

SỰ VA CHẠM CỦA VẬT RẮN VÀO THANH ĐÀN HỒI TIẾT DIỆN THAY ĐỔI

NGUYỄN THỨC AN, VŨ VĂN NGUYỄN

NỘI dung bài báo này nghiên cứu sự va chạm của vật rắn vào thanh đàn hồi tiết diện thay đổi hình bậc thang có kể đến lực cản ở mặt bên, ở đầu thanh và đệm ở đầu thanh. Mô hình bài toán này đã được xét ở [1], nhưng tác giả không chú ý đến lực cản ở mặt bên và ở đầu thanh.

§1. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA THANH VÀ CÁC ĐIỀU KIỆN CỦA BÀI TOÁN

Giả thiết lực cản ở mặt bên phân bố đều ở mỗi phần thanh. Xét cân bằng 1 yếu tố thanh, ta thêm vào lực cản $\frac{r_i q_i dx dy dz}{F_i}$ tác dụng lên yếu tố này.

Phương trình chuyển động các phần của thanh là:

$$\frac{\partial U_i^2}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{\partial U_i^2}{\partial x^2} + K_i \right] \quad (1.1)$$

Với $i = \overline{1, n}$, là chỉ số phần thanh.

Nghiệm tổng quát của (1.1) theo Đa lăm be là:

$$U_i = \varphi_i(at - x) + \psi_i(at + x) - \frac{K_i}{2} (l_1 + \dots + l_i - x)^2 \quad (1.2)$$

Ở đây: a - vận tốc truyền sóng đàn hồi trong thanh, $K_i = \frac{r_i q_i}{E F_i}$, E - mô đun đàn hồi của thanh, r_i , F_i , q_i - chu vi tiết diện ngang, diện tích tiết diện ngang và lực cản phân bố đều trên mỗi đơn vị diện tích mặt bên phần thứ i của thanh; u_i - dịch chuyển tại các tiết diện phần thứ i của thanh.

Điều kiện đầu của bài toán: với $t = 0$, thì:

$$U_i = 0; \quad \frac{\partial U_i}{\partial t} = 0 \quad (1.3)$$

Điều kiện biên của bài toán: với $x = 0$, ta có:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x} = - \frac{P(t)}{E F_i} \quad (1.4)$$

Với $x = l_1 + \dots + l_{i-1}$ thì:

$$\frac{\partial U_{i-1}}{\partial x} = \alpha_{i-1} \frac{\partial U_i}{\partial x}; \quad \frac{\partial U_{i-1}}{\partial t} = \frac{\partial U_i}{\partial t} \quad (1.5)$$

Ở đây: $\alpha_{i-1} = \frac{F_i}{F_{i-1}}$ với $i = 2, n$; l_i - chiều dài phần thứ i của thanh.

Ở tại đầu thanh $x = l$, ta sẽ xét các trường hợp sau:

$$a) \frac{\partial U_n}{\partial t} = 0 \quad (1.6)$$

$$b) \frac{\partial U_n}{\partial x} = -\frac{R}{EF_n} + \mu \frac{\partial U_n}{\partial t} \quad (1.7)$$

Ở đây: $R = \text{const}$ là lực ma sát cu lông, μ là hệ số nhớt được coi là hằng số.

$$c) \frac{\partial U_n}{\partial x} = -\frac{KU_n}{EF_n} \quad (1.8)$$

Ở đây: K - hệ số đàn hồi.

§ 2. XÁC ĐỊNH CÁC HÀM SỐNG $\varphi'(at-x)$ VÀ $\psi'(at+x)$

Theo [2] lực đàn hồi $P(t)$ của bộ phận giảm sóc ở đầu thanh ($x=0$) được xác định từ phương trình:

$$\ddot{P} + 2n\dot{P} + (n^2 + \omega_1^2)P = -2ca^2 \ddot{\psi}_1(at) \quad (2.1)$$

Ở đây: $n = \frac{ca}{2EF_1}$, $\omega_1^2 = \frac{c}{M} - \left(\frac{ca}{FF_1}\right)^2$, M - Khối lượng của vật rắn, c - độ cứng của bộ phận giảm sóc.

