_2 \sin(q_2 - q_1)] - m_2^2 S_2^2 l_1^2 \cos q_1 \cos(q_2 - q_1)\} -$$

$$- m_2 S_2 \dot{q}_2^2 A_0^{-1} \{A_{22}[A_{11}\cos q_2 + l_1^2 m_2 \sin q_1 \sin(q_2 - q_1)] - m_2^2 S_2^2 l_1^2 \cos q_1 \cos(q_2 - q_1)\} ;$$

$$\lambda_2 = m_2 l_1 \dot{q}_1^2 A_0^{-1} \{-A_{11}[A_{22}\sin q_1 + m_2 S_2^2 \cos q_2 \sin(q_2 - q_1)] + m_2^2 S_2^2 l_1^2 \sin q_1 \cos(q_2 - q_1)\} +$$

$$+ m_2 S_2 \dot{q}_2^2 A_0^{-1} \{A_{22}[-A_{11}\sin q_2 + l_1^2 m_2 \cos q_1 \sin(q_2 - q_1)] + m_2^2 S_2^2 l_1^2 \sin q_1 \cos(q_2 - q_1)\}$$

ở đó: $A_0 = A_{11}A_{22} - A_{12}^2$

Dễ dàng chỉ ra rằng λ_1 và λ_2 là các thành phần thẳng đứng và nằm ngang của phản lực của bản lề nối hai thanh.

Bài toán thứ hai:

Chúng ta giả sử rằng chuyển động của hệ được khảo sát ở trên bị ràng buộc bởi các liên kết hôlônôm dạng:

$$q_{k+1} - q_k = 0; \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1 \tag{2.6}$$

Chúng ta sẽ xác định phản lực tại bản lề A_j ($j = \overline{2, n}$) và phản lực của liên kết (2.6).

Rõ ràng rằng số bậc tự do của hệ bị giảm đi một.

Trong trường hợp này chúng ta đưa vào các biến phụ như sau:

$$\theta_k = q_{k+1} - q_k \tag{2.7}$$

Động năng của hệ bây giờ có dạng

$$2T = \sum_{k+1 \neq i = 1}^{n} A_{ii}\dot{q}_i^2 + 2A_{k+1,\, k+1}\left(\dot{q}_k\dot{\theta}_k + \frac{1}{2}\dot{\theta}_k^2 + \frac{1}{2}\dot{q}_k^2\right) +$$

$$+ \sum_{k+1 \neq j = 2}^{n} m_j(\dot{u}_j^2 + \dot{v}_j^2) + \sum_{i=1}^{k} \cos(q_k + \theta_k - q_i)(m_{k+1}S_{k+1} + l_{k+1}m_{k+1}^*)l_i\dot{q}_i\dot{q}_k +$$

$$+ \sum_{i=k+2}^{n} \cos(q_k + \theta_k - q_i)(m_iS_i + l_i m_i^*)\, l_{k+1}\dot{\theta}_k\dot{q}_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{k} \cos(q_k + \theta_k - q_i)(m_{k+1}S_{k+1} + l_{k+1}m_{k+1}^*)\, l_i\dot{\theta}_k\dot{q}_i +$$

$$+ \sum_{i=k+2}^{n} \cos(q_k + \theta_k - q_i)(m_i S_i + l_i m_i^*)\, l_{k+1}\dot{q}_i\dot{q}_k +$$

$$+ 2\sum_{j>i=2}^{n} \cos(q_i - q_j)(m_j S_j + l_j m_j^*)\, l_i\dot{q}_i\dot{q}_j +$$

$$+ \sum_{k+1 \neq j=2}^{n} m_j\left[\dot{v}S_j(j\cos q_j\dot{q}_j + \sum_{k+1 \neq i=1}^{n} l_i\cos q_i\,\dot{q}_i) - \dot{u}_j(S_j\sin q_j\dot{q}_j +\right.$$

$$+ \left.\sum_{k+1 \neq i=1}^{j-1} l_i\sin q_i\dot{q}_i\right] + m_{k+1}\left[\dot{v}_{k+1}\left\{S_{k+1}\cos(q_k + \theta_k)\dot{q}_k +\right.\right.$$

