Tạp chí CƠ HỌC T. IV 1982 Số 2 (trang 19 - 24)

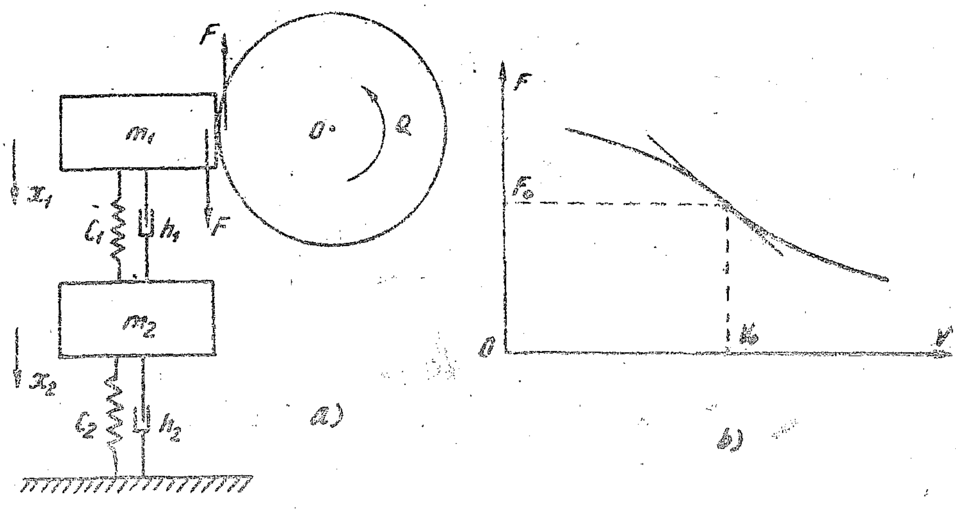
HỆ TỰ CHẤN HAI BẬC TỰ DO CHỊU KÍCH ĐỘNG GIỚI NỘI

NGUYỄN VĂN ĐÌNH

HỆ dao động chịu kích động giới nội đã được khảo sát một cách hệ thống trong [1]; tuy nhiên, đối với hệ nhiều bậc tự do, chỉ riêng chế độ cưỡng bức đơn tần trong hệ tiêu tán được đề cập đến. Dưới đây, xét chế độ đơn tần trong một hệ tự chấn hai bậc do: nghiệm tương ứng được tìm nhờ dùng biến hỗn hợp: ở kết quả khảo sát, chú ý các ều kiện ổn định quan liêu [2, 3, 4].

§1. MÔ HÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DAO ĐỘNG

Khảo sát hệ cho trên hình 1a: m_1, m_2 — hai khối lượng; c_1, c_2 — độ cứng các lò xo; , h_2 — các hệ số cản; Q — mômen quay rôto O; F — lực ma sát khô kích động hệ hai ối lượng.



Hình 1

đơn giản, xem bán kính vành rôto bằng 1 và mômen $Q = m - n\dot{\theta}$ ($m > 0$; $n > 0$; — vận tốc góc rôto). Giả thiết F là hàm của vận tốc tương đối V giữa m_1 và vành rôto hàm này có nhánh giảm đi qua điểm uốn (V_o, F_o) (h. 1b); vì vậy, tại lân cận $V = V_o$ u giữ đến các số hạng bậc ba đối với ($V - V_o$), chúng ta có:

$$F(V) = F_o - h(V - V_o) + k(V - V_o)^3 \tag{1.1}$$

ng đó: $F_o = F(V_o)$; $h = -\left(\frac{dF}{dV_o}\right)_o > 0$; $k = \frac{1}{6}\left(\frac{d^3F}{dV^3}\right)_o > 0$

Gọi O_1, O_2 — vị trí cân bằng của hai khối lượng khi giữ cho rôto vận tốc góc hằng $\dot{\theta}_o = V_o$ và ký hiệu x_1, x_2 — di chuyển hai khối lượng tương ứng tính từ o_1, o_2.

