Tạp chí CƠ HỌC 1981 số 1 (trang 7 – 12)

VỀ MỘT NGHIỆM KHÔNG DỪNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH FOKKER–PLANCK–KOLMOGOROV ĐỐI VỚI HỆ ĐỘNG LỰC TUYẾN TÍNH MỘT BẬC TỰ DO

NGUYỄN ĐÔNG ANH

PHƯƠNG pháp phương trình Fokker – Planck – Kolmogorov (FPK) là một trong những phương pháp cơ bản của lý thuyết dao động ngẫu nhiên, tuy vậy việc tìm nghiệm của các phương trình FPK rất khó khăn, đặc biệt là các nghiệm không dừng [1, 2, 3]. Trong bài báo này trên cơ sở của phương pháp khai triển chuỗi theo biến vận tốc [3] đã lập được một hệ phương trình vi phân đối với các hệ số của nghiệm không dừng của phương trình FPK đối với hệ động lực tuyến tính một bậc tự do. Sau hết bằng phép biến đổi phi tuyến đã nhận được một nghiệm không dừng của phương trình này.

Ta xét hệ động lực tuyến tính một bậc tự do được mô tả bởi phương trình vi phân ngẫu nhiên

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + d(t)x = \xi(t) \tag{1}$$

trong đó $\xi(t)$ là quá trình ngẫu nhiên « ồn trắng » có giá trị trung bình bằng không và cường độ D.

Phương trình FPK ứng với hàm mật độ xác suất $W(x, v, t)$ của dạng pha của hệ (1),

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -a(t)v - d(t)x + \xi(t) \end{cases} \tag{2}$$

sẽ được viết như sau :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} v - \frac{\partial}{\partial v}\left[(a(t)v + d(t)x)W\right] - \frac{D}{2}\frac{\partial^2 W}{\partial v^2} = 0 \tag{3}$$

Ngoài ra hàm mật độ xác suất còn phải thỏa mãn các điều kiện sau :

$$W(x, v, t) \geqslant 0, \ \forall x, v, t \in [\alpha, \beta] \tag{4}$$

$$W(x, v, t) \to 0 \text{ khi } x \to \pm\infty \text{ hay } v \to \pm\infty \tag{5}$$

và điều kiện chuẩn

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int W(x, v, t)\, dx dv = 1 \tag{6}$$

Bằng cách thay biến ta đưa phương trình (3) về dạng sau :

$$P(x, v, t) = \ln W(x, v, t) \tag{7}$$

$$A(P) = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial x} v - \frac{\partial P}{\partial v}\left[a(t)v + d(t)x\right] - a(t) - \frac{D}{2}\left[\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)^2\right] = 0 \tag{8}$$

Nghiệm của phương trình (8) ta sẽ biểu diễn dưới dạng chuỗi lũy thừa theo biến vận tốc

$$P(x, v, t) = g_0(x, t)v^0 + \dots + g_m(x, t)v^m + g_{m+1}(t)v^{m+1} + \dots + g_n(t)v^n \tag{9}$$

trong đó m, n là hai số nguyên dương chưa biết, ($m \leqslant n$). Thay (9) vào (8) ta nhận được vế phải cũng là đa thức đối với biến vận tốc v với số mũ k bằng:

$$k = \max \begin{cases} m+1 \\ n \\ 2(n-1) \end{cases} \tag{10}$$

1. Như vậy để không gian tuyến tính của các đa thức theo biến vận tốc bậc n là bất biến đối với toán tử A(P) ta phải có phương trình

$$K = n \tag{11}$$

Thay (10) vào (11) có

$$n = \max \begin{cases} m+1 \\ n \\ 2(n-1) \end{cases}$$

2. Từ đây có thể chọn:

$$n = 2, \quad m = 1. \tag{12}$$

Thay (12) vào (9) ta có

$$P(x, v, t) = g_0(x, t) + g_1(x, t)\, v + \frac{1}{2} f_3(t)v^2 \tag{13}$$

hay thay (13) vào (8) có.

$$A(P) = \frac{\partial g_0}{\partial t} + \frac{\partial g_1}{\partial t} v + \frac{1}{2}\frac{df_3}{dt} v^2 + \left(\frac{\partial g_0}{\partial x} + \frac{\partial g_1}{\partial x} v\right) v - (g_1 +$$

$$+ f_3 v)\left[a(t)v + d(t)x\right] - a(t) - \frac{D}{2}\left[f_3 + g_1^2 + 2g_1 f_3 v + f_3^2 v^2\right] = 0$$