$$+ \left.\sum_{i=1}^{k} l_i\cos q_i\dot{q}_i\right\} - \dot{u}_{k+1}\left\{S_{k+1}\sin(q_k + \theta_k)\dot{q}_k - \sum_{i=1}^{k} l_i\sin q_i\dot{q}_i\right\} +$$

$$l_{k+1}(\dot{q}_k + \dot{\theta}_k)\{\cos(q_k + \theta_k) - \sin(q_k + \theta_k)\} \sum m_i(\dot{v}_i - \dot{u}_i)] +$$

$$m_{k+1}[\dot{v}_{k+1}\cos(q_k + \theta_k) - \dot{u}_{k+1}\sin(q_k + \theta_k)]\, S_{k+1}\dot{\theta}_k; \tag{2.8}$$

ở đó
$$m_\rho^* = \sum_{\gamma=\rho+1}^{n} m_\gamma .$$

Dễ dàng nhận được

$$2T^o = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}\dot{q}_i^2 + (A_{kk} + A_{k+1,\,k+1} + m_{k+1}S_{k+1} + l_{k+1}m_{k+1}^*)\dot{q}_k^2 -$$
$$+ 2\sum_{j=k+2}^{n} \cos(q_k - q_j)(m_jS_j + l_jm_j^*)\, l_{k+1}\dot{q}_k\dot{q}_j +$$
$$+ 2\sum_{j=1}^{k-1} \cos(q_k - q_j)(m_{k+1}S_{k+1} + l_{k+1}m_{k+1}^*)\, l_j\dot{q}_j\dot{q}_k + \tag{2.9}$$
$$+ 2\sum_{\substack{j>i=1\\ i,j\neq k+1}}^{n} \cos(q_i - q_j)(m_jS_j + l_jm_j^*)\, l_i\dot{q}_j\dot{q}_j .$$

Khi thay (2.7) và (2.9) vào các phương trình (1.1) và (1.2) chúng ta được:

$$- m_j(s_j\mathrm{Sin}\, q_j\ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{j-1} l_i\sin q_i\ddot{q}_i + S_j\cos q_j\dot{q}_j^2 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{j-1} l_i\cos q_i\dot{q}_i^2 = \lambda u_j + \sum_{i=j}^{n} X_i + P ;$$
$$m_j(S_j\cos q_j\ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{j-1} l_i\cos q_i\ddot{q}_i - S_j\sin q_i\dot{q}_j^2$$
$$- \sum_{i=1}^{j-1} l_i\sin q_i\dot{q}_i^2 = \lambda v_j + \sum_{i=j}^{n} Y_i + Q ;\quad j = \overline{2,n}. \tag{2.10}$$
$$m_{k+1}(S_{k+1}\cos q_k\ddot{q}_k + \sum_{i=1}^{k} l_i\cos q_i\ddot{q}_i - S_{k+1}\sin q_k\dot{q}_k^2$$
$$- \sum_{i=1}^{k} l_i\sin q_i\dot{q}_i^2 = \lambda_{v_{k+1}} + Y_k + 2\sum_{j=k+1}^{n} Y_j + 2Q .$$
$$m_{k+1}(S_{k+1}\sin q_k\ddot{q}_k + \sum_{i=1}^{k} l_i\sin q_i\ddot{q}_i + S_{k+1}\cos q_k\dot{q}_k^2 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} l_i\,\mathrm{eos}\, q_i\dot{q}_i^2 = \lambda u_{k+1} + X_k + 2\sum_{j=k+1}^{n} X_j + 2P ;$$
$$[A_{k+1,\,k+1} + (S_{k+1}m_{k+1} + l_{k+1}m_{k+1}^*)\, l_k]\,\ddot{q}_k +$$
$$+ \sum_{j=k+2}^{n} \cos(q_k - q_j)(m_jS_j + l_jm_j^*)\, l_{k+1}\ddot{q}_i + \tag{2.11}$$

$$+ \sum_{j=k+2}^{n} \sin(q_k - q_j)(m_j S_j + l_j m_j^*)\, l_{k+1} \dot{q}_j^2 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k-1} \cos(q_k - q_j)(m_{k+1} S_{k+1} + l_{k+1} m_{k+1}^*)\, l_j \ddot{q}_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{k} \sin(q_k - q_j)(m_{k+1} S_{k+1} + l_{k+1} m_{k+1}^*)\, l_j \dot{q}_j^2 =$$

