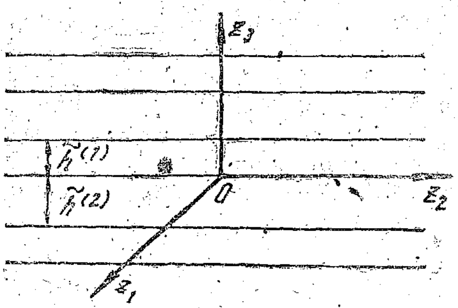
Tạp chí CƠ HỌC 1981 số 1 (trang 20 – 27)

TRUYỀN SÓNG ĐÀN HỒI TRONG VẬT LIỆU NÉN ĐƯỢC PHÂN LỚP TUẦN HOÀN CÓ BIẾN DẠNG TRƯỚC THUẦN NHẤT

LÊ MINH KHANH

§1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Xét môi trường phân lớp vô hạn gồm hai vật liệu nén được trao đổi nhau (h.1) Gọi hệ tọa độ Đề các vuông góc khi vật liệu ở trạng thái tự nhiên là X_1, X_2, X_3 và hệ tọa độ Đề các vuông góc khi vật liệu đã có biến dạng ban đầu là Z_1, Z_2, Z_3 trong đó các trục X_3, Z_3 vuông góc với các lớp.



Hình 1

Giả sử biến dạng ban đầu là thuần nhất, ta sẽ có

$$Z_m = \lambda_m^{(j)} X_m^{(j)} \quad (j = 1,2) \tag{1.1}$$

trong đó $\lambda^{(j)}$ là hằng số.

Phương trình cơ bản của nhiễu động dịch chuyển trong hệ tọa độ (Z_1, Z_2, Z_3) là [1]:

$$\tilde{L}^{(j)}_{m\alpha} u^{(j)}_{\alpha} = 0,$$

$$\tilde{L}^{(j)}_{m\alpha} = \tilde{\omega}^{(j)}_{im\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial Z_i \partial Z_\beta} - \tilde{\rho}^{(j)} \delta_{m\alpha} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \tag{1.2}$$

trong đó:

$$\tilde{\omega}^{(j)}_{im\alpha\beta} = \frac{\lambda_i^{(j)} \lambda_\beta^{(j)}}{\lambda_1^{(j)} \lambda_2^{(j)} \lambda_3^{(j)}} \omega^{(j)}_{im\alpha\beta}\,; \quad \tilde{\rho}^{(j)} = \frac{\rho^{(j)}}{\lambda_1^{(j)} \lambda_2^{(j)} \lambda_3^{(j)}}, \quad (i, m, \alpha, \beta = 1, 2, 3) \tag{1.3}$$

với $\rho^{(j)}$, $\tilde{\rho}^{(j)}$ là tỷ trọng của lớp thứ j trong trạng thái tự nhiên và trạng thái đầu. Đại lượng $\omega^{(j)}_{im\alpha\beta}$ cho bởi công thức (1.9) trong công trình [2].

Tải trọng tại mặt Z_3 = const có dạng

$$\tilde{P}^{(j)}_m = \tilde{\omega}^{(j)}_{3m\alpha\beta} \frac{\partial u^{(j)}_\alpha}{\partial Z_\beta} \tag{1.4}$$

Gọi thành phần của véctơ sóng trên hệ (Z_1, Z_2, Z_3) là (k_1, k_2, k_3). Trong công trình [1] đã nghiên cứu trường hợp $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = k \neq 0$ và trong công trình [3], [4] đã nghiên cứu trường hợp $k_1 = k \neq 0$, $k_2 = k_3 = 0$ (hoặc $k_1 = k_3 = 0$, $k_2 = k \neq 0$). Trong bài báo này, ta nghiên cứu trường hợp $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$, $k_3 = 0$, vật liệu các lớp là nén được.

§2. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Ta tìm nghiệm của hệ (1.2) dưới dạng:

$$u_\alpha^{(j)} = \widehat{u}_\alpha^{(j)}(Z_3)e^{i(k_1Z_1+k_2Z_2-\omega\tau)};$$

$$\widehat{u}_3^{(j)} = A^{(j)} e^{ia^{(j)}Z_3}, \quad \widehat{u}_1^{(j)} = \gamma^{(j)}\widehat{u}_3^{(j)}, \quad \widehat{u}_2^{(j)} = \theta^{(j)}\widehat{u}_3^{(j)}$$

Trong đó: $A^{(j)}, a^{(j)}, \gamma^{(j)}, \theta^{(j)}$ là các const (j) (2.1)

