Tạp chí CƠ HỌC T. IV, 1982 Số 3 (trang 16-21)

ẢNH HƯỞNG CỦA NHIỄU NGẪU NHIÊN LÊN DAO ĐỘNG THAM SỐ CỦA HỆ PHI TUYẾN MỘT BẬC TỰ DO

ĐẶNG HỮU THỊNH

§1. Trong bài này chúng tôi nghiên cứu sự ảnh hưởng của nhiễu ngẫu nhiên dừng lên dao động tham số trong vùng cộng hưởng của hệ phi tuyến một bậc tự do. Phương trình chuyển động của hệ khi đó có dạng.

$$\ddot{X} + 2\varepsilon\delta\omega_0\dot{X} + \omega_0^2(1 + \varepsilon h\sin 2\nu t)X + \varepsilon\mu g(X, \dot{X}) = \sqrt{\varepsilon}\,\beta\,\eta(t) \qquad (1.\ 1)$$

trong đó δ, ω_0 tương ứng là hệ số tắt dần và tần số dao động riêng của hệ; h, 2ν là biên độ và tần số của kích động tuần hoàn; $\eta(t)$ là quá trình ngẫu nhiên dừng có giá trị trung bình bằng không; ε, β, μ là các tham số bé, hàm $g(x, \dot{x})$ được giả thiết là phi tuyến và giải tích của các biến x, $\dot{x}$. Ở đây chúng ta chỉ quan tâm tới trường hợp thú vị nhất là khi có cộng hưởng tham số cơ bản, tức là khi $\nu \approx \omega_0$

Đặt. $\omega_0^2 = \nu^2 + \varepsilon\Delta$

trong đó $\varepsilon\Delta$ là độ sai lệch của bình phương các tần số, phương trình (1. 1) được viết lại như sau:

$$\ddot{X} + \nu^2 X = -\varepsilon\left[2\delta\omega_0\dot{X} + (\Delta + \omega_0^2 h\sin 2\nu t)X + \mu g(X, \dot{X})\right] + \sqrt{\varepsilon}\,\beta\eta(t). \qquad (1.\ 2)$$

Dùng phép đổi biến:

$$x = x_1\cos\nu t + x_2\sin\nu t \qquad (1.\ 3a)$$

$$\dot{x} = \nu(-x_1\sin\nu t + x_2\cos\nu t). \qquad (1.\ 3b)$$

phương trình (1. 2) được đưa về dạng chuẩn:

$$\frac{dX_1}{dt} = \varepsilon\left\{2\delta\omega_0\left(-X_1\sin^2\nu t + \frac{1}{2}X_2\sin 2\nu t\right) + \right.$$

$$+\left(\frac{\Delta}{\nu} + \omega_0 h\sin 2\nu t\right)\left(\frac{1}{2}X_1\sin 2\nu t + X_2\sin^2\nu t\right) + \qquad (1.\ 4a)$$

$$\left.\frac{\mu\sin\nu t}{\nu}g\left[X_1\cos\nu t + X_2\sin\nu t,\ \nu(-X_1\sin\nu t + X_2\cos\nu t)\right]\right\} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\nu}\beta\eta(t)\sin\nu t.$$

$$\frac{dX_2}{dt} = -\varepsilon\left\{2\delta\omega_0\left(-\frac{X_1}{2}\sin 2\nu t + X_2\cos^2\nu t\right) + \right.$$

$$+\left(\frac{\Delta}{\nu} + \omega_0 h\sin 2\nu t\right)\left(X_1\cos^2\nu t + \frac{X_2}{2}\sin 2\nu t\right) + \frac{\mu\cos\nu t}{\nu}g\left[X_1\cos\nu t + X_2\sin\nu t,\right. \qquad (1.\ 4b)$$

$$\nu(-X_1\sin\nu t + X_2\cos\nu t)\Big]\Big\} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\nu}\beta\eta(t)\cos\nu t.$$