$$\lambda\theta_k + M + \sum_{i=k+1}^{n} M_i + \cos q_k \left[Y_{k+1} S_{k+1} + (Q + \sum_{i=k+2}^{n} Y_i)\, l_{k+1}\right] +$$

$$\sin q_k \left[X_{k+1} S_{k+1} (P + \sum_{i=k+2}^{n} X_i)\, l_{k+1}\right]$$

$$A_{ii}\ddot{q}_i + \cos(q_k - q_i)\left[\delta_k^i (m_i S_i + l_i m_i^*) l_{k+1} + \delta_i^k (m_{k+1}\delta_{k+1} + l_{k+1} m_{k+1}^*)\, l_i \ddot{q}_k +\right.$$

$$\left.\delta_k^i (m_i S_i + l_i m_i^*)\, l_{k+1} + \delta_i^k (m_{k+1} S_{k+1} + l_{k+1} m_{k+1}^*) l_i\right] \sin(q_k - q_i)\, \dot{q}_i^2 +$$

$$\sum_{j=i+1}^{n} \cos(q_i - q_j)(m_j S_j + l_j m_j^*)\, l_i \ddot{q}\, \delta' + \sum_{j=i+1}^{n-1} \sin(q - q_j)(m_i S_i + l_i m_i^*)\, l_j \dot{q}_j^2 +$$

$$\sum_{j=1}^{n} \cos(q_i - q_j)(m_i S_i + l_i m_i^*)\, l_j \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{i-1} \sin(q_j - q_j)(m_j S_i + l_i m_i^*)\, l_j \dot{q}_j^2 = \qquad (2.12)$$

$$M + \sum_{j=i}^{n} M_j + \cos q_i \left[Y_i S_i + l_i (Q + \sum_{j=i+1}^{n} Y_j)\right] + \sin q_i \left[X_i S_i + l_i (P + \sum_{j=i+1}^{n} X_j)\right];$$

ở đó $i \neq k+1$, $\delta_i^k = 0$ khi $k < i$, $\delta_i^k = 1$ khi $k > i$; $\delta_k^i = 1$ khi $k < i$; $\delta_k^j = 0$ khi $k > i$.

$$\left[A_{kk} + A_{k+1,\,k+1} + (m_{k+1} S_{k+1} + l_{k+1} m_{k+1}^*)\, l_k\right] \ddot{q}_k +$$

$$\sum_{j=k+2}^{n} \cos(q_k - q_j)(m_j S_j + l_j m_j^*)(l_k + l_{k+1})\, \ddot{q}_j +$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} \cos(q_k - q_j)(m_k S_k + m_{k+1} S_{k+1} + l_k m_k^* + l_{k+1} m_{k+1}^*)\, l_j \ddot{q}_j +$$

$$\sum_{j=k+2}^{n} \sin(q_k - q_j)(m_j S_j + l_j m_j^*)(l_k + l_{k+1})\, \dot{q}_j^2 +$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} \sin(q_k - q_j)(m_k S_k + m_{k+1} S_{k+1} + l_k m_k^* + l_{k+1} m_{k+1}^*)\, l_j \dot{q}_j^2 = \qquad (2.13)$$

$$M_k + 2(M + \sum_{i=k+1}^{n} M_i) + \cos q_k \left[Y_k S_k + Y_{k+1}(l_k + S_{k+1}) +\right.$$

$$(Q + \sum_{i=k+2}^{n} Y_i)(l_k + l_{k+1})] + \sin q_k [X_k S_k + X_{k+1}(l_k + S_{k+1}) +$$

$$(P + \sum_{i=k+2}^{n} X_i)(l_k + l_{k+1}].$$

Thí dụ 2.

Bây giờ chúng ta khảo sát thí dụ 1 khi kể đến trọng lượng của các khâu. Ngoài ra giả sử rằng chuyển động của hệ ràng buộc bởi liên kết có dạng

$$q_2 - q_1 = 0 \qquad (2.6)'$$

Để viết phương trình chuyển động của hệ chúng ta sử dụng phương trình (2.13), nó có dạng :

$$(A_{11} + A_{22})\ddot{q}_1 = c \sin q_1 ;$$

ở đó,
$$G = G_1 + G_2 ,$$
$$c = [G_1 s_1 + G_2 (l_1 + s_2)] / G,$$

G_1 và G_2 là trọng lượng của các thanh A_1A_2, A_2A_3.