Thay (2.1) vào (1.2) ta được:

$$\gamma^{(j)}(\widetilde{\omega}_{1111}^{(j)}k_1^2 + \widetilde{\omega}_{2112}^{(j)}k_2^2 + \widetilde{\omega}_{3113}^{(j)}a^{(j)2} - \widetilde{\rho}^{(j)}\omega^2) + \theta^{(j)}(\widetilde{\omega}_{1122}^{(j)} + \widetilde{\omega}_{2121}^{(j)})k_1k_2 +$$
$$+ (\widetilde{\omega}_{1133}^{(j)} + \widetilde{\omega}_{3131}^{(j)})k_2a^{(j)} = 0$$

$$\gamma^{(j)}(\widetilde{\omega}_{2211}^{(j)} + \widetilde{\omega}_{1212}^{(j)})k_1k_2 + \theta^{(j)}(\widetilde{\omega}_{1212}^{(j)}k_1^2 + \widetilde{\omega}_{2222}^{(j)}k_2^2 + \widetilde{\omega}_{3223}^{(j)}a^{(j)2} - \widetilde{\rho}^{(j)}\omega^2) +$$
$$+ (\widetilde{\omega}_{2233}^{(j)} + \widetilde{\omega}_{2323}^{(j)})k_2a^{(j)} = 0$$

$$\gamma^{(j)}(\widetilde{\omega}_{3311}^{(j)} + \widetilde{\omega}_{3131}^{(j)})k_1k_2 + (\widetilde{\omega}_{1331}^{(j)}k_1^2 + \widetilde{\omega}_{2323}^{(j)}k_2^2 + \widetilde{\omega}_{3333}^{(j)}a^{(j)2} - \widetilde{\rho}^{(j)}\omega^2) +$$
$$+ \theta^{(j)}(\widetilde{\omega}_{3322}^{(j)} + \widetilde{\omega}_{3232}^{(j)})k_2a^{(j)} = 0 \qquad (2.2)$$

Từ hệ phương trình trên, sau khi khử $\gamma^{(j)}$, $\theta^{(j)}$, ta sẽ được một phương trình bậc ba của $a^{(j)2}$. Giải ra ta sẽ được sáu nghiệm:

$$a_1^{(j)} = -a_2^{(j)}, \quad a_3^{(j)} = -a_4^{(j)}, \quad a_5^{(j)} = -a_6^{(j)} \qquad (2.3)$$

chú ý đến (2.3) ta có thể viết lại (2.1) dưới dạng:

$$\widehat{u}_3^{(j)} = A_1^{(j)}e^{ia_1^{(j)}z_3} + A_2^{(j)}e^{-ia_1^{(j)}z_3} + A_3^{(j)}e^{ia_3^{(j)}z_3} + A_4^{(j)}e^{-ia_3^{(j)}z_3} +$$
$$A_5^{(j)}e^{ia_5^{(j)}z_3} + A_6^{(j)}e^{-ia_5^{(j)}z_3}$$

$$\widehat{u}_1^{(j)} = \gamma_1^{(j)}(A_1^{(j)}e^{ia_1^{(j)}z_3} - A_2^{(j)}e^{-ia_1^{(j)}z_3}) + \gamma_3^{(j)}(A_3^{(j)}e^{ia_3^{(j)}z_3} - A_4^{(j)}e^{-ia_3^{(j)}z_3}) +$$
$$+ \gamma_5^{(j)}(A_5^{(j)}e^{ia_5^{(j)}z_3} - A_6^{(j)}e^{-ia_5^{(j)}z_3})$$

$$\widehat{u}_2^{(j)} = \theta_1^{(j)}(A_1^{(j)}e^{ia_1^{(j)}z_3} - A_2^{(j)}e^{-ia_1^{(j)}z_3}) + \theta_3^{(j)}(A_3^{(j)}e^{ia_3^{(j)}z_3} - A_4^{(j)}e^{-ia_3^{(j)}z_3}) +$$
$$+ \theta_5^{(j)}(A_5^{(j)}e^{ia_5^{(j)}z_3} - A_6^{(j)}e^{-ia_5^{(j)}z_3}) \qquad (2.4)$$

Gọi chiều dày của các lớp trước và sau khi có biến dạng ban đầu là $h^{(j)}$ và $\tilde{h}^{(j)}$. Từ (1.1) ta suy ra:

$$\tilde{h}^{(j)} = \lambda_3^{(j)} h^{(j)} \tag{2.5}$$

Ta xét hai lớp cạnh nhau $0 \leqslant z_3 \leqslant h^{(1)}$, $-h^{(2)} \leqslant z_3 \leqslant 0$.