Nếu thời gian tương quan của hai quá trình x_1, x_2 là lớn hơn rất nhiều thời gian tương quan của quá trình $\eta(t)$ thì nghiệm của hệ phương trình (1. 4) có thể tiệm cận trong khoảng thời gian cấp $O(\varepsilon^{-1})$ bởi quá trình vec-tơ Mác-cốp liên tục với xác suất bằng một. Cách xác định các phương trình xấp xỉ này do Stratonovich [1] và Haminski [2] đưa ra. Áp dụng đối với các phương trình (1. 4) chúng ta sẽ nhận được hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} \frac{dX_1}{dt} &= \varepsilon\left[a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \frac{\mu}{\nu}g_1(X_1, X_2)\right] + \sqrt{\varepsilon}\beta\xi_1(t) \\ \frac{dX_2}{dt} &= \varepsilon\left[a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \frac{\mu}{\nu}g_2(X_1, X_2)\right] + \sqrt{\varepsilon}\beta\xi_2(t) \end{aligned} \tag{1. 5}$$

trong đó $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ là các quá trình ồn trắng có giá trị trung bình bằng không, và có cường độ bằng nhau là:

$$b = \frac{1}{2\nu^2}S_\eta(\omega_o) \text{ còn}$$

$$\left.\begin{aligned} &a_{11} = \omega_o\left(\frac{h}{4} - \delta\right),\ a_{12} = -a_{21} = \frac{\Delta}{2\nu},\ a_{22} = -\omega_o\left(\frac{h}{4} + \delta\right) \\ &S_\eta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \eta(t)\eta(t+\tau)\rangle \cos\omega\tau d\tau = 2\int_0^{\infty} R_\eta(\tau)\cos\omega\tau d\tau \end{aligned}\right\} \tag{1. 6}$$

$$\left.\begin{aligned} g_1(X_1, X_2) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\left[X_1\cos\psi + X_2\sin\psi,\ \nu(-X_1\sin\psi + X_2\cos\psi)\right]\sin\psi d\psi \\ g_2(X_1, X_2) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\left[X_1\cos\psi + X_2\sin\psi,\ \nu(-X_1\sin\psi + X_2\cos\psi)\right]\cos\psi d\psi \end{aligned}\right\} \tag{1. 7}$$

Bây giờ chúng ta sẽ xác định các đặc trưng xác suất cơ bản của quá trình ra của hệ (1. 5) trong trường hợp dừng bằng phương pháp tuyến tính hóa thống kê [3.4]. Chúng ta sẽ biểu diễn các biến ngẫu nhiên x_1 và x_2 dưới dạng.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= m_1 + y_1 \\ x_2 &= m_2 + y_2 \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

trong đó:

$$m_i = \langle x_i \rangle = \text{const}\ (i = 1,2) \tag{1.9}$$

Khi đó các phương trình (1.5) tương đương với phương trình sau:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + \frac{\mu}{\nu}\langle g_1(m_1 + y_1,\ m_2 + y_2)\rangle = 0 \\ \varphi_2 &= a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + \frac{\mu}{\nu}\langle g_2(m_1 + y_1,\ m_2 + y_2)\rangle = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \varepsilon[k_{11}y_1 + k_{12}y_2] + \sqrt{\varepsilon}\beta\xi_1(t) \\ \frac{dy_2}{dt} &= \varepsilon[k_{21}y_1 + k_{22}y_2] + \sqrt{\varepsilon}\beta\xi_2(t) \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

$$k_{ij} = \frac{\partial\varphi_i}{\partial m_j},\quad (i,\ j = 1,2) \tag{1.12}$$

