

HIỆN TƯỢNG ỔN ĐỊNH QUAN LIÊN TRONG HỆ Á TUYẾN HAI BẬC TỰ DO CÓ KÍCH ĐỘNG CƯỜNG BỨC

NGUYỄN VĂN ĐÌNH

CHÚNG ta đã khảo sát hiện tượng ổn định quan liên trong hệ á tuyến tự chấn và thông số hai bậc tự do [1]. Dưới đây, xét trường hợp những hệ trên khi chịu thêm kích động cưỡng bức. Đặc điểm của trường hợp này là các kích động tự chấn và thông số không thể gây được những dao động « thuần » tương ứng; tuy nhiên, bằng xu thế dao động tạo ra, chúng vẫn ảnh hưởng đến tính ổn định của các chế độ dao động xảy ra trong hệ.

§1. HỆ TỰ CHẤN — CƯỜNG BỨC KHÔNG CỘNG HƯỞNG

Khảo sát hệ thuần tự chấn ở [1] nhưng khối lượng thứ nhất chịu thêm kích động cưỡng bức không cộng hưởng $f_1 \sin t$ (f_1 — biên độ, 1 — tần số). Hệ phương trình vi phân dao động là:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 - c_{12}) \dot{x}_1 - c_{12} x_2 &= f_1 \sin t + g_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_{12} \dot{x}_1 + (c_2 + c_{12}) x_2 &= g_2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

trong đó: g_1, g_2 — các hàm số có biểu thức như ở §1 [1].

Chúng ta lần lượt xét: — chế độ dao động thuần cưỡng bức (các kích động tự chấn không gây dao động); — chế độ dao động hỗn hợp gồm thành phần cưỡng bức và thành phần tự chấn tần số p_1 (kích động tự chấn đặt trên tần số p_2 không gây dao động); — chế độ hỗn hợp gồm thành phần cưỡng bức và thành phần tự chấn tần số p_2 (kích động tự chấn đặt trên tần số p_1 không gây dao động).

a) Dao động thuần cưỡng bức — Ở xấp xỉ thứ nhất, chúng ta có:

$$x_{10} = a_0 \sin t; \quad x_{20} = b_0 \sin t \quad (1.2)$$

trong đó:

$$a = \frac{1}{\Delta} f_1 (c_{12} + c_2 - m_2); \quad b_0 = \frac{1}{\Delta} f_1 c_{12}$$

$$\Delta = (c_1 + c_{12} - m_1)(c_2 + c_{12} - m_2) - c_{12}^2$$

Để khảo sát ổn định, đặt:

$$x_1 = x_{10} + y_1; \quad x_2 = x_{20} + y_2 \quad (1.3)$$

Hệ phương trình vi phân dao động trở thành:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 + (c_1 + c_{12}) \dot{y}_1 - c_{12} y_2 &= \overline{g}_1 \\ m_2 \ddot{y}_2 - c_{12} \dot{y}_1 + (c_2 + c_{12}) y_2 &= \overline{g}_2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

trong đó: $\overline{g}_1, \overline{g}_2$ — các hàm g_1, g_2 sau khi biến đổi.

Tương ứng chế độ thuận cưỡng bức của hệ (1.1) là chế độ cân bằng của hệ (1.1). Để khảo sát chế độ này, đặt:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_1 \sin p_1 t + b_1 \cos p_1 t; \quad y_1 = p_1 (a_1 \cos p_1 t - b_1 \sin p_1 t) \\ y_2 &= a_2 \sin p_2 t + b_2 \cos p_2 t; \quad y_2 = p_2 (a_2 \cos p_2 t - b_2 \sin p_2 t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Tiến hành trung bình hóa như đã biết, kết quả cho các điều kiện ổn định:

$$1 - H_1 - 2A_0 < 0; \quad 1 - H_2 - 2A_0 < 0 \quad (1.6)$$

trong đó: H_1, H_2 - các lực cản đã biết [1] §1; $A_0 = \frac{3}{4} k a_0^2$

So sánh với các điều kiện ổn định của chế độ cân bằng khi không có kích động cưỡng bức, dễ dàng nhận thấy chế độ thuận cưỡng bức đã tạo ra lực cản $2A_0$ trên mỗi xu thế tự chấn. Nếu các lực cản tổng hợp $H_1 + 2A_0, H_2 + 2A_0$ mạnh hơn lực kích động l , các xu thế tự chấn mất, chế độ thuận cưỡng bức sẽ ổn định.

