Tạp chí CƠ HỌC 1981 số 2 (trang 7 - 13)

ẢNH HƯỞNG CỦA THAM SỐ DẠNG XUNG VÀ ĐỘ CHẬM LÊN CHẾ ĐỘ DAO ĐỘNG CỦA HỆ

NGUYỄN KHẮC LÂN

§1. MỞ ĐẦU

DAO động trong hệ có chậm với kích động xung hiện nay vẫn còn ít tác giả đề cập tới. Những kết quả thu được trước đây chỉ xét hệ có chậm mà yếu tố đặc trưng cho kích động xung không phụ thuộc vào độ chậm (chẳng hạn, xem /1/, /2/, v.v...).

Trong bài này dưới một hệ dao động cụ thể, chúng tôi đề cập đến hệ có kích động xung; trong đó đặc trưng của xung lượng phụ thuộc vào độ chậm, đồng thời nghiên cứu ảnh hưởng của xung lượng và độ chậm lên chế độ dao động trong hệ.

Với mục đích trên ta xét phương trình

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2\left[1 - \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - kT)\right] x(t - \varepsilon\Delta) = \varepsilon F\left[x, \frac{dx}{dt}, x(t - \Delta_1), \frac{dx(t - \Delta_1)}{dt}\right] \quad (1.1)$$

tronp đó Δ, $\Delta_1 = \text{const}$ – đặc trưng cho độ chậm của đối số, $\varepsilon \ll 1$, $\delta(t)$ – hàm đenta Dirăc, có các tính chất:

$$f(t)\,\delta(t) = f(o)\,\delta(t), \quad (1.2)$$

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(t)\,dt = \begin{cases} 1 & \text{với } t > 0, \\ 0 & \text{với } t < 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - kT) = \frac{\nu}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\nu t\right] \quad (1.4)$$

trong đó $\nu = \dfrac{2\pi}{T}$. Khi $\varepsilon = 0$ hệ (1.1) có nghiệm dạng

$$x = a\cos\psi, \quad (1.5)$$

$$\dot{x} = -a\omega\sin\psi,$$

ở đây $\psi = \omega t + \theta$, a, θ – các hằng số tùy ý.

Trước hết, từ dạng phương trình (1.1) ta thấy kích động ngoài tuần hoàn là số hạng

$$f_0 = \varepsilon\omega^2 x(t - \varepsilon\Delta) \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (1.6)$$

Để tìm hiện tượng cộng hưởng nào có thể xảy ra trong hệ (1.1) ta tính công trung bình do lực F_0 sinh ra ứng với dịch chuyển (1.5) trong khoảng thời gian đủ lớn. Sau khi tính toán ta thấy rằng trong hệ xảy ra cộng hưởng khi $2\omega \approx k\nu$. Vậy hệ có tính chất như trong bài toán «dao động tham số» cổ điển: Với kích động tham số hệ có cộng hưởng phân cấp $\frac{1}{2}$. Sau đây ta chỉ xét chế độ cộng hưởng đó.

§ 2. XÂY DỰNG NGHIỆM GẦN ĐÚNG.

Xét cộng hưởng

$$\omega \approx \left(p\frac{\nu}{2}\right) \tag{2.1}$$

Trong đó p — số nguyên nào đó. Ta trình bày sơ đồ tìm nghiệm gần đúng cấp một của phương trình (1.1). Đối với phương trình (1.1) ta thực hiện phép đổi biến

$$x = a\cos\left(p\frac{\nu}{2}t + \theta\right) \tag{2.2}$$

$$\dot{x} = -ap\frac{\nu}{2}\sin\left(p\frac{\nu}{2}t + \theta\right)$$

ở đây a, θ là các biến mới, khi đó phương trình (1.1) được đưa về phương trình tương đương. Ở gần đúng thứ nhất đối với tham số ε, các hàm số $a(t)$, $\theta(t)$ xác định từ phương trình