Vì hàm mật độ xác suất của quá trình ra đối với hệ tuyến tính ($\mu = 0$) có dạng chuẩn, nên chúng ta sẽ giả thiết là quá trình ra trong trường hợp phi tuyến yếu ($0 < \varepsilon\mu \ll 1$) cũng sẽ có dạng chuẩn. Khi đó chúng ta có thể biểu diễn các mômen bậc cao qua các mômen cấp hai; điều đó có nghĩa là:

$$\varphi_i = \varphi_i\,(m_1, \; m_2, \, d_{11}, \; d_{12}, \; d_{22}) \quad (i = 1,2)$$

trong đó:

$$d_{ij} = \langle y_i \, y_j \rangle \qquad (i, \; j = 1,2)$$

Từ (1.11) chúng ta nhận được các phương trình đại số cho các momen cấp hai dưới dạng:

$$\left.\begin{array}{l} 2k_{11}d_{11} \; + 2k_{12}d_{12} \qquad\qquad\qquad = -\,b\beta \\ k_{21}d_{11} \quad + (k_{11} + k_{22})\, d_{12} + k_{12}d_{22} = 0 \\ 2\,k_{21}d_{12} + 2\,k_{22}d_{22} \qquad\qquad\quad = -\,b\beta \end{array}\right\} \tag{1.13}$$

Như vậy chúng ta đã nhận được 5 phương trình đại số (1.10), (1.13) với k_{ij} được tính từ (1.12). Từ những phương trình này có thể xác định được các đặc trưng xác suất m_1, m_2, d_{11}, d_{12}, d_{22}, của quá trình ra của hệ (1.5) trong trường hợp dừng.

Giá trị trung bình của quá trình ngẫu nhiên không dừng (1.3a) được xác định như sau /6. p. 1,4 /:

$$[X] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \langle X \rangle \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \langle m_2 \cos\nu t + m_2 \sin\nu t \rangle \, dt = 0 \tag{1.14}$$

Phương sai của quá trình này được xác định bởi biểu thức:

$$D_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \langle (x(t) - / \, x \, /)^2 \rangle \, dt, \tag{1.15}$$

Đặt (1.3a) vào (1.15) chúng ta sẽ nhận được:

$$D_x = -\frac{1}{2}\,(m_1^2 + m_2^2 + d_{11} + d_{22}) \tag{1.16}$$

§ 2. Trong phần này chúng tôi sẽ giới thiệu một phương pháp tính gần đúng các đại lượng m_1, m_2, d_{11}, d_{12}, d_{22} từ hệ các phương trình (1.10), (1.13). Giả sử hệ tiền định nhận được từ hệ (1.1) bằng cách đặt $\beta = 0$, có dao động tham số ổn định:

$$x_0(t) = a_1 \cos \nu t + a_2 \sin \nu t \tag{2.1}$$

trong đó các hằng số a_1, a_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}a_1 + a_{12}a_2 + \dfrac{\mu}{\nu}\, g_1(a_1, \; a_2) = 0 \\[2ex] a_{21}a_1 + a_{22}a_2 + \dfrac{\mu}{\nu}\, g_2(a_1, \; a_2) = 0 \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

Khi β nhỏ, các mómen cấp một và cấp hai giả sử là các hàm giải tích của tham số này. Các hàm này cần phải thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\left.\begin{array}{l} m_i(\beta)\Big|_{\beta=0} = a_i \\ d_{ij}(\beta)\Big|_{\beta=0} = 0 \end{array}\right. \qquad (i, \; j = 1,2) \tag{2.3}$$

Chúng ta sẽ tìm $m_i(\beta)$ và $d_{ij}(\beta)$ dưới dạng:

$$m_i(\beta) = a_i + m_i^{(1)}\beta + m_i^{(2)}\beta^2 + \ldots \qquad (2.4)$$

$$d_{ij}(\beta) = d_{ij}^{(1)}\beta + d_{ij}^{(2)}\beta^2 + \ldots$$

Khai triển hàm $g_i(m_1 + y_1, m_2 + y_2)$ thành chuỗi lũy thừa trong lân cận của điểm (m_1, m_2) và biểu diễn các momen cấp cao qua các momen cấp hai, chúng ta sẽ nhận được:

$$< g_i(m_1+y_1,\ m_2+y_2) > = g_i(m_1,\ m_2) + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{2} \frac{\partial^2 g_i}{\partial X_k \partial X_l}\Bigg|_{\substack{x_1=a_1\\x_2=a_2}} d_{kl} + O_i(d_{kl}) \qquad (2.5)$$

trong đó $O_i(d_{kl})$, $(i = 1,2)$ là ký hiệu các số hạng bậc cao hơn một của momen d_{kl}.