Giả thiết xảy ra các chế độ chuyển động trong đó rôto quay gần đến vận tốc góc lân cận $\dot{\theta}_o = V_o$ còn hệ hai khối lượng dao động gần điều hòa với vận tốc nhỏ hơn nhiều so với vận tốc của điểm trên vành rôto. Khi đó, theo (1.1), có thể khai triển:

$$F(\dot{\theta} - \dot{x}_1) = F[V_o + (\dot{\theta} - V_o - \dot{x}_1)] = F_o - h(\Omega - \dot{x}_1) + k(\Omega - \dot{x}_1)^3 \tag{1.2}$$

và hệ phương trình vi phân chuyển động là:

$$\dot{\Omega} = \frac{\varepsilon}{I} f = \frac{\varepsilon}{I} [M - N\Omega - k(\Omega - \dot{x}_1)^3]$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_1 x_2 = \varepsilon f_1 = \varepsilon[- h(\Omega - \dot{x}_1) + k(\Omega - \dot{x}_1)^3 - h_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)]$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - c_1 x_1 + (c_1 + c_2) x_2 = \varepsilon f_2 = \varepsilon [h_1 \dot{x}_1 - (h_1 + h_2)\dot{x}_2] \tag{1.3}$$

trong đó: ε — tham số bé; $\Omega = \dot{\theta} - V_o$, I — mômen quán tính của rôto; $M = m - nV_o - F_o$; $N = n - h$

Giả thiết hệ hai khối lượng có hai tần số riêng phân biệt p_i $(i = 1, 2)$ tương ứng các hệ số phân phối $(1, d_i)$ $(i = 1, 2)$. Chuyên về tọa độ pháp (ξ_1, ξ_2), hệ (1.3) trở thành:

$$\dot{\Omega} = \frac{\varepsilon}{I} f$$

$$\ddot{\xi}_1 + P_1^2 \xi_1 = \frac{\varepsilon}{M_1} (f_1 + d_1 f_2) \tag{1.4}$$

$$\ddot{\xi}_2 + P_2^2 \xi_2 = \frac{\varepsilon}{M_2} (f_1 + d_2 f_2)$$

trong đó:

$$x_1 = \xi_1 + \xi_2; \quad x_2 = d_1\xi_1 + d_2\xi_2; \quad M_i = m_1 + m_2 d_i^2 \ (i = 1, 2)$$

§2. CÁC CHẾ ĐỘ ĐƠN TẦN

Trong hệ có thể xảy ra hai chế độ đơn tần tương ứng có tần số lân cận p_1, p_2.

a) Chế độ đơn tần p_1 — Để đưa về dạng chuẩn, đặt

$$\xi_1 = a_1 \sin (P_1 t + \varphi_1); \quad \xi_2 = a_2 \sin P_2 t + b_2 \cos P_2 t$$

$$\dot{\xi}_2 = P_1 a_1 \cos (P_1 t + \varphi_1); \quad \dot{\xi}_2 = P_2(a_2 \cos P_2 t - b_2 \sin P_2 t) \tag{2.1}$$

Trong đó: a_1, φ_1, a_2, b_2 — các biến mới.

Sau khi trung bình hóa rồi thực hiện tiếp phép biến đổi:

$$A_1 = \frac{3}{4} k P_1^2 a_1^2; \quad A_2 = \frac{3}{4} k P_2^2 a_2^2; \quad B_2 = \frac{3}{4} k P_2^2 b_2^2 \tag{2.2}$$

chúng ta được hệ hai phương trình đơn giản hơn:

$$\dot{\Omega} = \frac{\varepsilon}{I} [M - N\Omega - k\Omega^3 - 2\Omega A_1 - 2\Omega (A_2 + B_2)]$$

$$\dot{A}_1 = \frac{\varepsilon}{2M_1} [H_1 - 3k\Omega^2 - A_1 - 2(A_2 + B_2)]$$

$$\varphi_1 = 0$$

$$A_2 = \frac{\varepsilon A_2}{2M_2}\left[H_2 - 3k\Omega^2 - 2A_1 - (A_2 + B_2)\right], \qquad (2.3)$$

$$B_2 = \frac{\varepsilon B_2}{2M_2}\left[H_2 - 3k\Omega^2 - 2A_1 - (A_2 + B_2)\right]$$

trong đó : $H_i = h - h_1(1 - d_i)^2 - h_2 d_i^2$ $(i = 1,2)$

Chế độ đơn tần p_1 tương ứng nghiệm $A_2 = B_2 = 0$, φ_1 = hằng còn $\Omega = \Omega_1$ và $A_1 > 0$ được xác định từ hệ phương trình :

$$\frac{\varepsilon}{I}\left[M - N\Omega_1 - k\Omega_1^3 - 2\Omega_1 A_1\right] = 0 \qquad (2.4)$$

$$\frac{\varepsilon}{2M_1}\left[H_1 - 3k\Omega_1^2 - A_1\right] = 0$$

b) Chế độ đơn tần p_2 – Tương tự đặt :

$$\xi_1 = a_1 \sin P_1 t + b_1 \cos P_1 t \,; \qquad \xi_2 = a_2 \sin (P_2 t + \varphi_2)$$

$$\dot{\xi}_1 = P_1(a_1 \cos P_1 t - b_1 \sin P_1 t)\,; \qquad \dot{\xi}_2 = P_2 a_2 \cos (P_2 t + \varphi_2) \qquad (2.5)$$

trong đó : a_1, b_1, a_2, φ_2 – các biến mới.