Tại $z_3 = 0$, ta phải có điều kiện liên tục:

$$\hat{u}_m^{(1)}(o) = \hat{u}_m^{(2)}(o), \quad \hat{P}_m^{(1)}(o) = \hat{P}_m^{(2)}(o), \quad (m = 1, 2, 3). \tag{2.6}$$

Theo [5] các biên độ $\hat{u}_m^{(j)}$, $\hat{P}_m^{(j)}$ phải thỏa mãn điều kiện tuần hoàn:

$$\hat{u}_m^{(1)}(\tilde{h}^{(1)}) = \hat{u}_m^{(2)}(-\hat{h}^{(2)}), \quad \hat{P}_m^{(1)}(\tilde{h}^{(1)}) = \hat{P}_m^{(2)}(-\tilde{h}^{(2)}), \quad (m = 1, 2, 3). \tag{2.7}$$

các điều kiện (2.6), (2.7) cho ta một hệ 12 phương trình tuyến tính thuần nhất của $A_1^{(1)}, \ldots, A_6^{(2)}$. Vì hệ này quá cồng kềnh nên ở đây ta không viết ra.

§ 3. TRƯỜNG HỢP BƯỚC SÓNG DÀI

Định thức của hệ 12 phương trình tuyến tính thuần nhất của $A_1^{(1)}, \ldots, A_6^{(2)}$ phải bằng không

$$D = 0, \tag{3.1}$$

trong đó:

Cột 1	*Cột 2*
1	1
$\gamma_1^{(1)}$	$-\gamma_1^{(1)}$
$\theta_1^{(1)}$	$-\theta_1^{(1)}$
$\tilde{\omega}_{3311}^{(1)} \gamma_1^{(1)} a_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3131}^{(1)} k_1$	$\tilde{\omega}_{3113}^{(1)} \gamma_1^{(1)} a_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3131}^{(1)} k_1$
$\tilde{\omega}_{3223}^{(1)} \theta_1^{(1)} a_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3232}^{(1)} k_2$	$\tilde{\omega}_{3223}^{(1)} \theta_1^{(1)} a_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3232}^{(1)} k_2$
$\tilde{\omega}_{3311}^{(1)} k_1 \gamma_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3322}^{(1)} k_2 \theta_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3333}^{(1)} a_1^{(1)}$	$-(\tilde{\omega}_{3311}^{(1)} k_1 \gamma_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3322}^{(1)} k_2 \theta_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3333}^{(1)} a_1^{(1)})$
$e^{i a_1^{(1)} \tilde{h}^{(1)}}$	$e^{-i a_1^{(1)} \tilde{h}^{(1)}}$
$\gamma_1^{(1)} e^{i a_1^{(1)} \tilde{h}^{(1)}}$	$-\gamma_1^{(1)} e^{-i a_1^{(1)} \tilde{h}^{(1)}}$
$\theta_1^{(1)} e^{i a_1^{(1)} \tilde{h}^{(1)}}$	$-\theta_1^{(1)} e^{-i a_1^{(1)} \tilde{h}^{(1)}}$
$(\tilde{\omega}_{3113}^{(1)} \gamma_1^{(1)} a_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3131}^{(1)} k_1) e^{i a_1^{(1)} \tilde{h}^{(1)}}$	$(\omega_{3113}^{(1)} \gamma_1^{(1)} a_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3131}^{(1)} k_1) e^{-i a_1^{(1)} \tilde{h}^{(1)}}$

$$(\tilde{\omega}^{(1)}_{3223}\,\theta^{(1)}_1\, a^{(1)}_1 + \tilde{\omega}^{(2)}_{3232}\, k_2)\, e^{ia^{(1)}_1 \tilde{h}^{(1)}}$$

$$(\tilde{\omega}^{(1)}_{3311}\, k_1 \gamma^{(1)}_1 + \tilde{\omega}^{(1)}_{3322}\, k_2\, \theta^{(1)}_1 + \tilde{\omega}^{(1)}_{3333}\, a^{(1)}_1)\, e^{ia^{(1)}_1 \tilde{h}^{(1)}}$$

$$(\tilde{\omega}^{(1)}_{3223}\,\theta^{(1)}_1\, a^{(1)}_1 + \tilde{\omega}^{(1)}_{3232}\, k_2)\, e^{-ia^{(1)}_1 \tilde{h}^{(1)}}$$

$$-(\tilde{\omega}^{(1)}_{3311}\, k_1 \gamma^{(1)}_1 + \tilde{\omega}^{(1)}_{3322}\, k_2\, \theta^{(1)}_1 + \tilde{\omega}^{(1)}_{3333}\, a^{(1)}_1)\, e^{-ia^{(1)}_1 \tilde{h}^{(1)}}$$

. . . .