Đặt (2.4) vào (2.5) và khai triển thành chuỗi lũy thừa của tham số β, chúng ta sẽ nhận được:

$$< g_i(m_1 + y_1,\ m_2 + y_2) > = g_i(a_1,\ a_2) +$$

$$\left[\frac{\partial g_i}{\partial X_1}\Bigg|_{\substack{x_1=a_1\\x_2=a_2}} m_1^{(1)} + \frac{\partial g_i}{\partial X_2}\Bigg|_{\substack{x_1=a_1\\x_2=a_2}} m_2^{(1)} + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{2} \frac{\partial^2 g_i}{\partial X_k \partial X_l}\Bigg|_{\substack{x_1=a_1\\x_2=a_2}} d_{kl}^{(1)}\right]\beta + O_i(\beta) \qquad (2.6)$$

Từ (1.10), (1.12) và (2.6) chúng ta có:

$$k_{ij} = a_{ij} + \frac{\mu}{\nu}\frac{\partial}{\partial m_j} < g_i(m_1 + y_1,\ m_2 + y_2) > =$$

$$\left(a_{ij} + \frac{\mu}{\nu}\frac{\partial g_i}{\partial X_j}\Bigg|_{\substack{x_1=a_1\\x_2=a_2}}\right)\frac{\mu}{\gamma} + \left[\frac{\partial^2 g_i}{\partial X_1 \partial X_j}\Bigg|_{\substack{x_1=a_1\\x_2=a_2}} m_1^{(1)} +\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 g_i}{\partial X_2 \partial X_j}\Bigg|_{\substack{x_1=a_1\\x_2=a_2}} m_2^{(1)} = \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{2} \frac{\partial^3 g_i}{\partial X_k \partial X_l \partial X_j}\Bigg|_{\substack{x_1=a_1\\x_2=a_2}} d_{kl}^{(1)}\right]\beta + O_{ij}(\beta) \qquad (2.7)$$

Đặt (2.4) và (2.7) vào các phương trình (1.13) và cân bằng các hệ số của các lũy thừa cùng bậc của β ở hai vế, chúng ta sẽ nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính:

$$\left.\begin{aligned} 2k_{11}^{(0)} d_{11}^{(1)} + 2k_{12}^{(0)} d_{12}^{(1)} &= -b \\ k_{21}^{(0)} d_{11}^{(1)} + (k_{11}^{(0)} + k_{22}^{(0)})\, d_{12}^{(1)} + k_{12}^{(0)} d_{22}^{(1)} &= 0 \\ 2k_{21}^{(0)} d_{12}^{(1)} + 2k_{22}^{(0)} d_{22}^{(1)} &= -b \end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

trong đó:

$$k_{ij}^{(0)} = a_{ij} + \frac{\mu}{\nu}\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\Bigg|_{\substack{x_1=a_1\\x_2=a_2}} \qquad (2.9)$$

Nghiệm của hệ (2.8) sẽ là:

$$d_{11} = \frac{-b\left[k_{22}^{(0)}\left(k_{11}^{(0)} + k_{22}^{(0)}\right) + k_{12}^{(0)}\left(k_{12}^{(0)} - k_{21}^{(0)}\right)\right]}{2\left(k_{11}^{(0)} + k_{22}^{(0)}\right)\left(k_{11}^{(0)}k_{22}^{(0)} - k_{12}^{(0)}k_{21}^{(0)}\right)} \qquad (2.10)$$

$$d_{12} = \frac{b\left(k_{11}^{(0)} k_{12}^{(0)} + k_{22}^{(0)} k_{21}^{(0)}\right)}{2\left(k_{11}^{(0)} + k_{22}^{(0)}\right)\left(k_{11}^{(0)} k_{22}^{(0)} - k_{10}^{(0)} k_{21}^{(0)}\right)}$$

$$d_{22} = -\frac{b\left[k_{11}^{(0)}\left(k_{11}^{(0)} + k_{22}^{(0)}\right) + k_{21}^{(0)}\left(k_{21}^{(0)} - k_{12}^{(0)}\right)\right]}{2\left(k_{11}^{(0)} + k_{22}^{(0)}\right)\left(k_{11}^{(0)} k_{22}^{(0)} - k_{12}^{(0)} k_{21}^{(0)}\right)},$$