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon\Delta\left(p\frac{\nu}{2}\right)^2 a\sin^2\varphi - \frac{\varepsilon\omega^2 a}{p\nu}\sin 2\varphi\sum_{k=1}^{\infty}\delta(t-kT) +$$

$$\left(\omega - p\frac{\nu}{2}\right)a\sin 2\varphi - \frac{2\varepsilon}{p\nu}F_0\sin\varphi \equiv A_1(a,\varphi,t), \tag{2.3}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\varepsilon\Delta}{2}\left(p\frac{\nu}{2}\right)^2\sin 2\varphi - \frac{2\varepsilon\omega^2}{p\nu}\cos^2\varphi\sum_{k=1}^{\infty}\delta(t-kT) +$$

$$2\left(\omega - p\frac{\nu}{2}\right)\cos^2\varphi - \frac{2\varepsilon}{ap\nu}F_0\cos\varphi \equiv B_1(a,\varphi,t)$$

rong đó $F_0 = F\left[a\cos\varphi, -ap\frac{\nu}{2}\sin\varphi, a\cos\left(\varphi - p\frac{\nu}{2}\Delta_1\right), -ap\frac{\nu}{2}\sin\left(\varphi - p\frac{\nu}{2}\Delta_1\right)\right]$

$$\varphi = p\frac{\nu}{2}t + \theta$$

Lấy trung bình vế phải hệ (2.3) theo thời gian, ta được

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon\Delta}{2}\left(p\frac{\nu}{2}\right)^2 a - \frac{\varepsilon\omega^2 a}{2p\pi}\sin 2\theta - \frac{\varepsilon b_1(a)}{p\nu} \equiv A_0(a,\theta), \tag{2.4}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega - p\frac{\nu}{2} - \frac{\varepsilon\omega^2}{2p\pi}(1+\cos 2\theta) - \frac{\varepsilon a_1(a)}{ap\nu} \equiv B_0(a,\theta),$$

ở đây $a_1(a)$, $b_1(a)$ là hệ số điều hòa cấp một trong khai triển Fourier của hàm F_0.

Vậy nghiệm gần đúng cấp một của phương trình (1.1) được xác định theo công thức

$$x = a\cos\left(p\frac{\nu}{2}t + \theta\right) \tag{2.5}$$

a, θ thỏa mãn phương trình (2.4). Như vậy ở gần đúng thứ nhất chưa thấy được hiện tượng do xung lượng gây nên, để thấy được hiện tượng này cần tìm nghiệm ở gần đúng cấp một hoàn thiện, tức là trong biểu thức (2.5) thay a, θ bằng a_1, θ_1 với $a_1 = \bar{a} + a$, $\theta_1 = \theta + \bar{\theta}$, trong đó $\bar{a}$, $\bar{\theta}$ là nghiệm của phương trình

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = A_1(a, \varphi, t) - A_0(a, \theta),$$
$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = B_1(a, \varphi, t) - B_0(a, \theta), \qquad (2.6)$$

khi phân tích (2.6) a, θ coi như hằng số.

Để thấy rõ nét ảnh hưởng của xung lượng và độ chậm lên chế độ dao động ta xét các trường hợp riêng.

§ 3. HỆ TUYẾN TÍNH CÓ CẢN

Xét hệ có cản thực sự, trong trường hợp đó

$$F = -\alpha \frac{dx}{dt} \qquad (3.1)$$

Hệ phương trình trung bình có dạng

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon\Delta}{2}\left(P\frac{\nu}{2}\right)^2 a - \frac{\varepsilon\alpha a}{2} - \frac{\varepsilon\omega^2 a}{2P\pi}\sin 2\theta,$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \omega - P\frac{\nu}{2} - \frac{\varepsilon\omega^2}{2P\pi}(1 + \cos 2\theta). \qquad (3.2)$$

Để tìm dao động không dừng trong hệ, ta tích phân phương trình (3.2), đặt

$$u = a\cos\theta,$$
$$v = a\sin\theta, \qquad (3.3)$$

hệ (3.2) được thay bằng hệ phương trình vi phân tuyến tính với hệ số không đổi:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\varepsilon}{2}\left[\Delta\left(P\frac{\nu}{2}\right)^2 - \alpha\right]u - \left(\omega - P\frac{\nu}{2}\right)v,$$
$$\frac{dv}{dt} = \left(\omega - P\frac{\nu}{2} - \varepsilon\frac{\omega^2}{P\pi}\right)u + \frac{\varepsilon}{2}\left[\Delta\left(P\frac{\nu}{2}\right)^2 - \alpha\right]v. \qquad (3.4)$$

Phương trình đặc trưng của hệ (3.4) có dạng

$$\lambda^2 - \varepsilon\left[\Delta\left(P\frac{\nu}{2}\right)^2 - \alpha\right]\lambda + \left(\omega - P\frac{\nu}{2}\right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}\left[\Delta\left(P\frac{\nu}{2}\right)^2 - \alpha\right]^2 - \varepsilon\frac{\omega^2}{P\pi}\left(\omega - P\frac{\nu}{2}\right) = 0. \qquad (3.5)$$

nghiệm của (3.5) là

$$\lambda_{1,2} = \frac{\varepsilon}{2}\left[\Delta\left(P\frac{\nu}{2}\right)^2 - \alpha\right] \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon\omega^2}{P\pi}\left(\omega - P\frac{\nu}{2}\right) - \left(\omega - P\frac{\nu}{2}\right)^2}. \qquad (3.6)$$