Cột 11

$$-1$$

$$-\gamma^{(2)}_5$$

$$-\theta^{(2)}_5$$

$$-(\tilde{\omega}^{(2)}_{3113}\,\gamma^{(2)}_5\, a^{(2)}_5 + \tilde{\omega}^{(2)}_{3131}\, k_1)$$

$$-(\tilde{\omega}^{(2)}_{3223}\,\theta^{(2)}_5\, a^{(2)}_5 + \tilde{\omega}^{(2)}_{3232}\, k_2)$$

$$(\tilde{\omega}^{(2)}_{3311} k_1 \gamma^{(2)}_5 + \tilde{\omega}^{(2)}_{3322} k_2 \theta^{(2)}_5 + \tilde{\omega}^{(2)}_{3333} a^{(2)}_5)$$

$$-e^{-ia^{(2)}_5 \tilde{h}^{(2)}}$$

$$-\gamma^{(2)}_5\, e^{-ia^{(2)}_5 \tilde{h}^{(2)}}$$

$$-\theta^{(2)}_5\, e^{-ia^{(2)}_5 \tilde{h}^{(2)}}$$

$$-(\tilde{\omega}^{(2)}_{3113}\,\gamma^{(2)}_5\, a^{(2)}_5 + \tilde{\omega}^{(2)}_{3131}\, k_1)\, e^{-ia^{(2)}_5 \tilde{h}^{(2)}}$$

$$-(\tilde{\omega}^{(2)}_{3223}\,\theta^{2}_5\, a^{(2)}_5 + \tilde{\omega}^{(2)}_{3232}\, k_2)\, e^{-ia^{(2)}_5 \tilde{h}^{(2)}}$$

$$-(\tilde{\omega}^{(2)}_{3311}\, k_1\, a^{(2)}_5 + \tilde{\omega}^{(2)}_{3322}\, k_2\, \theta^{(2)}_5 + \tilde{\omega}^{(2)}_{3333}\, a^{(2)}_5)\, e^{-ia^{(2)}_5 \tilde{h}^{(2)}}$$

Cột 12

$$-1$$

$$\gamma^{(2)}_5$$

$$\theta^{(2)}_5$$

$$-(\tilde{\omega}^{(2)}_{3113}\,\gamma^{(2)}_5\, a^{(2)}_5 + \tilde{\omega}^{(2)}_{3131}\, k_1)$$

$$-(\tilde{\omega}^{(2)}_{3223}\,\theta^{(2)}_5\, a^{(2)}_5 + \tilde{\omega}^{(2)}_{3232}\, k_2)$$

$$\tilde{\omega}^{(2)}_{3311}\, k_1 \gamma^{(2)}_5 + \tilde{\omega}^{(2)}_{3322}\, k_2\, \theta^{(2)}_5 + \tilde{\omega}^{(2)}_{3333}\, a^{(2)}_5$$

$$-e^{ia^{(2)}_5 \tilde{h}^{(2)}}$$

$$\gamma^{(2)}_5\, e^{ia^{(2)}_5 \tilde{h}^{(2)}}$$

$$\theta^{(2)}_5\, e^{ia^{(2)}_5 \tilde{h}^{(2)}}$$

$$-(\tilde{\omega}^{(2)}_{3113}\,\gamma^{(2)}_5\, a^{(2)}_5 + \tilde{\omega}^{(2)}_{3131}\, k_1)\, e^{ia^{(2)}_5 \tilde{h}^{(2)}}$$

$$-(\tilde{\omega}^{(2)}_{3223}\,\theta^{(2)}_5\, a^{(2)}_5 + \tilde{\omega}^{(2)}_{3232}\, k_2)\, e^{ia^{(2)}_5 \tilde{h}^{(2)}}$$

$$(\tilde{\omega}^{(2)}_{3311}\, k_1 \gamma^{(2)}_5 + \tilde{\omega}^{(2)}_{3322}\, k_2\, \theta^{(2)}_5 + \tilde{\omega}^{(2)}_{3333}\, a^{(2)}_5)\, e^{ia^{(2)}_5 \tilde{h}^{(2)}} \qquad (3.2)$$

ở đây các đại lượng $a^{(j)}_i$, $\gamma^{(j)}_i$, $\theta^{(j)}_i$, $(j = 1,2;\ i = 1, 3, 5)$ tính từ hệ (2.2)

Phương trình (3.1) kết hợp với (2.2) là phương trình tán sắc cho phép ta tìm ra vận tốc của ba loại sóng. Nhưng vì (3.1) quá cồng kềnh, nên không thể tìm ra một công thức giải tích cho các vận tốc sóng. Trong mỗi trường hợp cụ thể ta có thể tính gần đúng bằng phương pháp số.