Để xác định các phản lực liên kết chúng ta viết các phương trình (2.10) và (2.11):

$$- m_2(l_1 + S_2)(\sin q_1\ddot{q}_1 + \cos q_1\dot{q}_1^2) = \lambda_1 + G_2 ,$$

$$m_2(l_1 + S_2)(\cos q_1\ddot{q}_1 - \sin q_1\dot{q}_1^2 = \lambda_2$$

$$(A_{12} + A_{22})\ddot{q}_1 = - S_2 \sin q_1 G_2 + \lambda_3.$$

Sau một số phép biến đổi chúng ta thu được :

$$\lambda_1 = - G_2 + m_2 (l_1 + S_2) \sin^2 q_1(\theta^\circ)^{-1} GC - m_2\dot{q}_1^2(l_1 + S_2) \cos q_1 ,$$

$$\lambda_2 = - m_2 (l_1 + S_2) \sin q_1 [(\theta^\circ)^{-1} CG \cos q_1 + \dot{q}_1^2],$$

$$\lambda_3 = G \sin q_1 [S_2G_2G^{-1} - C(\theta^\circ)^{-1} \{m_2S_2(S_2 + l_1) + J_2\}],$$

ở đó ; $\theta^\circ = J_1 + m_1S_1^2 + J_2 + m_2 (l_1 + S_2)^2.$

Dễ dàng thấy rằng λ_1, λ_2 là các thành phần tương ứng thẳng đứng và nằm ngang của phản lực liên kết tại bản lề A_2 và λ_3 là mômen phản lực của liên kết (2.6)'.

Thí dụ 3.

Bài toán xác định các nội lực trong các thanh. Thanh A_1A quay quanh điểm cố định A_1. Hãy xác định các thành phần nội lực tại tiết diện A_2 nằm cách A_1 một đoạn l_1. Độ dài thanh A_1A bằng l.

Chúng ta có thể xem thanh A_1A như một hệ gồm hai thanh A_1A_2 và A_2A nối với nhau nhờ bản lề A và chuyển động của chúng bị ràng buộc bởi liên kết (2.6)', ở đó q_1 và q_2 là góc giữa thanh A_1A_2 và A_2A với trục thẳng đứng A_1x. Như vậy chúng ta có mô hình đã được khảo sát ở thí dụ 2. Nếu ký hiệu M là mômen uốn tại tiết diện A_2 thì dễ dàng có được

$$M = \lambda_3 = G \sin q_1 \{ S_2G_2 / G - C(\theta^\circ)^{-1} [m_2S_2(S_2 + l_1) + J_2]\}.$$

Bây giờ chúng ta xác định lực kéo và lực nén tại tiết diện A_2. Từ kết quả ở thí dụ 2 chúng ta có

$$N = \lambda_2 \sin q_1 + \lambda_1 \cos q_1 = - m_2(l_1 + S_2)\dot{q}_1^2 - G_2 \cos q_1.$$

$$Q = \lambda_2 \cos q_1 - \lambda_1 \sin q_1 = G \sin q_1 [G_2/G - m_2S_2(l_1 + S_2)/\theta^\circ]$$

Cần vạch ra rằng có thể sử dụng phương pháp trên để xác định trạng thái nội lực tại một tiết diện bất kỳ của hệ nhiều thanh, thí dụ, của một cơ cấu tay quay thanh truyền hay của một cơ cấu 4 khâu hoặc một cơ cấu phức tạp hơn. Điều này có thể thực hiện được nhờ tiên đề giải phóng liên kết trong cơ học giải tích.

Địa chỉ :
Đại học Bách khoa

Nhận ngày 17/10/1979

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ЛУРЬЕ А.И. Аналитическая механика. Физматгиз, М., 1961.
2. ДО ШАНЬ. Об определении сил реакции связей. ПММ, Вып. 6. 1975.

SUMMARY

ON THE PROBLEM OF DETERMINATION OF DYNAMICAL REACTION FORCES AND COMPONENTS OF INTERNAL FORCES OF A SYSTEM OF LINKS

In this paper it is presented two problems. By the results of the first problem we obtain a simple method for determinating the hinge reaction forces of a system of n links. Using the results of the second problem it is possible to easily determine the components of internal forces at any section of a certain link.