Từ đó ta có thể tìm được $u(t)$ và $v(t)$. Cuối cùng biên độ và pha của dao động tính theo công thức

$$a^2 = u^2 + v^2$$
$$\theta = \mathrm{arctg}(v/u) \qquad (3.7)$$

Giá trị biên độ và pha dao động ở gần đúng cấp một hoàn thiện được biểu diễn bằng công thức sau

$$a_1 = a - \frac{\varepsilon\Delta a}{2p\nu}\left(P\frac{\nu}{2}\right)^2 \sin(P\nu t + 2\theta) - \frac{\varepsilon\omega^2 a}{P\pi}\sin 2\theta \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\nu t}{k\nu}$$

$$-\left(\omega - P\frac{\nu}{2}\right)\frac{a}{P\nu}\cos(P\nu t + 2\theta) - \frac{\varepsilon a}{4P\nu}\sin(P\nu t + 2\theta), \qquad (3.8)$$

$$\theta_1 = \theta - \frac{\varepsilon\Delta}{2P\nu}\left(P\frac{\nu}{2}\right)^2\cos(P\nu t + 2\theta) + \left(\omega - P\frac{\nu}{2}\right)\frac{1}{P\nu}\sin(P\nu t + 2\theta)$$

$$-\frac{\varepsilon\omega^2}{P\pi}(1 + \cos 2\theta)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\nu t}{k\nu} + \frac{\varepsilon}{4P\nu}\cos(P\nu t + 2\theta).$$

Thế a_1, θ_1 vào vị trí của a, θ trong (2.2) ta được nghiệm gần đúng cấp một hoàn thiện Sau một số tính toán ta có

$$x(kT + o) - x(kT - o) \equiv 0, \qquad (3.9)$$

$$\dot{x}(kT + o) - \dot{x}(kT - 0) = (-1)^{pk}\,\varepsilon\omega^2 a(kT)\cos[\theta(kT)].$$

p — là số nguyên nào đó, $k \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (3.10)

Nhận xét:

a) Từ (3.6), (3.7) ta thấy rằng nếu hệ không có cản ($\alpha = 0$) thì ít nhất có một nghiệm λ với Re $\lambda > 0$, do đó biên độ a biến đổi chậm và tăng theo luật số mũ. Trong hệ có hiện tượng tự kích động. Ta thấy rằng độ chậm gây ra cộng hưởng tham số trong hệ với mọi giá trị của tần số ν; điều này khác với hệ không có chậm vì trong hệ không có chậm hiện tượng cộng hưởng chỉ xảy ra đối với giá trị ν nằm trong một khoảng nào đó (xem [3]). Điều này cho phép ta có thể kết luận rằng độ chậm trong hệ (1.1) bổ sung năng lượng cho hệ và dao động được tăng cường.

b) Từ (3.2) ta thấy, nếu trong hệ có cản và hệ số cản thỏa mãn điều kiện

$$\frac{\alpha}{\Delta} = \left(P\frac{\nu}{2}\right)^2 \qquad (3.11)$$

thì cộng hưởng tham số xảy ra với tần số ν ở trong khoảng

$$\frac{2\omega}{P}\left(1 - \frac{2\omega}{P\pi}\right) < \nu < \frac{2\omega}{P} \qquad (3.12)$$

Kết quả này trùng với kết quả trong hệ không có cản và không có chậm (xem [3]). Vậy năng lượng tiêu hao do lực cản trong hệ (1.1) được bù đắp bởi năng lượng do có độ chậm gây nên.

c) Nếu $$\frac{\alpha}{\Delta} > \left(P\frac{\nu}{2}\right)^2$$

và ν nằm ở ngoài khoảng (3.12) trong hệ có chế độ dao động tắt dần.

d) Từ (3.9) và (3.10) ta thấy rằng do ảnh hưởng của xung, ở thời điểm có tác dụng xung $t_k = kT$ nghiệm x(t) liên tục và đạo hàm $\dot{x}(t)$ có bước nhảy hữu hạn $\varepsilon\omega^2 a(kT)\cos\theta(kT)$. Nếu phương trình (1.1) mô tả chuyển động của hệ cơ thì dịch chuyển là liên tục và vận tốc có bước nhảy tại thời điểm xung lượng tác dụng.