Xét trường hợp bước sóng dài, sao cho các chiều dày $\tilde{h}^{(1)}$, $\tilde{h}^{(2)}$ của các lớp là nhỏ không đáng kể so với bước sóng. Khi đó qua một vài phép biến đổi nhỏ ta có thể viết (3.2) dưới dạng:

Cột 1

$$\begin{array}{c}
1 \\
\gamma_1^{(1)} \\
\theta_1^{(1)} \\
\tilde{\omega}_{3113}^{(1)} \gamma_1^{(1)} a_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3131}^{(1)} k_1 \\
\tilde{\omega}_{3223}^{(1)} \theta_1^{(1)} a_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3232}^{(1)} k_2 \\
\tilde{\omega}_{3311}^{(1)} k_1 \gamma_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3322}^{(1)} k_2 \theta_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3333}^{(1)} a_1^{(1)} \\
a_1^{(1)} \tilde{h}^{(1)} \\
\gamma_1^{(1)} a_1^{(1)} \tilde{h}^{(1)} \\
\theta_1^{(1)} a_1^{(1)} \tilde{h}^{(1)} \\
(\tilde{\omega}_{3113}^{(1)} \gamma_1^{(1)} a_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3131}^{(1)} k_1) a_1^{(1)} \tilde{h}^{(1)} \\
(\tilde{\omega}_{3223}^{(1)} \theta_1^{(1)} a_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3232}^{(1)} k_2) a_1^{(1)} \tilde{h}^{(1)} \\
(\tilde{\omega}_{3311}^{(1)} k_1 \gamma_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3322}^{(1)} k_2 \theta_1^{(1)} + \\
+ \tilde{\omega}_{3333}^{(1)} a_1^{(1)}) a_1^{(1)} \tilde{h}^{(1)}
\end{array}$$

Cột 2

$$\begin{array}{c}
1 \\
-\gamma_1^{(1)} \\
-\theta_1^{(1)} \\
\tilde{\omega}_{3113}^{(1)} \gamma_1^{(1)} a_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3131}^{(1)} k_1 \\
\tilde{\omega}_{3223}^{(1)} \theta_1^{(1)} a_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3232}^{(1)} k_2 \\
-(\tilde{\omega}_{3311}^{(1)} k_1 \gamma_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3322}^{(1)} k_2 \theta_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3333}^{(1)} a_1^{(1)}) \\
-a_1^{(1)} \tilde{h}^{(1)} \\
\gamma_1^{(1)} a_1^{(1)} \tilde{h}^{(1)} \\
\theta_1^{(1)} a_1^{(1)} \tilde{h}^{(1)} \\
-(\tilde{\omega}_{3113}^{(1)} \gamma_1^{(1)} a_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3131}^{(1)} k_1) a_1^{(1)} \tilde{h}^{(1)} \\
-(\tilde{\omega}_{3223}^{(1)} \theta_1^{(1)} a_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3232}^{(1)} k_2) a_1^{(1)} \tilde{h}^{(1)} \\
(\tilde{\omega}_{3311}^{(1)} k_1 a_1^{(1)} + \tilde{\omega}_{3322}^{(1)} k_2 \theta_1^{(1)} + \\
+ \tilde{\omega}_{3333}^{(1)} a_1^{(1)}) a_1^{(1)} \tilde{h}^{(1)}
\end{array}$$

. . . .

Cột 11

$$\begin{array}{c}
-1 \\
-\gamma_5^{(2)} \\
-\theta_5^{(2)} \\
-(\tilde{\omega}_{3113}^{(2)} \gamma_5^{(2)} a_5^{(2)} + \tilde{\omega}_{3131}^{(2)} k_1) \\
-(\tilde{\omega}_{3223}^{(2)} \theta_5^{(2)} a_5^{(2)} + \tilde{\omega}_{3232}^{(2)} k_2) \\
-(\tilde{\omega}_{3311}^{(2)} k_1 \gamma_5^{(2)} + \tilde{\omega}_{3322}^{(2)} k_2 \theta_5^{(2)} + \tilde{\omega}_{3333}^{(2)} a_5^{(2)}) \\
a_5^{(2)} \tilde{h}^{(2)} \\
\gamma_5^{(2)} a_5^{(2)} \tilde{h}^{(2)} \\
\theta_5^{(2)} a_5^{(2)} \tilde{h}^{(2)} \\
(\tilde{\omega}_{3113}^{(2)} \gamma_5^{(2)} a_5^{(2)} + \tilde{\omega}_{3131}^{(2)} k_1) a_5^{(2)} \tilde{h}^{(2)} \\
(\tilde{\omega}_{3223}^{(2)} \theta_5^{(2)} a_5^{(2)} + \tilde{\omega}_{3232}^{(2)} k_2) a_5^{(2)} \tilde{h}^{(2)} \\
(\tilde{\omega}_{3311}^{(2)} k_1 \gamma_5^{(2)} + \tilde{\omega}_{3322}^{(2)} k_2 \theta_5^{(2)} + \\
+ \tilde{\omega}_{3333}^{(2)} a_5^{(2)}) a_5^{(2)} \tilde{h}^{(2)}
\end{array}$$