Để xác định các đại lượng $m_1^{(1)}$, $m_2^{(1)}$ chúng ta thế (2.4), (2.7) vào (1.13) và cân bằng các hệ số lũy thừa bậc hai của β

Kết quả chúng ta nhận được:

$$k_{11}^{(0)} m_1^{(1)} + k_{12}^{(0)} m_2^{(1)} = -\frac{\mu}{\nu} \sum_{k,l=1}^{2} \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_k \partial x_l}\Bigg|_{\substack{x_1=a_1\\x_2=a_2}} d_{kl}^{(1)} \tag{2.11}$$

$$k_{21}^{(0)} m_1^{(1)} + k_{22}^{(0)} m_2^{(1)} = -\frac{\mu}{\nu} \sum_{k,l=1}^{2} \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_k \partial x_l}\Bigg|_{\substack{x_1=a_1\\x_2=a_2}} d_{kl}^{(2)}$$

Từ đó có thể tính được $m_1^{(1)}$, $m_2^{(1)}$

Như vậy ở xấp xỉ bậc nhất, chúng ta có:

$$m_1 = a_1 + m_1^{(1)} \beta$$

$$m_2 = a_2 + m_2^{(1)} \beta \tag{2.12}$$

$$d_{ij} = d_{ij}^{(1)} \beta \qquad (i, j = 1, 2)$$

Hoàn toàn tương tự chúng ta xác định được m_1, m_2, d_{ij} ở các xấp xỉ cấp cao hơn. Đặt (2.12) vào (1.16) chúng ta có:

$$D_x = \frac{a^2}{2} + \left[m_1^{(1)} a_1 + m_2^{(1)} a_2 + \frac{1}{2}\left(d_{11}^{(1)} + d_{22}^{(1)}\right)\right]\beta \tag{2.13}$$

Gọi $\sigma_x = \sqrt{D_x}$ là độ lệch chuẩn, còn $\sigma_{x_0}^2 = \frac{a^2}{2}$ là phương sai của dịch chuyển x khi chỉ có kích động tham số tác động lên hệ, hệ thức (2.13) sẽ được viết như sau:

$$\sigma_x^2 = \sigma_{x_0}^2 + \left[m_1^{(1)} a_1 + m_2^{(1)} a_2 + \frac{1}{2}\left(d_{11}^{(1)} + d_{22}^{(1)}\right)\right]\beta \tag{2.14}$$

trong đó:

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2$$

§3. Bây giờ chúng ta sẽ xét một vài ví dụ cụ thể của hàm phi tuyến.

a) Giả sử $g(x, \dot{x}) = x^3$, còn $\eta(t)$ là quá trình ồn trắng với cường độ đơn vị, t. l. $S_{\eta\eta}(\omega) = 1$. Phương trình (1.7) có dạng:

$$g_1(x_1, x_2) = \frac{3}{8} x_2 \left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

$$g_2(x_1, x_2) = -\frac{3}{8} x_1 \left(x_1^2 + x_2^2\right) \tag{3.1}$$

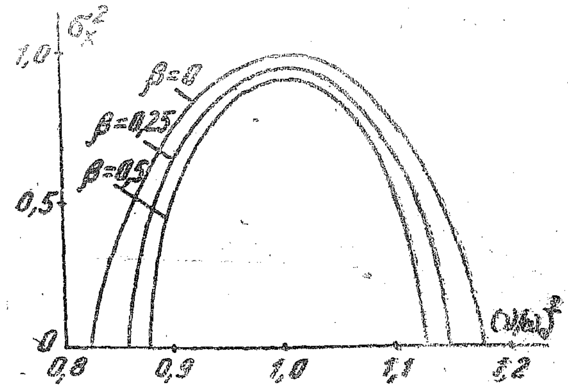
Sau khi thế (3.1) vào (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) chúng ta tính được $\sigma_{x_0}^2$, $d_{11}^{(1)}$, $d_{12}^{(1)}$, $d_{22}^{(1)}$, $m_1^{(1)}$, $m_2^{(1)}$ và $D_x = \sigma_x^2$