§ 4. HỆ CÓ TỰ KÍCH ĐỘNG

Trong trường hợp này

$$F = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 x(t-\Delta_1) \tag{4.1}$$

Hệ trung bình có dạng

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon\left[\frac{\Delta a}{2}\left(P\frac{\nu}{2}\right)^2 - \frac{3}{8}a^3P\nu\sin P\frac{\nu}{2}\Delta_1\right] - \frac{\varepsilon\omega^2 a}{2P\pi}\sin 2\theta, \tag{4.2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega - P\frac{\nu}{8}a^2P\nu\cos P\frac{\nu}{2}\Delta_1 - \frac{\varepsilon\omega^2}{2P\pi}(1+\cos 2\theta)$$

Vậy nghiệm của hệ (1.1), (4.1) trong gần đúng thứ nhất được tính theo công thức

$$x = a\cos\left(P\frac{\nu}{2}t + \theta\right),$$

trong đó a và θ xác định từ hệ phương trình (4.2). Nếu ta tìm nghiệm gần đúng thứ nhất hoàn thiện của biên độ a_1 và pha θ_1, ta cũng xác định được ảnh hưởng của xung lên chế độ dao động và kết quả trùng với (3.9), (3.10). Ở đây ta chỉ quan tâm đến việc tìm nghiệm dừng của hệ (4.2).

Cho vế phải phương trình (4.2) bằng không, ta được phương trình để xác định biên độ và pha của dao động dừng như sau

$$\varepsilon\left[\frac{\Delta a}{2}\left(P\frac{\nu}{2}\right)^2 - \frac{3}{8}a^3P\nu\sin P\frac{\nu}{2}\Delta_1\right] - \frac{\varepsilon\omega^2 a}{2P\pi}\sin 2\theta = 0$$

$$\omega - P\frac{\nu}{2} - \frac{\varepsilon}{8}a^2P\nu\cos P\frac{\nu}{2}\Delta_1 - \frac{\varepsilon\omega^2}{2P\pi}(1+\cos 2\theta) = 0 \tag{4.3}$$

Để tìm đường cong biên độ, ta khử θ từ hệ (4.3) và sau một số tính toán nhận được

$$Aa^4 + Ba^2 + C = 0 \tag{4.4}$$

trong đó ký hiệu

$$A = \frac{1}{16}\left(P\frac{\nu}{2}\right)^2\left[\cos^2 P\frac{\nu}{2}\Delta_1 + 9\sin^2 P\frac{\nu}{2}\Delta_1\right],$$

$$B = -\left[\frac{3}{8}P\nu\Delta\left(P\frac{\nu}{2}\right)^2\sin P\frac{\nu}{2}\Delta_1 + \left(\frac{\alpha}{\omega + P\frac{\nu}{2}} - \frac{\omega^2}{2P\pi}\right)P\frac{\nu}{4}\cos P\frac{\nu}{2}\Delta_1\right];$$

$$C = \left[\frac{\Delta}{2}\left(P\frac{\nu}{2}\right)^2\right]^2 + \left[\frac{\omega}{\omega + P\frac{\nu}{2}} - \frac{\omega^2}{2P\pi}\right]^2 - \frac{\omega^4}{4(P\pi)^2},$$

và α tính theo hệ thức

$$\frac{\omega - P\frac{\nu}{2}}{\varepsilon} = \frac{\alpha}{\omega + P\frac{\nu}{2}}.$$

Giải (4.4) ta thu được

$$a_{1,2}^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Để tồn tại nghiệm $a_1^2 = \dfrac{-B + \sqrt{B^2-4AC}}{2A}$ các tần số phải thỏa mãn điều kiện

$$\omega - P\frac{\nu}{2} > 0 \tag{4.5}$$

Như vậy trong hệ khảo sát, tồn tại chế độ dừng khác không thì các tần số phải thỏa mãn điều kiện (4.5).

Bây giờ ta tìm giá trị dừng của biên độ và pha, và nghiên cứu sự ổn định của chúng.