Cột 12

$$\begin{array}{c}
-1 \\
\gamma_5^{(2)} \\
\theta_5^{(2)} \\
-(\tilde{\omega}_{3113}^{(2)} \gamma_5^{(2)} a_5^{(2)} + \tilde{\omega}_{3131}^{(2)} k_1) \\
-(\tilde{\omega}_{3223}^{(2)} \theta_5^{(2)} a_5^{(2)} + \tilde{\omega}_{3232}^{(2)} k_2) \\
\tilde{\omega}_{3311}^{(2)} k_1 \gamma_5^{(2)} + \tilde{\omega}_{3322}^{(2)} k_2 \theta_5^{(2)} + \tilde{\omega}_{3333}^{(2)} a_5^{(2)} \\
-a_5^{(2)} \tilde{h}^{(2)} \\
\gamma_5^{(2)} a_5^{(2)} \tilde{h}^{(2)} \\
\theta_5^{(2)} a_5^{(2)} \tilde{h}^{(2)} \\
-(\tilde{\omega}_{3113}^{(2)} \gamma_5^{(2)} a_5^{(2)} + \tilde{\omega}_{3131}^{(2)} k_1) a_5^{(2)} \tilde{h}^{(2)} \\
-(\tilde{\omega}_{3223}^{(2)} \theta_5^{(2)} a_5^{(2)} + \tilde{\omega}_{3232}^{(2)} k_2) a_5^{(2)} \tilde{h}^{(2)} \\
(\tilde{\omega}_{3311}^{(2)} k_1 \gamma_5^{(2)} + \tilde{\omega}_{3322}^{(2)} k_2 \theta_5^{(2)} + \\
+ \tilde{\omega}_{3333}^{(2)} a_5^{(2)}) a_5^{(2)} \tilde{h}^{(2)}
\end{array} \qquad (3.3)$$

Qua rất nhiều lần biến đổi, từ định thức cấp 12 có các cột như ở (3.3) ta tìm ra được các vận tốc sóng:

$$v_1^2 = c^2_{z_1 z_3}\cos^2\alpha + c^2_{z_2 z_3}\sin^2\alpha;$$

$$v^2_{2,3} = \frac{1}{2}\Big\{\left(c^2_{z_1 z_1} + c^2_{z_1 z_2}\right)\cos^2\alpha + \left(c^2_{z_2 z_2} + c^2_{z_2 z_1}\right)\sin^2\alpha \pm \sqrt{\Big[\Big(c^2_{z_1 z_1} - \ldots}$$

$$\ldots - c^2_{z_1 z_2}\Big)\cos^2\alpha + \left(c^2_{z_2 z_2} - c^2_{z_2 z_1}\right)\sin^2\alpha\Big]^2 + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha\Big[\Big(\tilde{\omega}^{(1)}_{1122} + \ldots$$

$$\ldots \tilde{\omega}^{(1)}_{2121}\Big)\tilde{h}^{(1)} + \left(\tilde{\omega}^{(2)}_{1122} + \tilde{\omega}^{(2)}_{2121}\right)\tilde{h}^{(2)} - \left(\tilde{\omega}^{(1)}_{1133} - \tilde{\omega}^{(2)}_{1133}\right)\Big(\tilde{\omega}^{(1)}_{2233} - \ldots$$

$$\ldots - \tilde{\omega}^{(2)}_{2233}\Big)\tilde{h}^{(1)}\tilde{h}^{(2)} : \left(\tilde{\omega}^{(2)}_{3333}\tilde{h}^{(1)} + \tilde{\omega}^{(1)}_{3333}\tilde{h}^{(2)}\right)\Big]^2\Big\};$$

$$\cos^2\alpha = \frac{k_1^2}{k_1^2+k_2^2}, \quad \sin^2\alpha = \frac{k_2^2}{k_1^2+k_2^2} \tag{3.4}$$

trong đó $c_{z_1 z_1}$, $c_{z_1 z_3}$, $c_{z_1 z_2}$ là sóng dãn, sóng cắt và sóng cắt thuần túy [4] trong trường hợp véc tơ sóng $\vec{k}$ chỉ có thành phần $k_1 = k \neq 0$, còn $k_2 = k_3 = 0$:

$$C^2_{z_1 z_1} = \left(\tilde{\rho}^{(1)}\tilde{h}^{(1)} + \tilde{\rho}^{(2)}\tilde{h}^{(2)}\right)^{-1}\Big[\tilde{\omega}^{(1)}_{1111}\tilde{h}^{(1)} + \tilde{\omega}^{(2)}_{1111}\tilde{h}^{(2)} -$$

$$- \left(\tilde{\omega}^{(1)}_{1133} - \tilde{\omega}^{(2)}_{1133}\right)^2 \times \left(\tilde{\omega}^{(2)}_{3333}\tilde{h}^{(1)} + \tilde{\omega}^{(1)}_{3333}\tilde{h}^{(2)}\right)^{-1}\tilde{h}^{(1)}\tilde{h}^{(2)}\Big].$$