Trường hợp $0 \leq t \leq \frac{2l_1}{a}$, sóng phản $\psi_1'(at)$ chưa xuất hiện ở đầu thanh ($x=0$), từ (1.4) ta có:

$$\varphi_1'(at) = \frac{P(t)}{EF_1} + K_1 l_1 \quad (2.2)$$

Trường hợp $t > \frac{2l_1}{a}$, sóng phản $\psi_1'(at)$ đã xuất hiện ở đầu thanh ($x=0$), từ (1.4) ta có:

$$\varphi_1'(at) = \frac{P(t)}{EF_1} + \psi_1'(at) + K_1 l_1 \quad (2.3)$$

Từ (2.2) và (2.3) ta xác định được sóng $\varphi_1^2(at-x)$ ở các miền phần 1 của thanh.

Từ (1.5) tại tiết diện $x = l_1$ ta có:

$$\psi_1'(at+l_1) - \varphi_1'(at-l_1) = \alpha_1 [\psi_2'(at+l_1) - \varphi_2'(at-l_1) + K_2 l_2]$$

$$\psi_1'(at+l_1) + \varphi_1'(at-l_1) = \psi_2'(at+l_1) + \varphi_2'(at-l_1) \quad (2.4)$$

Giải hệ phương trình (2.4), ta có:

$$\begin{aligned} \varphi_2'(at-l_1) &= \frac{2}{1+\alpha_1} \varphi_1'(at-l_1) + \frac{\alpha_1-1}{1+\alpha_1} \psi_2'(at+l_1) + \frac{\alpha_1 K_2 l_2}{1+\alpha_1} \\ \psi_1'(at+l_1) &= \frac{1-\alpha_1}{2} \varphi_2'(at-l_1) + \frac{1+\alpha_1}{2} \psi_2'(at+l_1) + \frac{\alpha_1 K_2 l_2}{2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Từ (2.5) có thể xác định được các sóng $\psi_1'(at+x)$ và $\psi_2'(at-x)$ ở các tiết diện phần 1 và phần 2 của thanh.

Từ (1.5) tại tiết diện $x = l_1 + l_2 + \dots + l_{i-1}$, lý luận tương tự như trên ta có :

$$\begin{aligned}\varphi_i' &= \frac{2}{1 + \alpha_{i-1}} \varphi_{i-1}' + \frac{\alpha_{i-1} - 1}{1 + \alpha_{i-1}} \psi_i' + \frac{\alpha_{i-1} K_i l_i}{1 + \alpha_{i-1}} \\ \psi_{i-1}' &= \frac{1 + \alpha_{i-1}}{2} \varphi_i' + \frac{1 - \alpha_{i-1}}{2} \psi_i' + \frac{\alpha_{i-1} K_i l_i}{2}\end{aligned}\quad (2.6)$$

Từ (2.6) có thể xác định được các sóng $\varphi_i'(at-x)$ và $\psi_{i-1}'(at+x)$ tại các tiết diện phần i và (i-1) của thanh.

Từ (1.5) tại tiết diện $x = l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1}$, lý luận tương tự như trên ta có :

$$\begin{aligned}\varphi_n' &= \frac{2}{1 + \alpha_{n-1}} \varphi_{n-1}' + \frac{\alpha_{n-1} - 1}{1 + \alpha_{n-1}} \psi_n' + \frac{\alpha_{n-1} K_n l_n}{1 + \alpha_{n-1}} \\ \psi_{n-1}' &= \frac{1 - \alpha_{n-1}}{2} \varphi_n' + \frac{1 + \alpha_{n-1}}{2} \psi_n' + \frac{\alpha_{n-1} K_n l_n}{2}\end{aligned}\quad (2.7)$$

Từ (2.7) có thể xác định được các sóng $\varphi_n'(at-x)$ và $\psi_{n-1}'(at+x)$ ở các tiết diện phần n và (n-1) của thanh.