b) Dao động hỗn hợp với thành phần tự chấn - Tiến hành khảo sát hệ (1.4) như ở [1] §1, kết quả cho thấy:

- Dao động hỗn hợp với thành phần tự chấn có tần số p_1 có biên độ a_1 (ở tọa độ pháp) xác định từ hệ thức:

$$A_1 = \frac{3}{4} k p_1^2 a_1^2 = l - H_1 - 2A_0 \quad (1.7)$$

và có các điều kiện ổn định:

$$l - H_1 - 2A_0 > 0 \quad (\text{Trùng điều kiện tồn tại}) \quad (1.8)$$

$$l - H_2 - 2A_0 - 2A_1 < 0 \quad \text{hay} \quad A_1 > \frac{1}{2} (l - H_2 - 2A_0) \quad (1.9)$$

- Dao động hỗn hợp với thành phần tự chấn có tần số p_2 có biên độ a_2 (ở tọa độ pháp) xác định từ hệ thức:

$$A_2 = \frac{3}{4} k p_2^2 a_2^2 = l - H_2 - 2A_0 \quad (1.10)$$

và có các điều kiện ổn định:

$$l - H_2 - 2A_0 > 0 \quad (\text{trùng điều kiện tồn tại}) \quad (1.11)$$

$$l - H_1 - 2A_0 - 2A_2 < 0 \quad \text{hay} \quad A_2 > \frac{1}{2} (l - H_1 - 2A_0) \quad (1.12)$$

Dễ dàng nhận ra: (1.8), (1.11) là các điều kiện ổn định tự thân; (1.9), (1.12) - các điều kiện ổn định quan liên.

Trong các điều kiện sau, $2A_0 + 2A_1(2A_0 + 2A_2)$ là lực cản bổ sung mà các thành phần của chế độ hỗn hợp thứ nhất (hai) đặt trên xu thế tự chấn thứ hai (nhất).

§2. HỆ TỰ CHẤN CƯỜNG BỨC CỘNG HƯỞNG

a) Cộng hưởng chính. Giả thiết $p_1 \approx 1$. Viết hệ phương trình vi phân dao động dưới dạng có độ cứng dư như ở [1] §3 trong đó thay kích động thông số $(-2f_1 x_1 \sin 2t)$ bởi kích động cưỡng bức $(f_1 \sin t)$. Tương tự, tiến hành khảo sát chế độ dao động tần số 1 của riêng tọa độ pháp thứ nhất (kích động tự chấn đặt trên tọa độ pháp thứ hai không gây dao động). Kết quả cho hệ thức xác định biên độ a_1 (ở tọa độ pháp):

$$W = \{Z_1^2 + [(l - H_1) - A_1]^2\} A_1 - F_1^2 = 0 \quad (2.1)$$

trong đó:

$$A = \frac{3}{4} k a_1^2; \quad F_1^2 = \frac{3}{4} k f_1^2$$

Điều kiện ổn định tự thân là:

$$l - H_1 - 2A_1 < 0 \quad \text{hay} \quad A_1 > \frac{1}{2} (l - H_1)$$

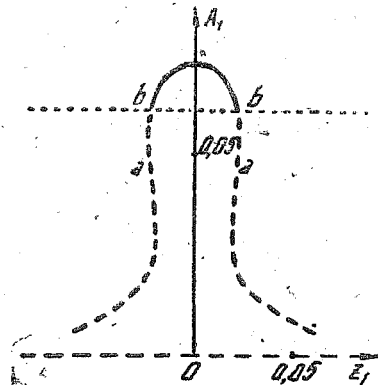
$$Z_1^2 + (l - H_1 - A_1)(l - H_1 - 3A_1) = \frac{\partial W}{\partial A_1} > 0 \quad (2.2)$$

Điều kiện ổn định quan liên:

$$l - H_2 - 2A_1 < 0 \quad \text{hay} \quad A_1 > \frac{1}{2} (l - H_2) \quad (2.3)$$

Số hạng $2A_1$ cũng được giải thích như lực cân bằng mà chế độ khảo sát đặt trên xu thế tự chấn tần số p_2 .