$$C^2_{z_1 z_3} = \left(\tilde{\rho}^{(1)}\tilde{h}^{(1)} + \tilde{\rho}^{(2)}\tilde{h}^{(2)}\right)^{-1}\Big[\tilde{\omega}^{(1)}_{1331}\tilde{h}^{(1)} + \tilde{\omega}^{(2)}_{1331}\tilde{h}^{(2)} -$$

$$- \left(\tilde{\omega}^{(1)}_{1313} - \tilde{\omega}^{(2)}_{1313}\right)^2 \times \left(\tilde{\omega}^{(2)}_{3113}\tilde{h}^{(1)} + \tilde{\omega}^{(1)}_{3113}\tilde{h}^{(2)}\right)^{-1}\tilde{h}^{(1)}\tilde{h}^{(2)}\Big],$$

$$C^2_{z_1 z_2} = \left(\tilde{\rho}^{(1)}\tilde{h}^{(1)} + \tilde{\rho}^{(2)}\tilde{h}^{(2)}\right)^{-1}\left(\tilde{\omega}^{(1)}_{1221}\tilde{h}^{(1)} + \tilde{\omega}^{(2)}_{1221}\tilde{h}^{(2)}\right) \tag{3.5}$$

và tương tự $c_{z_2 z_2}$, $c_{z_2 z_3}$, $c_{z_2 z_1}$ là sóng dãn, sóng cắt và sóng cắt thuần túy trong trường hợp véc tơ sóng $\vec{k}$ chỉ có thành phần $k_2 = k \neq 0$, còn $k_1 = k_3 = 0$

$$C^2_{z_2 z_2} = \left(\tilde{\rho}^{(1)}\tilde{h}^{(1)} + \tilde{\rho}^{(2)}\tilde{h}^{(2)}\right)^{-1}\Big[\tilde{\omega}^{(1)}_{2222}\tilde{h}^{(1)} + \tilde{\omega}^{(2)}_{2222}\tilde{h}^{(2)} -$$

$$- \left(\tilde{\omega}^{(1)}_{2233} - \tilde{\omega}^{(2)}_{2233}\right)^2 \times \left(\tilde{\omega}^{(2)}_{3333}\tilde{h}^{(1)} + \tilde{\omega}^{(1)}_{3333}\tilde{h}^{(2)}\right)^{-1}\tilde{h}^{(1)}\tilde{h}^{(2)}\Big],$$

$$C^2_{z_2 z_3} = \left(\tilde{\rho}^{(1)}\tilde{h}^{(1)} + \tilde{\rho}^{(2)}\tilde{h}^{(2)}\right)^{-1}\Big[\tilde{\omega}^{(1)}_{2332}\tilde{h}^{(1)} + \tilde{\omega}^{(2)}_{2332}\tilde{h}^{(2)} -$$

$$- \left(\tilde{\omega}^{(1)}_{2323} - \tilde{\omega}^{(2)}_{2323}\right)^2 \times \left(\tilde{\omega}^{(2)}_{3223}\tilde{h}^{(1)} + \tilde{\omega}^{(1)}_{3223}\tilde{h}^{(2)}\right)^{-1}\tilde{h}^{(1)}\tilde{h}^{(2)}\Big],$$

$$C^2_{z_2 z_1} = \left(\tilde{\rho}^{(1)}\tilde{h}^{(1)} + \tilde{\rho}^{(2)}\tilde{h}^{(2)}\right)^{-1}\left(\tilde{\omega}^{(1)}_{1221}\tilde{h}^{(1)} + \tilde{\omega}^{(2)}_{1221}\tilde{h}^{(2)}\right) \tag{3.6}$$

Nếu trong (3.4) cho $\sin\alpha = 0$ ($k_2 = 0$) thì ta tìm lại được các công thức của công trình [4].

§4 TRƯỜNG HỢP BIẾN DẠNG BAN ĐẦU NHỎ

Các kết quả trên đây có thể ứng dụng cho trường hợp biến dạng nhỏ, khi biến dạng ban đầu xác định bởi lý thuyết đàn hồi tuyến tính. Khi đó trong các công thức ở § 1, §2, §3 chỉ cần thay $\lambda_i^{(j)} = 1$ và coi ứng suất suy rộng tương đương với ứng suất thật $\sigma_{ii}^{*o(j)} = \sigma_{ii}^{o(j)}$.