Phương trình này sẽ thỏa mãn nếu

$$\frac{\partial g_0}{\partial t} - d(t)\, x g_1 - a(t) - \frac{D}{2} f_3 - \frac{D}{2} g_1^2 = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial g_0}{\partial x} - a(t)g_1 - d(t)x f_3 - D g_1 f_3 = 0 \tag{15}$$

$$\frac{1}{2}\frac{df_3}{dt} + \frac{\partial g_1}{\partial x} - a(t) f_3 - \frac{D}{2} f_3^2 = 0 \tag{16}$$

Từ phương trình (16) suy ra

$$g_1(x, t) = f_1(t) + \varphi_1(t)\, x \tag{17}$$

khi đó (16) có dạng

$$\frac{1}{2}\frac{df_3}{dt} + \varphi_1 - a(t) f_3 - \frac{D}{2} f_3^2 = 0 \tag{18}$$

Thay (17) vào (15) có

$$\frac{df_1}{dt} + \frac{d\varphi_1}{dt} x + \frac{\partial g_0}{\partial x} - a(t) f_1 - a(t)\varphi_1(t)\, x$$

$$- d(t) f_3 - D f_1 f_3 - D f_3 \varphi_1 x = 0 \tag{19}$$

Như vậy g_0 có dạng sau:

$$g_0(x, t) = f_0(t) + \varphi_0(t)\, x + \frac{1}{2}\varphi_2(t)\, x^2 \tag{20}$$

Thay (20) vào (19) ta có

$$\frac{df_1}{dt} + \varphi_0(t) - a(t) f_1 - D f_1 f_3 + \left(\frac{d\varphi_1}{dt} - d(t) f_3 \varphi_2 - a(t)\varphi_1 - D f_3 \varphi_1\right) x = 0$$

Phương trình này sẽ thỏa mãn nếu như

$$\frac{df_1}{dt} + \varphi_o(t) - a(t) f_1(t) - D f_1(t) f_3(t) = 0 \tag{21}$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} + \varphi_2(t) - a(t)\varphi_1(t) - D f_3(t)\varphi_1(t) - d(t) f_3(t) = 0 \tag{22}$$

Thay biểu thức (20), (17) của $g_o(x, t)$ và $g_1(x, t)$ vào (14) ta có

$$\frac{df_o}{dt} - a(t) - \frac{D}{2} f_3(t) - \frac{D}{2} f_1^2(t) + \left[\frac{d\varphi_o}{dt} - d(t) f_1(t) - D f_1(t)\varphi_1(t)\right] x$$
$$+ \left[\frac{1}{2}\frac{d\varphi_2}{dt} - d(t)\varphi_1(t) - \frac{D}{2}\varphi_1^2(t)\right] x^2 = 0$$

hay

$$\frac{df_o}{dt} - a(t) - \frac{D}{2} f_3(t) - \frac{D}{2} f_1^2(t) = 0 \tag{23}$$

$$\frac{d\varphi_o}{dt} - d(t) f_1(t) - D f_1(t)\varphi_1(t) = 0 \tag{24}$$

$$\frac{1}{2}\frac{d\varphi_2}{dt} - d(t)\varphi_1(t) - \frac{D}{2}\varphi_1^2(t) = 0 \tag{25}$$

Như vậy ta có một hệ gồm 6 phương trình vi phân (18), (21) – (25) để xác định 6 ẩn

$$f_1(t),\ \varphi_1(t),\ f_o(t),\ \varphi_o(t),\ \varphi_2(t),\ f_3(t)$$

Sau khi giải hệ này thay (20) vào (13) ta tìm được

$$P(x, v, t) = f_o(t) + \varphi_o(t) x + \frac{1}{2}\varphi_2(t) x^2 + f_1(t) v + \varphi_1(t) xv + \frac{1}{2} f_3(t) v^2 \tag{26}$$

Sau hết hàm mật độ xác suất sẽ bằng

$$W(x, v, t) = \exp\left\{ f_o(t) + \varphi_o(t) x + \frac{1}{2}\varphi_2(t) x^2 + f_1(t) v + \varphi_1(t) xv + \frac{1}{2} f_3(t) v^2 \right\} \tag{27}$$