Chọn trị số các khối lượng và độ cứng như ở [1] §1; chọn $l = 0,035$; $h_1 = 0,02$; $h_2 = 0,048$; $h_{12} = 0,088$; $F_1^2 = 0,000028$. Trên hình 1, vẽ đồ thị biên độ A_1 theo Z_1 ; đường liền (đứt) nét tương ứng chế độ định (không ổn định); đường chấm nằm ngang là biên giới của điều kiện ổn định quan liên (2.3). Chúng ta thấy, do điều kiện ổn định quan liên, vùng mất ổn định đã mở rộng (các đoạn ab)



Hình 1

b) Cộng hưởng bội. Giả thiết $p_1 \approx 1$, còn lực kích động có tần số bằng $\frac{1}{3}$. Viết hệ phương trình vi phân

dao động dưới dạng như (1.1) §1 nhưng có độ cứng dư và giả thiết điều chỉnh các độ cứng này sao cho chỉ mình tần số riêng p_1 biến thiên. Xét chế độ hỗn hợp gồm thành phần cưỡng bức không cộng hưởng với thành phần tự chấn - cưỡng bức cộng hưởng tần số 1 (kích động tự chấn đặt trên tần số p_2 không gây dao động). Sau khi đổi biến để loại thành phần cưỡng bức không cộng hưởng, việc khảo sát tiến hành như đã quen biết. Kết quả cho hệ thức xác định biên độ a_1 (ở tọa độ pháp) của thành phần tự chấn - cưỡng bức cộng hưởng

$$W = \left\{ Z_1^2 + [(l - H_1 - 2A_0) - A_1]^2 \right\} A_1 - \frac{1}{9} A_0^3 = 0 \quad (2.4)$$

trong đó: $A_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{k}{9} \cdot a_0^2$ (a_0 - biên độ thành phần cưỡng bức không cộng hưởng của x_1); $A_1 = \frac{3}{4} k a_1^2$

Các điều kiện ổn định tự thân:

$$l - H_1 - 2A_0 - 2A_1 < 0 \quad \text{hay} \quad A_1 > \frac{1}{2} (l - H_1 - 2A_0)$$

$$Z_1^2 + (l - H_1 - 2A_0 - A_1)(l - H_1 - 2A_0 - 3A_1) = \frac{\partial W}{\partial A_1} > 0 \quad (2.5)$$

Điều kiện ổn định quan liên:

$$l - H_2 - 2A_0 - 2A_1 < 0 \quad \text{hay} \quad A_1 > \frac{1}{2} (l - H_2 - 2A_0) \quad (2.6)$$

Cách giải thích vẫn tương tự; chú ý rằng lực cân bằng cũng có hai thành phần. Đồ thị biên — tần cũng dạng ở cộng hưởng chính.

c) Cộng hưởng ước. Giả thiết $p_1 \approx 1$ còn lực kích động cưỡng bức có tần số 3. Kết quả khảo sát cho thấy:

— Dao động thuần cưỡng bức không cộng hưởng (các kích động tự chấn không gây dao động) Đó là dao động tần số 3, ổn định khi:

$$l - H_1 - 2A_0 < 0 \text{ hay } A_0 > \frac{1}{2} (l - H_1)$$

$$l - H_2 - 2A_0 < 0 \text{ hay } A_2 > \frac{1}{2} (l - H_2) \quad (2.7)$$

trong đó: $A_0 = \frac{3}{4} ka_0^2$ (a_0 — biên độ dao động thuần cưỡng bức của tọa độ x_1).

— Dao động hỗn hợp với thành phần tự chấn — thông số cộng hưởng (kích động tự chấn đặt trên tần số p_2 không gây dao động) — tần số của thành phần dao động thứ hai là 1; biên độ a_1 (ở tọa độ pháp) xác định từ hệ thức:

$$W = A_1 \{ (l - H_1 - 2A_0 - A_1)^2 + Z_1^2 - A_0 A_1 \} = 0 \quad (2.8)$$

trong đó: $A_1 = \frac{3}{4} ka_1^2$

Các điều kiện ổn định tự thân:

$$l - H_1 - 2A_0 - 2A_1 < 0 \text{ hay } A_1 > \frac{1}{2} (l - H_1 - 2A_0) \quad (2.9)$$

$$- \{ Z_1^2 (l - H_1 - 2A_0 - 2A_1) (l - H_1 - 2A_0 + A_1) \} = \frac{\partial W}{\partial A_1} > 0 \quad (2.9)$$

