Tạp chí Cơ Học T.V, 1983, số 2 (trang 23 – 30)

VỀ MỘT PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG HÀM LIAPUNOV

NGUYỄN ĐÌNH PHƯ

Hàm Liapunov không những có ứng dụng trong lý thuyết ổn định, trong các bài toán điều khiển mà còn cho phép khẳng định sự tồn tại nghiệm tuần hoàn, cho phép đánh giá khoảng thời gian của một quá trình v.v... Hiện tại có nhiều phương pháp xây dựng hàm Liapunov. Nhưng vấn đề đặt ra đối với hệ phi tuyến lại càng không thể khẳng định rằng chúng được xây dựng một cách hoàn chỉnh và đầy đủ.

Trong bài này chúng tôi đề nghị một phương pháp xây dựng hàm Liapunov, từ đó so sánh các phương pháp đã biết và ứng dụng khảo sát nhiều ví dụ cụ thể trong R^2 và R^3.

Các khái niệm có thể xem [1], [2]. Để đơn giản ta tạm quy ước là hệ ổn định thay cho nghiệm không ổn định.

§ 1. PHƯƠNG PHÁP XÂY DỰNG HÀM LIAPUNOV

Trong công trình [3] các tác giả Uocer D.A. và Clark L.C. đã nghiên cứu ổn định và xây dựng hàm Liapunov cho phương trình :

$$x^{(n)} = -f(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots, x^{(n)}) \tag{1.1}$$

Phương trình (1.1) tương đương với hệ:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1}, & i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ \dot{x}_n = -f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{1.2}$$

Hàm Liapunov được đề nghị:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_0^{x_{n-1}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_{n-1} + \frac{x_n^2}{2} + F(x_1, \ldots, x_n) \tag{1.3}$$

Theo Barbasin E. A. thì phương pháp này có những chỗ không rõ ràng và đặc biệt đối với một số hệ nó tỏ ra quá phức tạp [2]. Chẳng hạn xét hệ :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x, y) \end{cases} \tag{1.4}$$

Khi đó

$$V(x, y) = \int_0^x f(u, y)\, du + \frac{y^2}{2} + F(x, y)$$

và đạo hàm có dạng :

$$\dot{V}(x, y) = -f(x, y)\int_0^x \frac{\partial f(u, y)}{\partial y}du + \frac{\partial F}{\partial x}y - \frac{\partial F}{\partial y}f(x, y)$$

Điều kiện đủ cho hệ (1.4) ổn định là :

1. $$xf(x, y) > 0 \quad \text{Với } \forall x \neq 0,\ y \neq 0 \tag{1.5}$$

2. $$x\int_0^x \frac{\partial f(u, y)}{\partial y}du > 0,\ \forall x, y \neq 0$$

Chúng tôi nhận thấy (1.5) chưa phải là điều kiện tốt nhất vì hàm f(x, y) có thể là phi tuyến đối với x, y. Từ tồn tại trên dẫn đến :

Định lý 1 : *Nếu hàm* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in$ (G), (G $\in R^n$ *chứa* 0) *và thỏa mãn điều kiện tồn tại duy nhất nghiệm, và :*

i) $f(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)\, x_i > 0,\ i = \overline{1, n-1},\ \forall x_i \neq 0$

ii) $\sum_{i=1}^{n-1} f(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)\, x_{i+1} - f(x_1, \ldots, x_n)\, x_n \leqslant 0\ (< 0)$

thì nghiệm không (hệ (1.2)) của phương trình (1.1) *ổn định (ổn định tiệm cận). Hàm Liapunov được xây dựng dưới dạng :*

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n-1}\int_0^{x_i} f(0, \ldots, 0, u_i, 0, \ldots, 0)\,du_i + \frac{x_n^2}{2} \tag{1.6}$$

Chứng minh : Điều kiện i) của định lý 1 khẳng định hàm $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ là hàm xác định dương với mọi điểm $(x_1, \ldots, x_n) \in G \subset R^n$.