Đồ thị của phương sai (2.14) được vẽ trên hình 1, đối với ν^2/ω_0^2 thay đổi trong miền cộng hưởng 0,77 đến 1,36.

b) Ví dụ thứ hai, chúng ta nghiên cứu ảnh hưởng của ồn trắng lên dao động tham số của hệ điện [4]. Hàm g (x,x) bây giờ có dạng :

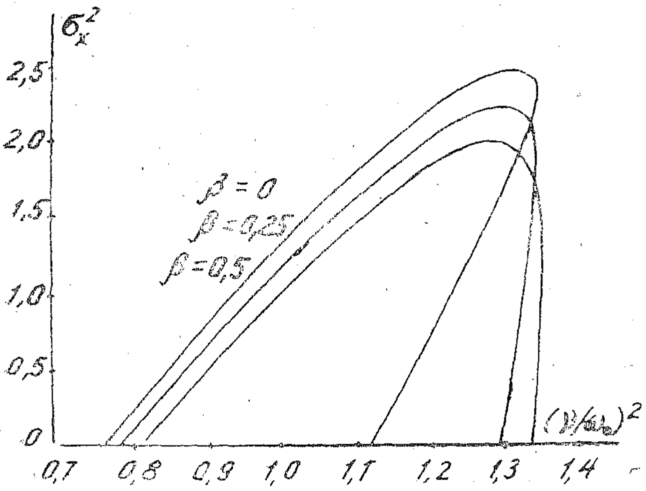
$$g(x,\dot{x}) = \dot{x}x^2 \qquad (3.2)$$

Phương sai σ_x^2 được tính với ν^2/ω_o^2 thay đổi trong miền cộng hưởng từ 0,82 đến 1,18 và các giá trị khác nhau của tham số β (hình 2).



Hình 1

h = 7 ; δ = 1,5 ; ω_o = 1 ;
ε = 0,1 ; μ = 1



Hình 2

h = 7 ; δ = 1,5 ; ω_o = 1 ;
ε = 0,1 ; μ = 1

Từ các ví dụ trên chúng ta thấy :

– Nhiều ngẫu nhiên làm tăng biên độ của dao động tham số (kết luận tương tự như đã nhận được bởi Piszczek [4], khi nghiên cứu ảnh hưởng của ngẫu nhiên lên dao động điều hòa của hệ phi tuyến).

– Nhiều ngẫu nhiên làm dịch chuyển miền cộng hưởng về phía tăng của ν^2/ω_o^2 (Hình 1) và làm hẹp vùng cộng hưởng lại (hình 2).

Địa chỉ :
Đại học
Tổng hợp Hà Nội

Nhận ngày 12/9/1981

TÀI LIỆU THAM KHAO

1. STRATONOVITR R.P. Izbrannuje voproxu teori fluctuaxi vo radiotekhnike. «Radio Xov» M. 1961

2. HAMINSKI R.Z. Predelnaja teorema dlia reseni differenxialnucu uravneni xo xluttrajnoi pravoi traxchiu.
Teor. Verojat. i Primen. 11, 1961

3. KAZAKOV I.E. Statixtitrexkie metodu proectirovania xixtem upravlenia. Masinoxtroienie. M. 1969

4. PISZCZEK K. Nonlinear Damper of Vibrations in a Stochastic Approach. Arch. Mech. Stos. T.24. Nr 1, 1972

SUMMARY

THE INFLUENCE OF RANDOM EXCITATION ON PARAMETRIC OSCILLATIONS OF NONLINEAR SYSTEM WITH ONE DEGREE OF FREEDOM.

This paper deals with the influence of random excitation a stationary stochastic process on the parametric oscillations in the resonance region of a single – degree of freedom system.