Để xác định sóng $\psi_n'(at+x)$ ở các tiết diện phần n của thanh, ta dựa vào điều kiện biên tại đầu thanh $x = l_1 + l_2 + \dots + l_n = L$.

Từ hệ thức (1.6) $\frac{\partial U_n}{\partial t} = 0$, ta có :

$$\psi_n'(at+L) = -\varphi_n'(at-L) \quad (2.8)$$

Từ (2.8) có thể xác định được sóng $\psi_n'(at+x)$ ở các tiết diện phần n của thanh.

Từ (1.7) $\frac{\partial u_n}{\partial x} = -\frac{R}{EF_n} + \mu \frac{\partial u_n}{\partial t}$, ta có :

$$\psi_n'(at+L) - \varphi_n'(at-L) = -\frac{R}{EF_n} + \mu a [\varphi_n'(at-L) + \psi_n'(at+L)]$$

Suy ra :

$$\psi_n'(at+L) = -\frac{R}{(1 - \mu a) EF_n} + \frac{1 + \mu a}{1 - \mu a} \varphi_n'(at-L) \quad (2.9)$$

Nếu $R = 0$ và $\mu = 0$ thì từ (2.9) ta có :

$$\psi_n'(at+L) = \varphi_n'(at-L)$$

Nếu $\mu = 0$ thì từ (2.9) ta có :

$$\psi_n'(at+L) = -\frac{R}{EF_n} + \varphi_n'(at-L)$$

Do đó ta xác định được sóng $\psi_n'(at+x)$ tại các tiết diện phần n của thanh.

Từ (1.8) : $\frac{\partial u_n}{\partial x} = -\frac{K}{EF_n} u_n$, ta có :

$$\varphi_n'(at-L) - \frac{K}{EF_n} \varphi_n'(at-L) = \psi_n'(at+L) + \frac{K}{EF_n} \psi_n'(at+L) \quad (2.10)$$

Đặt $\frac{K}{EF_n} = \lambda$, $at + l = Z$, $at - l = Z - 2l$.

Phương trình (2.10) có dạng:

$$\psi_n'(Z) + \lambda \psi_n(Z) = \varphi_n'(Z - 2l) - \lambda \varphi_n'(Z - 2l)$$

Giải phương trình ta có:

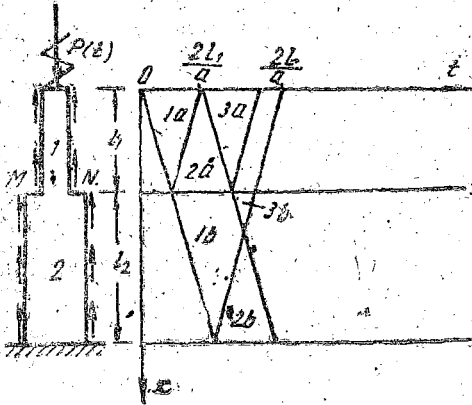
$$\psi_n'(Z) = C_j e^{-\lambda Z} + e^{-\lambda Z} \int e^{\lambda Z} [\varphi_n'(Z - 2l) - \lambda \varphi_n(Z - 2l)] dZ \quad (2.11)$$

Các hằng số C_j tìm được dựa vào tính liên tục của dịch chuyển ở tiết diện $x = l$ tại các thời điểm. Suy ra có thể xác định được sóng $\psi_n'(at + x)$ ở các tiết diện phần n của thanh.

Sau khi tìm được các sóng $\varphi_i'(at - x)$ và $\psi_i'(at + x)$ ở các tiết diện của thanh, ta xác định được dịch chuyển, biến dạng và vận tốc ở tiết diện bất kỳ của thanh.