Đạo hàm toàn phần $\dot{V}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} =$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} f(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)\, x_{i+1} - f(x_1, \ldots, x_n)x_n.$$

Với điều kiện ii) của định lý 1, suy ra $\dot{V}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0,\ (< 0),\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in G$.

Theo định lý ổn định của Liapunov [1], nghiệm tầm thường $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$ ổn định (ổn định tiệm cận). Hay đơn giản hơn, ta nói hệ (1.2) ổn định (ổn định tiệm cận).

Xét hệ phương trình dạng :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = X_i(x_1, \ldots, x_n),\ i = 1, 2, \ldots, n-1. \\ \dot{x}_n = -f(x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{1.7}$$

Định lý 2 : *Giả sử vế phải hệ (1.7) thỏa mãn điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm, có nghiệm tầm thường duy nhất. Khi đó nếu hàm* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *thỏa mãn :*

i) $f(0,\ldots,0,x_i,0,\ldots,0)X_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n-1,\ \forall x_i \neq 0$

ii) $\sum_{i=1}^{n-1} f(0,\ldots,0,x_i,0,\ldots,0)X_i - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)x_n \leqslant 0\ (< 0)$

thì hệ (1.7) ổn định (ổn định tiệm cận). Hàm Liapunov xây dựng theo dạng (1.6). (chứng minh tương tự như định lý 1)

§ 2. SO SÁNH PHƯƠNG PHÁP ĐỀ NGHỊ VỚI MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP ĐÃ BIẾT

Những phương pháp tách biến, dạng toàn phương, thế năng, v.v... [5] mang tính sử dụng rộng rãi và có ý nghĩa rất lớn trong bài toán ổn định. Chúng tội sẽ so sánh với một vài phương pháp nói trên.

1. *Xét hệ* (1.4)

– Phương pháp đề nghị trong [3] cho điều kiện (1.5)

– Phương pháp dạng toàn phương không thể áp dụng

– Phương pháp tách biến không thể áp dụng

– Phương pháp (1.6) cho phép tìm hàm $V(x, y) = \int_0^x f(u, 0)\,du + \frac{y^2}{2}$ khi đó đạo hàm $\dot{V}(x, y) = [f(x, 0) - f(x, y)]y$. Vì thế điều kiện đủ để hệ (1.4) ổn định (ổn định tiệm cận) là:

i) $f(x, 0)x > 0,\ \forall x \neq 0$

ii) $[f(x, 0) - f(x, y)]y \leqslant 0\ (< 0)$ (2.1)

Hoàn toàn nhận thấy (2.1) đơn giản hơn (1.5) rất nhiều.

2. *Xét hệ*: $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{x} = -(bx + ay) \end{cases}$ (2.2)

– Phương pháp dạng toàn phương: Sau một quá trình tính toán rất công phu và dài, Barbasin [2] đưa ra

$$W(x, y) = W_{11}x^2 + 2W_{12}xy + W_{22}y^2$$

Sao cho $\frac{dV}{dt} = 2W$. Tác giả đã công phu tính toán ma trận và nhận được:

$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + b\frac{x^2}{2}$ và đạo hàm toàn phần $\dot{V}(x, y) = -2ay^2$

– Mặt khác khi sử dụng phương pháp (1.6) đối với hệ (2.2) ta có ngay:

$$V(x, y) = \int_0^x bu\,du + \frac{y^2}{2} = \frac{bx^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

Như vậy ta có cùng một hàm Liapunov cho hệ (2.2) bằng các phương pháp khác nhau.

3. *Phức tạp hơn (2.2) ta xét hệ*:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x) + g(x)y,\ f(0) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

– Phương pháp (1.6) cho ngay:

$$V(x, y) = \int_0^x f(u)\,du + \frac{y^2}{2}$$

– Phương pháp tách biến:

Nguyên tắc là xây dựng $V(x, y)$ sao cho nó có dạng $V(x, y) = F(x) + P(y)$ và bắt buộc $F'(x)y - P'(y)\,[f(x) + gy]$ có dạng như hàm $V(x, y)$, có nghĩa:

$$F'(x)\dot{x} + P'(y)\dot{y} = F_1(x) + P_1(y)$$

Hay:

$$F'(x)y + P'(y)\,f(x) = 0 \text{ và } \frac{F'(x)}{f(x)} = \frac{P'(y)}{y} = \text{const}$$

Giả sử chọn const = 1, ta có $F(x) = \int_0^x f(u)du$, $P(y) = \frac{y^2}{2}$.