Giải hệ (4.3) ta nhận được hai nghiệm sau

$$a_1^* = 0$$

θ_1^* thỏa mãn phương trình

$$\frac{\varepsilon\omega^2}{2P\pi}\cos 2\theta_1^* = \omega - P\frac{\nu}{2} - \frac{\varepsilon\omega^2}{2P\pi},$$

và

$$a_2^* = \sqrt{\frac{\Delta\left(P\frac{\nu}{2}\right)^2 - \frac{\omega^2}{P\pi}\sin 2\theta_2^*}{3P\nu\sin P\frac{\nu}{2}\Delta_1}}$$

θ_2^* thỏa mãn phương trình

$$\omega - P\frac{\nu}{2} - \frac{\varepsilon\omega^2}{2P\pi}(1+\cos 2\theta) - \frac{\varepsilon\Delta}{6}\left(P\frac{\nu}{2}\right)^2\operatorname{cotg}P\frac{\nu}{2}\Delta_1 + \frac{\varepsilon\omega^2}{6}\operatorname{cotg}P\frac{\nu}{2}\Delta_1\sin 2\theta = 0 \tag{4.6}$$

Đối với nghiệm (a_1^*, θ_1^*) hệ không ổn định. Nếu các hệ số thỏa mãn hệ thức

$$\Delta\left(P\frac{\nu}{2}\right)^2 > \frac{\omega^2}{P\pi} \tag{4.7}$$

thì trong hệ có chế độ tự kích động.

Nghiên cứu ổn định của nghiệm thứ hai. Sau một loạt tính toán ta nhận được điều kiện ổn định của nghiệm thứ hai (a_2^*, θ_2^*) là

$$\frac{2\omega^2}{P\pi}\sin 2\theta_2^* < \Delta\left(P\frac{\nu}{2}\right)^2, \tag{4.8}$$

$$2\sin 2\theta_2^* + \frac{1}{3}\operatorname{cotg}\left(P\frac{\nu}{2}\Delta_1\right)\cos 2\theta_2^* < 0$$

Để xét ổn định của nghiệm này cần giải phương trình (4.6) đây là một phương trình khó giải, nói chung phải giải bằng số. khi tìm được a_2^*, θ_2^* thế vào (4.8) nếu nó thỏa mãn thì nghiệm đó ổn định. Tuy nhiên ta có thể chỉ ra rằng nếu các tham số của hệ thỏa mãn các hệ thức nào đấy thì phương trình (4.6) có nghiệm, đối với nghiệm đó thỏa mãn điều kiện $\sin 2\theta_2^* < 0$, $\cos 2\theta_2^* < 0$ và $\operatorname{cotg}\left(P\frac{\nu}{2}\Delta_1\right) > 0$. Nghiệm này thỏa mãn điều kiện (4.8), do đó ổn định.

Vậy có thể kết luận rằng, nếu

$$\Delta\left(P\frac{\nu}{2}\right)^2 > \frac{\omega^2}{P\pi}, \quad \omega > P\frac{\nu}{2}$$

và các tham số của hệ thỏa mãn một số điều kiện nào đấy, thì trong hệ có tự dao động.

§ 5. KẾT LUẬN

Ảnh hưởng của tham số dạng xung lên hệ có chậm cũng như trong hệ thông thường, tức là xung lượng gây ra biến đổi bước nhảy đối với tốc độ tại thời điểm kích động xung, còn dịch chuyển vẫn biến thiên liên tục tại các thời điểm ấy.

Nếu ta thay đổi giá trị của độ chậm thì trong hệ có thể có chế độ tự dao động, dao động tắt dần hoặc dao động dừng Như vậy muốn có một chế độ dao động nào đó, ta có thể điều chỉnh độ chậm của đối số

Địa chỉ :
Đại học Tổng hợp

Nhận ngày 29/6/1980

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. НГУЕН КХАК ЛАН. УМЖ, 28, N^o 6, 1976.
2. ЦЫДЫЛО К.В. В сб. « Дифференциально-разностные уравнения » Киев. 1971.
3. ДЗЫРА Б.И., ИШУС В.В. В сб « Приближенные методы исследования нелинейных систем ». Киев. 1976.

РЕЗЮМЕ

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРА ИМПУЛЬСНОГО ТИПА И ЗАПАЗДЫВАНИЯ НА КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ РЕЖИМ СИСТЕМ.

В настоящей работе с помощью метода усреднения излагается построение приближенного решения уравнения (1.1), после того изучено влияние импульса и запаздывания на параметрические колебания линейной системы при затухании и нелинейной системе с автовозбуждением. Получены выводы :

Для системы под возбуждением импульса и колебания системы непрерывны, их скорость изменяется скачкообразно со скачками в момент импульса ;

Если изменяем значения запаздывания, то в системе могут находиться автоколебания, затухающие колебания или стационарные колебания. Поэтому для наличия необходимых колебаний можно регулировать запаздывание аргумента.