§3. VÍ DỤ

Sự va chạm của vật rắn vào thanh đàn hồi tiết diện thay đổi hình bậc thang gồm



2 phần có tính lực cản ở mặt bên và đầu thanh tựa trên nền cứng. Sơ đồ bài toán chỉ ra trên hình vẽ. Xác định biến dạng ở các tiết diện của thanh với $0 \leq t \leq \frac{2l_1}{a}$.

Trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq \frac{2l_1}{a}$

sóng phản ψ_i' chưa xuất hiện ở đầu thanh ($x=0$), phương trình (2.1) có dạng:

$$\ddot{P} + 2n\dot{P} + (n^2 + \omega_1^2) P = 0 \quad (3.1)$$

Xét trường hợp $\omega_1^2 > 0$, với điều kiện

dầu nghiệm cụ thể của (3.1) có dạng.

$$P = \frac{cv_y}{\omega_1} e^{-nt} \sin \omega_1 t \quad (3.2)$$

Ở đây: v_y - vận tốc ban đầu của vật rắn trước lúc va chạm.

Biến dạng ở đầu thanh ($x=0$) là:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\varphi_1'(at) + K_1 l_1 = -\frac{P(t)}{EF_1} = -\frac{cv_y}{EF_1 \omega_1} e^{-nt} \sin \omega_1 t$$

Suy ra sóng

$$\varphi_i'(at) = \frac{cv_y}{EF_1 \omega_1} e^{-nt} \sin \omega_1 t + K_1 l_1$$

Vậy sóng $\varphi_i'(at-x)$ ở các tiết diện phần 1 của thanh trong miền 1a và 2a là:

$$\varphi_i'(at-x) = \frac{cv_y}{EF_1 \omega_1} e^{-n\left(t - \frac{x}{a}\right)} \sin \omega_1 \left(t - \frac{x}{a}\right) + K_1 l_1$$

Biểu dạng ở các tiết diện phần 1 của thanh trong miền 1a là:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = -\varphi_1'(at-x) + K_1(l_1-x) = -\frac{CV_y}{EF_1\omega_1} e^{-n\left(t-\frac{x}{a}\right)} \sin\omega_1\left(t-\frac{x}{a}\right) - K_1x.$$

Tại tiết diện MN trong miền 1b và 3b sóng ψ_2^2 chưa xuất hiện, từ (2.5) ta có:

$$\varphi_2^2(at-l_1) = \frac{2}{1+\alpha_1} \varphi_1'(at-l_1) + \frac{\alpha_1 K_2 l_2}{1+\alpha_1}$$

Vậy sóng $\varphi_2^2(at-x)$ tại các tiết diện phần 2 của thanh trong các miền 1b và 2b là:

$$\varphi_2^2(at-x) = \frac{2CV_y e^{-n\left(t-\frac{x}{a}\right)}}{(1+\alpha_1)EF_1\omega_1} \sin\omega_1\left(t-\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{1+\alpha_1} (2K_1 l_1 + \alpha_1 K_2 l_2)$$

Biểu dạng tại các tiết diện của phần 2 của thanh ở miền 1b là:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_2}{\partial x} = -\varphi_2^2'(at-x) + K_2(l-x) &= \frac{-2CV_y e^{-n\left(t-\frac{x}{a}\right)}}{(1+\alpha_1)EF_1\omega_1} \sin\omega_1\left(t-\frac{x}{a}\right) + \\ &+ K_2(l-x) - \frac{1}{1+\alpha_1} (2K_1 l_1 + \alpha_1 K_2 l_2) \end{aligned}$$

Từ (2.5) ta có:

$$\begin{aligned} \psi_1'(at+l_1) &= \frac{(1-\alpha_1) CV_y}{(1+\alpha_1) EF_1\omega_1} e^{-n\left(t-\frac{l_1}{a}\right)} \sin\omega_1\left(t-\frac{l_1}{a}\right) + \\ &+ \frac{1}{1+\alpha_1} [(1-\alpha_1) K_1 l_1 + \alpha_1 K_2 l_2]. \end{aligned}$$