Hệ phương trình (18), (21) – (26) là hệ phương trình vi phân phi tuyến nói chung rất khó giải. Ta cố gắng tìm một trong các nghiệm của hệ này. Dễ dàng thấy rằng hệ này có thể cho nghiệm thỏa mãn điều kiện

$$\varphi_o(t) = 0, \quad f_1(t) = 0 \tag{28}$$

Khi đó hệ phương trình (18), (21) – (25) còn chứa 4 phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{df_o}{dt} - a(t) - \dfrac{D}{2} f_3(t) = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{d\varphi_2}{dt} - d(t)\varphi_1(t) - \dfrac{D}{2}\varphi_1^2(t) = 0 \\ \dfrac{d\varphi_1}{dt} + \varphi_2(t) - a(t)\varphi_1(t) - D f_3(t)\varphi_1(t) - d(t) f_3(t) = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{df_3}{dt} + \varphi_1(t) - a(t) f_3(t) - \dfrac{D}{2} f_3^2(t) = 0 \end{cases} \tag{29}$$

Mặt khác điều kiện chuẩn (6) lúc này sẽ có dạng:

$$\int\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ f_o(t) + \frac{1}{2}\varphi_2(t) x^2 + \varphi_1(t) xv + \frac{1}{2} f_3(t) v^2 \right\} dx dv = 1 \tag{30}$$

Bằng cách biểu diễn

$$\frac{1}{2}\varphi_2(t)x^2+\varphi_1(t)xv+\frac{1}{2}f_3(t)v^2=\left(\frac{1}{2}f_3-\frac{\varphi_1^2}{2\varphi_2}\right)v^2-\left(\sqrt{-\frac{\varphi_2}{2}}\,x-\frac{\varphi_1}{\sqrt{-2\varphi_2}}\,v\right)^2$$

và sử dụng công thức

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2a},\ a>0 \tag{31}$$

từ (30) ta suy ra

$$e^{f_0(t)}\frac{2\pi}{\sqrt{\varphi_2 f_3-\varphi_1^2}}=1.$$

hay:

$$f_0(t)=ln\sqrt{\varphi_2 f_3-\varphi_1^2}-ln2\pi. \tag{32}$$

Như vậy điều kiện chuẩn (6) trong trường hợp này được thay bằng điều kiện tương đương (32) nếu hệ (29) có nghiệm thỏa mãn $\varphi_2 f_3-\varphi_1^2>0$, $\varphi_2<0$. Hệ phương trình (29) vẫn còn là hệ phương trình vi phân phi tuyến khó giải. Ta dùng phép biến đổi phi tuyến sau để đưa hệ này về hệ tuyến tính

$$\varphi_2=-\frac{F_1}{F_1F_3-F_2^2},\ \varphi_1=\frac{F_2}{F_1F_3-F_2^2},\ f_3=-\frac{F_3}{F_1F_3-F_2^2} \tag{33}$$

Trong đó F_1, F_2, F_3 là các hàm mới với $F_1F_3-F_2^2>0$, $F_1>0$

Phép biến đổi (33) thỏa mãn tính chất sau đây

$$(F_1F_3-F_2^2)(\varphi_2 f_3-\varphi_1^2)=\frac{(F_1F_3-F_2^2)^2}{(F_1F_3-F_2^2)^2}=1$$

Do đó từ (32) ta có thể biểu diễn f_o qua F_1, F_2, F_3

$$f_o(t)=ln\frac{1}{\sqrt{F_1F_3-F_2^2}}-ln2\pi \tag{34}$$

Từ phương trình đầu của hệ (29) và đẳng thức (34) ta có

$$\frac{DF_3(t)}{2(F_1F_3-F_2^2)}-\frac{1}{2(F_1F_3-F_2^2)}\frac{d}{dt}(F_1F_3-F_2^2)-a(t)=0$$

hay

$$\frac{d}{dt}(F_1F_3-F_2^2)=DF_3-2a(t)(F_1F_3-F_2^2) \tag{35}$$

Phương trình thứ hai của hệ (29) qua phép biến đổi phi tuyến (33) sẽ có dạng

$$\frac{F_1}{2}\frac{d}{dt}(F_1F_3-F_2^2)-\frac{1}{2}(F_1F_3-F_2^2)\frac{dF_1}{dt}-d(t)F_2(F_1F_3-F_2^2)-\frac{D}{2}F_2^2=0$$