Kết quả cũng tương tự : chế độ đơn tần p_2 tương ứng nghiệm $A_1 = B_1 = 0$, φ_2 = hằng còn $\Omega = \Omega_2$ và $A_2 > 0$ được xác định từ hệ phương trình :

$$\frac{\varepsilon}{I}\left[M - N\Omega_2 - k\Omega_2^3 - 2\Omega_2 A_2\right] = 0$$

$$\frac{\varepsilon}{2M_2}\left[H_2 - 3k\Omega_2^2 - A_2\right] = 0 \qquad (2.6)$$

trong đó :

$$A_1 = \frac{3}{4} k P_1^2 a_1^2\,; \quad B_1 = \frac{3}{4} k P_1^2 b_1^2\,; \quad A_2 = \frac{3}{4} k P_2^2 a_2^2$$

Trong mặt phẳng Ω, A), vẽ các đồ thị :

$$C_0 : M - N\Omega - k\Omega^3 - 2\Omega A = 0$$

$$C_1 : H_1 - 3k\Omega^2 - A = 0 \qquad (2.7)$$

$$C_2 : H_2 - 3k\Omega^2 - A = 0$$

trong đó : C_1, C_2 – những parabôn ; C_0 – đường cong có tiệm cận (khi $\Omega \to 0$ và $\Omega \to \infty$) và trở thành, khi $M = 0$, đường C_0^0 gồm trục $\Omega = 0$ và parabôn $A = -\frac{1}{2}(N + k\Omega^2)$.

Giao điểm (trong miền $A > 0$) của C_0 với C_1, C_2 tương ứng chế độ dừng đơn tần p_1, p_2.

§3. ĐIỀU KIỆN ỔN ĐỊNH CỦA CÁC CHẾ ĐỘ DỪNG ĐƠN TẦN

Đối với chế độ đơn tần p_1 lập hệ biến phân và từ đó lập phương trình đặc trưng :

$$\lambda \cdot \begin{vmatrix} -\frac{\varepsilon}{I}(N + 3k\Omega_1^2 + 2A_1) - \lambda & -\frac{\varepsilon}{I}2\Omega_1 \\ -\frac{\varepsilon}{2M_1}6k\Omega_1 & -\frac{\varepsilon}{2M_1} - \lambda \end{vmatrix} \left[\frac{\varepsilon}{2M_2}(H_2 - 3k\Omega_1^2 - 2A_1) - \lambda\right] = 0 \qquad (3.1)$$

Vì hệ khảo sát là ôtônôm, nghiệm đặc trưng $\lambda = 0$ không làm thay đổi tính ổn định, nên các điều kiện đủ để có ổn định tiệm cận là :

$$\frac{1}{I}\left(N + 3k\Omega_1^2 + 2A_1\right) + \frac{1}{2M_1} > 0 \tag{3.2a}$$

$$\left(N + 3k\Omega_1^2 + 2A_1\right) - 12k\Omega_1^2 > 0 \tag{3.2b}$$

$$H_2 - 3k\Omega_1^2 - 2A_1 < 0 \tag{3.2c}$$

Dễ dàng nhận ra (3. 2c) là điều kiện ổn định quan liên :

$$A_1 > \frac{1}{2}\left(H_2 - 3k\Omega_1^2\right) = \frac{1}{2}A_2' \tag{3.3}$$

trong đó : A_2' — «biên độ» chế độ đơn tần P_2 nhưng khi rôto có vận tốc góc Ω_1.

Còn (3. 2b) là điều kiện cuối trong tiêu chuẩn ổn định Raosơ Huyvit đối với hệ hai phương trình đầu trong hệ (2. 3) (khi $A_2 = B_2 = 0$). Ý nghĩa hình học của tiêu chuẩn này đã được trình bày trong [5]; theo đó, dễ dàng nhận ra giao điểm nào của C_0 và C_1 sẽ tương ứng chế độ ổn định hoặc không ổn định.