Vậy sóng $\psi_1'(at+x)$ tại các tiết diện phần 1 của thanh ở miền 2a và 3a là:

$$\begin{aligned} \psi_1'(at+x) &= \frac{(1-\alpha_1) CV_y}{(1+\alpha_1) EF_1\omega_1} e^{-n\left(t-\frac{2l_1}{a}+\frac{x}{a}\right)} \sin\omega_1\left(t-\frac{2l_1}{a}+\frac{x}{a}\right) + \\ &+ \frac{1}{1+\alpha_1} [(1-\alpha_1) K_1 l_1 + \alpha_1 K_2 l_2]. \end{aligned}$$

Biểu dạng tại các tiết diện phần 1 của thanh ở miền 2a là:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x} &= -\frac{CV_y}{EF_1\omega_1} e^{-n\left(t-\frac{x}{a}\right)} \sin\omega_1\left(t-\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{1+\alpha_1} [(1-\alpha_1) K_1 l_1 + \alpha_1 K_2 l_2] + \\ &+ \frac{CV_y (1-\alpha_1)}{(1+\alpha_1) EF_1\omega_1} e^{-n\left(t-\frac{2l_1}{a}+\frac{x}{a}\right)} \sin\omega_1\left(t-\frac{2l_1}{a}+\frac{x}{a}\right) + K_1(2l_1-x). \end{aligned}$$

Từ điều kiện (1.6) tại đầu thanh ($x=1$) thì $\frac{\partial U_2}{\partial t} = 0$, ta có:

$$\psi_2^2(at+l) = -\varphi_2^2(at-l)$$

Vậy sóng

$$\psi_2^2(at+l) = -\frac{2CV_y e^{-n\left(t-\frac{l}{a}\right)}}{(1+\alpha_1)EF_1\omega_1} \sin\omega_1\left(t-\frac{l}{a}\right) - \frac{1}{1+\alpha_1} (2K_1 l_1 + \alpha_1 K_2 l_2).$$

Sóng ψ^* ($at+x$) tại các tiết diện phần 2 của thanh trong miền 2b... là:

$$\psi_2^*(at+x) = -\frac{2CV_y e^{-n\left(t-\frac{2l}{a}+\frac{x}{a}\right)}}{(1+\alpha_1)EF_1\omega_1} \sin \omega_1 \left(t-\frac{2l}{a}+\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{1+\alpha_1} (2K_1 l_1 + \alpha_1 K_2 l_2).$$

Biến dạng tại các tiết diện phần 2 của thanh trong miền 2b là:

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} = -\frac{2CV_y}{(1+\alpha_1)EF_1\omega_1} \left[e^{-n\left(t-\frac{2l}{a}+\frac{x}{a}\right)} \sin \omega_1 \left(t-\frac{2l}{a}+\frac{x}{a}\right) + e^{-n\left(t-\frac{x}{a}\right)} \sin \omega_1 \left(t-\frac{x}{a}\right) \right] + K_2(l-x) - \frac{2}{1+\alpha_1} (2K_1 l_1 + \alpha_1 K_2 l_2).$$

Địa chỉ:
Đại học Thủy lợi

Nhận ngày 24/10/1979

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. ФРЕНКИНА И. П., ХАРИТОНОВА А. Н. Распространение упругих волн в стержне переменного сечения. Материалы всесоюзного симпозиума по распространению упруго — пластических волн в сплошных средах. Баку, 1964.
2. NGUYỄN THỨC AN. Áp dụng lý thuyết sóng vào bài toán cọc. Tạp chí KHKT N°2, 1978.

РЕЗЮМЕ

УДАР ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО УПРУГОМУ СТЕРЖНЮ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

В данной работе изучается распространение упругих волн в стержне переменного сечения с сопротивлением по боковой поверхности стержня и в его конце