Sử dụng phương trình (35) ta có thể viết tiếp

$$\frac{F_1}{2}[DF_3-2a(F_1F_3-F_2^2)]-\frac{1}{2}(F_1F_3-F_2^2)\frac{dF_1}{dt}-d(t)F_2(F_1F_3-F_2^2)-\frac{D}{2}F_2^2=0$$

hay

$$\frac{dF_1}{dt} + 2a(t)F_1 + 2d(t)F_2 - D = 0 \tag{36}$$

Tương tự như vậy qua phép biến đổi phi tuyến (33) hai phương trình sau cùng của hệ (29) sẽ biến đổi thành hai phương trình sau

$$\frac{dF_2}{dt} - F_1 + a(t)F_2 + d(t)F_3 = 0 \tag{37}$$

$$\frac{dF_3}{dt} - 2F_2 = 0 \tag{38}$$

Hệ 3 phương trình vi phân (36) – (38) là hệ phương trình vi phân tuyến tính kín đối với 3 ẩn F_1, F_2, F_3. Hệ này có vô số nghiệm, giữa các nghiệm này ta chỉ chọn các nghiệm thỏa mãn phương trình (35). Để minh họa ta xét trường hợp sau

$$a(t) = 0, \quad d(t) = \omega^2 = \text{const} \tag{39}$$

Khi đó hệ (36) – (39) sẽ có dạng

$$\frac{dF_1}{dt} + 2\omega^2 F_2 - D = = 0 \tag{40}$$

$$\frac{dF_2}{dt} - F_1 + \omega^2 F_3 = 0 \tag{41}$$

$$\frac{dF_3}{dt} - 2F_2 = 0 \tag{42}$$

Từ đó suy ra

$$F_1 = \frac{Dt}{2} - A\omega \sin(2\omega t + B), \quad F_2 = \frac{D}{4\omega^2} + A\cos(2\omega t + B), \tag{43}$$

$$F_3 = \frac{Dt}{2\omega^2} + \frac{A}{\omega}\sin(2\omega t + B).$$

Trong các nghiệm này, nghiệm thỏa mãn điều kiện (35) sẽ là

$$F_1 = \frac{Dt}{2}, \quad F_2 = \frac{D}{4\omega^2}, \quad F_3 = \frac{Dt}{2\omega^2} \tag{44}$$

Thay (44) vào (33) ta nhận được

$$\varphi_1(t) = \frac{4\omega^2 D}{4\omega^2 D^2 t^2 - D^2}, \quad \varphi_2(t) = -\frac{8\omega^4 Dt}{4\omega^2 D^2 t^2 - D^2}, \quad f_3(t) = -\frac{8\omega^2 Dt}{4\omega^2 D^2 t^2 - D^2} \tag{45}$$

Sau hết hàm mật độ xác suất sẽ là

$$W(x, \dot{x}, t) = \exp\left\{ \ln\frac{2\omega^2}{\pi\sqrt{4\omega^2 D^2 t^2 - D^2}} - \frac{4\omega^4 Dt}{4\omega^2 D^2 t^2 - D^2} x^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{4\omega^2 D}{4\omega^2 D^2 t^2 - D^2} x \dot{x} - \frac{4\omega^2 Dt}{4\omega^2 D^2 t^2 - D^2} \dot{x}^2 \right\} \tag{46}$$

Để cho các điều kiện (4), (5) thỏa mãn thời gian phải lớn hơn

$$t > \frac{1}{2\omega} \tag{47}$$

KẾT LUẬN

Các phương trình vi phân nhận được (35) – (38) có thể áp dụng để nghiên cứu dao động của các hệ cơ học tuyến tính một bậc tự do dưới kích động ngẫu nhiên và thông số.

Địa chỉ :
Viện Cơ học, Viện KHVN

Nhận ngày 30/6/1979

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. **Xtratonovich R.L.** Những vấn đề chọn lọc của lý thuyết thăng giáng trong kỹ thuật radio. Matscova, 1961, tiếng Nga.

2. **Soong T.T** Random differential equations in science and engineering. New York and London, 1973.

3. **Nguyễn đông Anh.** Khảo sát dao động ngẫu nhiên bằng phương pháp phương trình Fokker — Planck — Kolmogorov.

Tuyển tập các công trình nghiên cứu cơ học. Hà nội 1978.

RÉSUMÉ

SUR UNE SOLUTION NONSTATIONAIRE DE L'ÉQUATION FOKKER – PLANCK – KOLMOGOROV POUR UN SYSTEM DYNAMIQUE LINÉAIRE À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ

Dans cet article à l'aide de la méthode du développement en séries de Maclaurin à la variable de vitesse, nous avons déterminé un system d'équations différentielles pour les coefficieles de la solution nonstationaire de l'équation FPK pour un system dynamique linéaire à un degré de liberté.

Par suite, avec une transformation non linéaire, on a obtenu une solution nonstationaire de cette équation.