Đối với chế độ đơn tần p_2, các điều kiện ổn định cũng tương tự :

$$\frac{1}{I}\left(N + 3k\Omega_2^2 + 2A_2\right) + \frac{1}{2M_2} > 0 \tag{3.4a}$$

$$\left(N + 3k\Omega_2^2 + 2A_2\right) - 12k\Omega_2^2 > 0 \tag{3.4b}$$

$$H_1 - 3k\Omega_2^2 - 2A_2 < 0 \tag{3.4c}$$

trong đó (3. 4c) là điều kiện ổn định quan liên

$$A_2 > \frac{1}{2}\left(H_1 - 3k\Omega_2^2\right) = \frac{1}{2}A_1' \tag{3.5}$$

A_1' — biên độ dao động đơn tần p_1 khi rôto có vận tốc góc Ω_2. Từ những kết quả thu được, dễ dàng so sánh đặc điểm của hệ thường (kích động vô hạn nghĩa là rôto quay đều với vận tốc góc cho trước) với hệ chịu kích động giới nội.

— Hai hệ có cùng quan hệ vận tốc góc — biên độ (rút từ phương trình thứ hai trong mỗi hệ (2. 4) (2. 6); tuy nhiên ở hệ chịu kích động giới nội, vận tốc góc rôto không được biết trước mà phải xác định đồng thời với biên độ dao động.

— Ngoài các điều kiện ổn định đã có ở hệ thường, trong hệ chịu kích động giới nội, xuất hiện thêm các điều kiện (3. 2a, b) (3. 4a, b) do tính giới nội của kích động gây ra.

Những đặc điểm trên đã được nêu ra trong [1] cho hệ một bậc tự do.

— Xét chi tiết hơn ảnh hưởng của điều kiện ổn định quan liên (3. 2c) (3. 4c). Nếu vùng mất ổn định của điều kiện này nằm trong vùng mất ổn định của các điều kiện khác.

chế độ đơn tần diễn biến như ở hệ một bậc tự do chịu kích động giới nội. Ngược lại, nếu điều kiện ổn định quan liên mở rộng vùng mất ổn định thì chế độ đơn tần diễn biến như ở hệ tự chấn thường.

Chọn $m_1 = 1$; $m_2 = 2$; $l = 1$; $c_1 = 1$; $c_2 = 2$; $h_1 = 0,004$; $h_2 = 0,04$; $h = 0,11$; $N = -0,01$; $K = 1$. Trên hình 2, vẽ các đồ thị C_1, C_2 và C_o^0, C_o^1, C_o^2 của C_o khi $M = 0$, $M = 0,0025$; $M = 0,0100$. Khi đó:

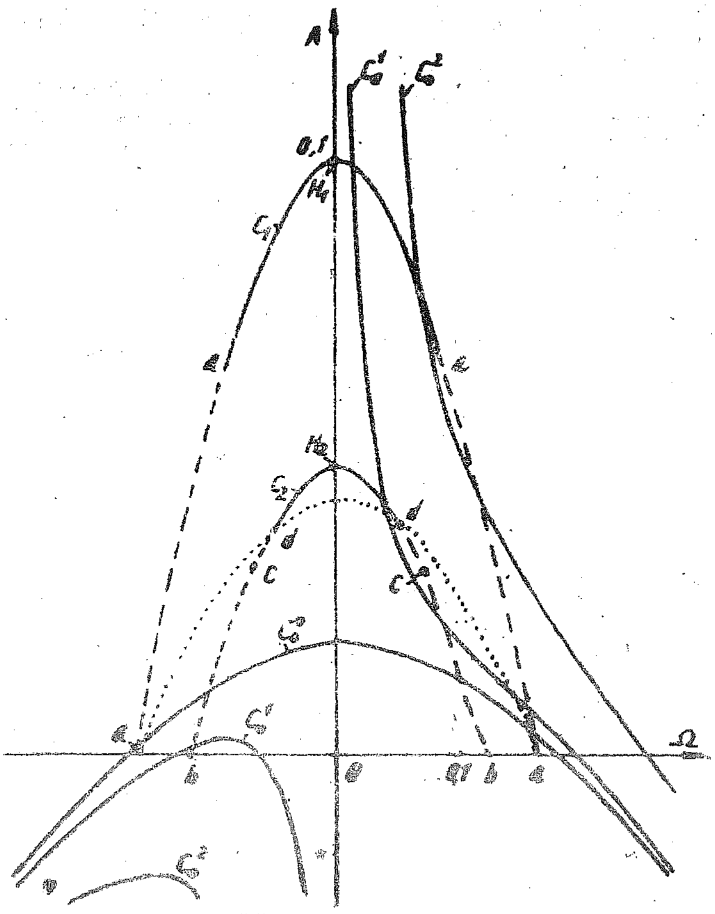
– Các điều kiện (3. 2a) (3. 4a) được thỏa mãn.