Điều kiện ổn định quan liên:

$$l - H_2 - 2A_0 - 2A_1 < 0 \text{ hay } A_1 > \frac{1}{2} (l - H_2 - 2A_0) \quad (2.10)$$

— Dao động hỗn hợp với thành phần tự chấn tần số p_2 (kích động tự chấn — thông số trên tần số thứ nhất không gây dao động). Biên độ a_2 (ở tọa độ pháp) xác định từ hệ thức:

$$A = \frac{3}{4} kp_2^2 a_2^2 = l - H_2 - 2A_0 \quad (2.11)$$

Điều kiện ổn định tự thân:

$$l - H_2 - 2A_0 < 0 \text{ hay } A_0 > \frac{1}{2} (l - H_2) \quad (2.12)$$

Điều kiện ổn định quan liên:

$$l - H_1 - 2A_0 - 2A_2 < 0 \text{ hay } A_2 > \frac{1}{2} (l - H_1 - 2A_0) \quad (2.13)$$

Cách giải thích vẫn như cũ. Đồ thị có dạng như [1] §3.

§ 3. HỆ THÔNG SỐ — CƯỜNG BỨC

— Chúng ta xây dựng hệ hỗn hợp thông số — cường bức bằng cách đặt vào khối lượng m_1 lực kích động cường bức $f_1 \sin t$, đồng thời kích động lò xo giữ khối lượng đó để tạo ra độ cứng bổ sung $2f_2 \sin 2U_2 t$ cộng hưởng với tần số riêng thứ hai $p_2 \approx U_2$. Xét các trường hợp:

a) *Kích động cường bức không cộng hưởng* — Hệ phương trình vi phân dao động có dạng:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_{12}) x_1 - c_{12} x_2 &= f_1 \sin t + \varepsilon \{ -(h_1 + h_{12}) \dot{x}_1 + h_{12} \dot{x}_2 - k_1 x_1^3 - 2f_2 x_1 \sin 2U_2 t \} \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_{12} x_1 + (c_2 + c_{12}) x_2 &= \varepsilon \{ h_{12} \dot{x}_1 - (h_2 + h_{12}) \dot{x}_2 \}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Khảo sát chế độ cường bức thuận (kích động thông số không gây dao động), kết quả cho điều kiện ổn định quan liên là:

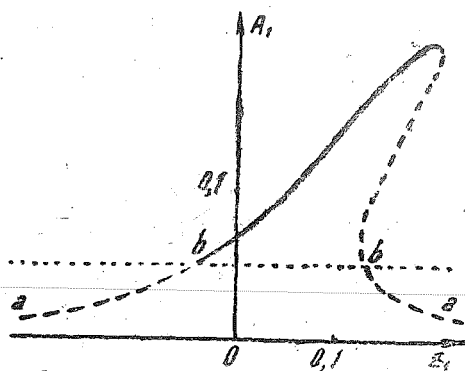
$$f_2^2 - [H_2^2 U_2^2 + (Z_2 - 2A_0)^2] < 0 \quad (3.2)$$

trong đó: $A_0 = \frac{3}{4} k a_0^2$ (a_0 — biên độ dao động thuận cường bức của x_1); các ký hiệu khác có ý nghĩa đã biết.

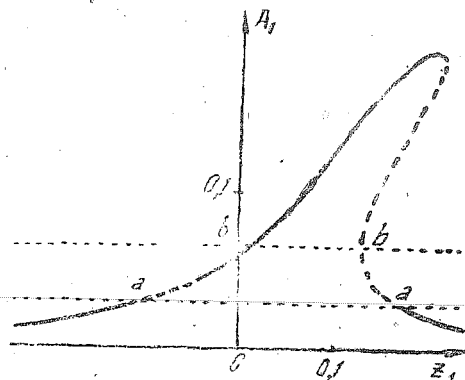
b) *Kích động cường bức cộng hưởng chính*. giả thiết $p_1 \approx 1$. Đưa kích động cường bức vào nhóm số hạng chứa tham số bé và viết hệ phương trình vi phân dao động dưới dạng có độ cứng dư với giả thiết điều chỉnh chúng sao cho chỉ tần số riêng thứ nhất biến thiên. Theo phương pháp đã biết, khảo sát chế độ dao động cộng hưởng đơn tần với tần số 1 (kích động thông số không gây dao động). Biên độ dao động vẫn được xác định bởi hệ thức (2.1). Điều kiện ổn định quan liên là:

$$f_2^2 - [H_2^2 U_2^2 + (Z_2 - 2A_1)^2] < 0 \quad (3.3)$$

Vẫn chọn trị số các khối lượng và các độ cứng như cũ. Chọn $h_1 = 0,01$; $h_2 = 0$; $h_{12} = 0,04$; $F_1^2 = \frac{3}{4} k f_1^2 = 0,0005$; $f_2^2 = 0,0625$. Trên hình 2, vẽ đồ thị các biên độ A_1 khi $Z_2 = 0$; trên hình 3 — $Z_2 = 0,1$. Các đường chấm nằm ngang là biên giới của điều kiện ổn định quan liên (3.3). Chúng ta cũng thấy xuất hiện vùng mất ổn định do điều kiện ổn định quan liên) (các đoạn ab).

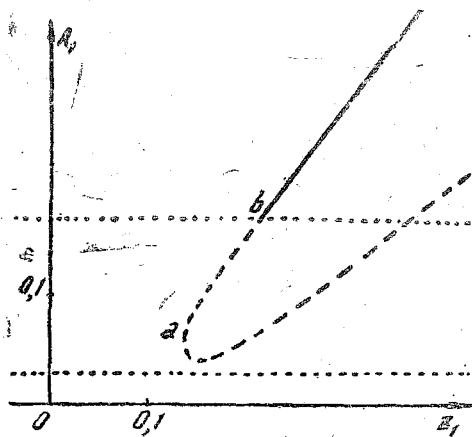


Hình 2



Hình 3

c) Kích động cưỡng bức cộng hưởng bậc - Giả thiết $p_1 \approx 1$ và kích động cưỡng bức có tần số $\frac{1}{3}$. Khảo sát chế độ dao động gồm hai thành phần: cưỡng bức không cộng hưởng



Hình 4

(tần số $\frac{1}{3}$) và cộng hưởng (tần số 1) (kích động thông số không gây dao động). Kết quả khảo sát tương tự trường hợp cộng hưởng chính với chú ý: - đồ thị biên - tần A_1 lệch sang phải theo trục Z_1 đoạn $2A_0$; - trong điều kiện ổn định quan liên (3.3), thay $2A_1$ bởi $2A_1 + 2A_0$ ($A = \frac{3}{4} ka_0^2$; a_0 - biên độ dao động thành phần cưỡng bức không cộng hưởng của x_1).

d) Kích động cưỡng bức cộng hưởng, bậc. Giả thiết $p_1 \approx 1$ và kích động cưỡng bức có tần số 3. Khảo sát hai chế độ dao động trong đó kích động thông số không gây dao động:

- Dao động cưỡng bức không cộng hưởng. Điều kiện ổn định quan liên vẫn có dạng (3.3) nhưng thay $2A_1$ bởi $2A_0$.

- Dao động cưỡng bức gồm hai thành phần không cộng hưởng (tần số 3) và cộng hưởng (tần số 1). Điều kiện ổn định quan liên có dạng (3.3) nhưng thay $2A_1$ bởi $2A_0 + 2A_1$ (A_0 vẫn có biểu thức cũ).

Vẫn chọn trị số các khối lượng và các độ cứng như cũ. Chọn $A_0 = 0,05$; $h_1 = 0,01$; $h_2 = 0$; $h_{12} = 0,04$; $f_2^2 = 0,0825$. Trên hình 4 vẽ đồ thị biên độ A_1 khi $Z_2 = 0,2$. Ý nghĩa các đường vẫn như đã biết. Chúng ta cũng thấy, do điều kiện ổn định quan liên, vùng mất ổn định đã mở rộng. (đoạn ab)

Địa chỉ:
Đại học Bách khoa.

Nhận ngày 13/6/1980

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Văn Đình. Hiện tượng ổn định quan liên trong hệ á tuyến tự chấn và thông số hai bậc tự do. Tạp chí Cơ học. Số 1/1981.

РЕЗЮМЕ

ОБ ЯВЛЕНИИ СВЯЗАННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ ПРИ СУЩЕСТВОВАНИИ ВЫНУЖДЕННОГО ВОЗБУЖДЕНИЯ

Рассматривается квазилинейная авто и параметрическая система с двумя степенями свободы при существовании вынужденного возбуждения. В рассматриваемом случае, чисто авто и параметрическое колебание не возникает; однако, проявляются новые области неустойчивости