Ngoài ra, từ điều kiện cân bằng tĩnh học của trạng thái ban đầu, ta có:

$$\sigma_{33}^{o(1)} = \sigma_{33}^{o(2)} = \sigma_{33}^{o} \tag{4.1}$$

Từ các kết quả của [4] ta suy ra;

$$\begin{aligned}
C_{z_iz_i}^2 &= \left(\rho^{(1)}h^{(1)} + \rho^{(2)}h^{(2)}\right)^{-1} \Big\{ h^{(1)}\left(\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)} + \sigma_{ii}^{o(1)}\right) + \\
&\quad + h^{(2)}\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} + \sigma_{ii}^{o(2)}\right) - h^{(1)}h^{(2)}\left(\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)}\right)^2 \Big[h^{(1)}\Big(\lambda^{(1)} + \\
&\quad + 2\mu^{(1)} + \sigma_{33}^{o}\Big) + h^{(2)}\left(\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)} + \sigma_{33}^{o}\right)\Big]^{-1} \Big\}, \\
C_{z_iz_3}^2 &= \left(\rho^{(1)}h^{(1)} + \rho^{(2)}h^{(2)}\right)^{-1} \Big\{ h^{(1)}\left(\mu^{(1)} + \sigma_{ii}^{o(1)}\right) + \\
&\quad + h^{(2)}\left(\mu^{(2)} + \sigma_{ii}^{o(2)}\right) - h^{(1)}h^{(2)}\left(\mu^{(1)} - \mu^{(2)}\right)^2 \times \\
&\quad \times \left[h^{(1)}\left(\mu^{(2)} + \sigma_{33}^{o}\right) + h^{(2)}\left(\mu^{(1)} + \sigma_{33}^{o}\right)\right] \Big\}, \\
C_{z_1z_2}^2 &= \left(\rho^{(1)}h^{(1)} + \rho^{(2)}h^{(2)}\right)^{-1}\left[h^{(1)}\left(\mu^{(1)} + \sigma_{11}^{o(1)}\right) + h^{(2)}\left(\mu^{(2)} + \sigma_{11}^{o(2)}\right)\right], \\
C_{z_2z_1}^2 &= \left(\rho^{(1)}h^{(1)} + \rho^{(2)}h^{(2)}\right)^{-1}\left[h^{(1)}\left(\mu^{(1)} + \sigma_{22}^{o(1)}\right) + h^{(2)}\left(\mu^{(2)} + \sigma_{22}^{o(2)}\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.2}$$

trong đó $\lambda^{(j)}$, $\mu^{(j)}$ là các hằng số lamê của lớp thứ j.

thay (4.2) vào (3.4) ta sẽ được các vận tốc sóng trong trường hợp biến dạng ban đầu nhỏ.

Địa chỉ:
Đại học tổng hợp

Nhận ngày 18/10/1979

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ГУЗЬ А. Н., ЛЕ МИНЬ КХАНЬ. Распространение волн в композитных слоистых материалах с большими начальными деформациями. Прикладная механика, Киев, N° 1, 1976.

2. ГУЗЬ А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. Наукова думка, Киев, 1973.

3. ЛЕ МИНЬ КХАНЬ. Распространение волн вдоль слоев в слоистых несжимаемых материалах с начальными деформациями. Прикладная механика, Киев, N° 12, 1976.

4. ЛЕ МИНЬ КХАНЬ. Распространение волн вдоль слоев в слоистых сжимаемых материалах с начальными деформациями. Прикладная механика, Киев, N° 9, 1977.

5. БРИЛЛЮЭН Л., ПАРОДИ М. Распространение волн в периодических структурах. ИЛ. Москва, 1959.

RÉSUMÉ

PROPAGATION DES ONDES ÉLASTIQUES DANS LES MATÉRIAUX LAMINÉS EN COUCHES PÉRIODIQUES AVEC DÉFORMATIONS INITIALES HOMOGÈNES

Le milieu est en couches périodiques, composé de deux matériaux différents. Les déformations initiales sont homogènes $z_m = \lambda_m^{(j)} x_m^{(j)}$. La propagation des ondes est parallèle aux couches, le vecteur d'onde a des composants $k_1 \neq o$, $k_2 \neq o$, $k_3 = o$ dans le système de coordonnés (z_1, z_2, z_3). Dans le cas des couches minces, l'auteur a trouvé les vitesses des trois ondes élastiques.

Tin hoạt động Cơ học

Nhận lời mời của viện Khoa học Việt Nam viện sĩ thông tấn phó viện trưởng viện Cơ nhiệt viện Hàn lâm khoa học Tiệp khắc giáo sư Ladislav Pust đã sang thăm và làm việc tại Việt Nam từ ngày **22-2** đến ngày **9-3-1981**.

Trong thời gian nói trên viện sĩ Pust L. đã giảng một số chuyên đề về động lực học máy, lý thuyết đồng nhất hóa và mô hình hóa trong cơ học, đã gặp gỡ và trao đổi với các cán bộ khoa học Việt Nam về những vấn đề liên quan đến động lực học máy, đã cùng với viện Cơ học, viện Khoa học Việt Nam dự thảo kế hoạch triển khai chương trình hợp tác nghiên cứu khoa học kỹ thuật 5 năm (1981 – 1985) giữa viện Khoa học Việt Nam và viện hàn lâm khoa học Tiệp Khắc.