– Điều kiện ổn định quan liên (3. 2c) luôn thỏa mãn; vì vậy, đối với chế độ đơn tần p_1 chỉ xuất hiện vùng mất ổn định (aa) do điều kiện kích động giới nội (3. 2b) gây ra.

– Với chế độ đơn tần p_2, điều kiện kích động giới nội (3. 4b) tạo ra vùng mất ổn định (bc) còn điều kiện quan liên (3. 4c) mở rộng thêm vùng mất ổn định (cd).

Trên hình 2, các đoạn đậm nét tương ứng vùng ổn định; đứt nét – mất ổn định: đường chấm – biên giới điều kiện ổn định quan liên.

Giả thử M tăng – do tăng m – từ không. Các đồ thị C_1, C_2 đứng im trong khi đồ thị C_o từ C_o^0 trở thành và di chuyển theo hướng $C_o^0 \rightarrow C_o^1 \rightarrow C_o^2$. Khi điều kiện đầu dẫn đến chế độ đơn tần p_1, biểu diễn bởi giao điểm của C_1 và C_o, biên độ dao động từ $A_1 = H_1$ sẽ giảm và dao động mất ổn định khi điểm biểu diễn đến a; lúc đó chế độ cân bằng của các khối lượng được thiết lập trong khi rôto quay đều. Khi điều kiện đầu dẫn đến chế độ p_2, biểu diễn bởi giao điểm của C_2, và C_o, biên độ dao động từ $A_2 = H_2$ sẽ giảm và dao động mất ổn định khi điểm biểu diễn tới d; lúc đó ta xảy chuyển tiếp sang chế độ đơn tần p_1.



Hình 2

Địa chỉ: Đại học Bách khoa

Nhận ngày 5/10/1981

TÀI LIỆU THAM KHẢO

.КОНОНЕНКО В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением. Москва, 1964.

2. NGUYỄN VĂN ĐÌNH. Hiện tượng ổn định quan liên trong hệ á tuyến tự chấn và thông bậc tự do. Tạp chí Cơ học, số 1, 1981

3. NGUYỄN VĂN ĐÌNH. Hiện tượng ổn định quan liên trong hệ á tuyến hai bậc tự ích động cưỡng bức. Tạp chí Cơ học, số 2. 1981

4. NGUYỄN VĂN ĐÌNH. Hiện tượng ổn định quan liên trong hệ á tuyến nhiều bậc Tạp chí Cơ học, số 3, 1981.

5. NGUYỄN VĂN ĐÌNH. Về một điều kiện ổn định. Tạp chí Cơ học, số 1 — 2, 1979

РЕЗЮМЕ

АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНАЯ СИСТЕМА С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОГРАНИЧЕННОГО ВОЗВУЖДЕНИЯ

Рассматриваются одночастотные режимы в одной автоколебательной системе с степенями свободы, к которой приложено ограниченное возбуждение. Смешан- еременные и метод усреднения были использованы. Законы колебания и их ия устойчивости были установлены. Как в обычной автоколебательной системе сматриваемой системе различаются «собственные» и «связанные» условия чивости.

LÝ THUYẾT KHUẾCH TÁN SUY RỘNG...

(Tiếp theo trang 5)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. NGUYỄN VĂN ĐIỆP, TRƯƠNG MINH CHÁNH, Tạp chí Cơ học, 38–48, N°3–4, 1979.

2. НГУЕН ВАН ДЬЕП. Некоторые вопросы теории взаимопроникающихся сред. орская диссертация, М., 1976.

3. ШЬЮМОН П. Диффузия в твердых телах, Металлургия, М., 1966.

4. ЛЮБОВ Б.Я., ФАСТОВ Н.С. ДАН СССР 84, 5. 939-94, 1952.

5. ПОДСТРИГАЧ Я.С. ДАН УССР, 2, 169–172, 1961

SUMMARY

GENERALIZED–DIFFUSIVE THEORY OF SOLID MIXTURES
I. HOMOGENEOUS THERMO–ELASTIC MIXTURE

This paper deals with the construction of a generalized diffusive theory of reactive ıtituents in the relative motion to one another and treated as a thermo–elastic homoge- s solid.