Ta cũng có hàm $V(x, y)$ như phương pháp (1.6). Và điều kiện ổn định của hệ (2.3) là:

i) $f(x)x > 0$ $\quad \forall x \neq 0$

ii) $g(x) \geqslant 0$

– Phương pháp dạng toàn phương không thể áp dụng cho hệ (2.3)

4. *Xét phương trình*

$$\ddot{x} + g(x)\dot{x} + f(x) = 0 \tag{2.4}$$

Nếu thực hiện thế $y = \dot{x} + \int_0^x g(u)\,du$, thì hệ sau sẽ tương đương với phương trình (2.4):

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \displaystyle\int_0^x g(u)du \\ \dot{y} = -f(x) \end{cases} \tag{2.5}$$

– Phương pháp dạng toàn phương không thể áp dụng cho hệ (2.5)

– Bài toán sẽ phức tạp nếu áp dụng phương pháp tách biến

– Mặt khác, nếu dùng (1.6) ta có ngay kết quả:

$$V(x, y) = \int_0^x f(u)du + \frac{y^2}{2} \text{ và } \dot{V}(x, y) = -f(x)\int_0^x g(u)du.$$

Từ đó tìm điều kiện ổn định (ổn định tiệm cận) cho (2.5) hay (2.4) ta được:

i) $f(x)x > 0, \ \forall x \neq 0$

ii) $x \int_0^x g(u)du \geqslant 0 \ (> 0), \ \forall x \neq 0.$

Sẽ tồn tại hệ phương trình mà hàm Liapunov không thể thu nhận được bằng các phương pháp tách biến hoặc phương pháp toàn phương.

Ví dụ:

5. *Xét hệ phương trình trong* R^3:

$$\begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{y} = x + by \\ \dot{z} = -f(x, y) - z \end{cases} \tag{26}$$

– Rõ ràng phương pháp dạng toàn phương không thể áp dụng

– Phương pháp (1.6) cho phép thu nhận ngay kết quả:

$$V(x, y, z) = \int_0^x f(v, 0)dv + \int_0^y f(0, u)du + \frac{z^2}{2} \tag{2.7}$$

– Phương pháp tách biến:

Theo nguyên tắc [5], phương pháp này hàm Liapunov được đề nghị:

$$V(x, y, z) = F_1(x) + F_2(y) + F_3(z) \tag{2.8}$$

và đạo hàm toàn phần $\dot{V}(x, y, z)$ có dạng của $V(x, y, z)$. Theo (2.8) ta có:

$$\dot{V}(x, y, z) = F_1'(x)z + F_2'(y)x + bF_2'(y)y - F_3'(z)f(x, y) - F_3'(z)z.$$

Mặt khác khó có thể khẳng định rằng:

$$F_1'(x)z + F_2'(y)x - F_3'(z)f(x, y) = 0 \text{ với mọi } x, y, z,$$

bởi vì hàm $f(x, y)$ chưa biết và có thể là hàm không tách biến theo x và y.

6) *Xét hệ phương trình phức tạp hơn:*

$$\begin{cases} \dot{x} = z \\ \dot{y} = z - byx^2 \\ \dot{z} = -g_1(x) - g_2(y) \end{cases} \tag{2.9}$$

Với $-g_1(0) - g_2(0) = 0$

– Phương pháp dạng toàn phương không thể áp dụng.

– Phương pháp (1.6) cho ngay kết quả:

$$V(x, y, z) = \int_0^x g_1(u)du + \int_0^y g_2(v)dv + \frac{z^2}{2} \tag{2.10}$$

Khi đó $\dot{V}(x, y, z) = -byg_2(y)x^2$, suy ra điều kiện ổn định (ổn định tiệm cận) dưới dạng:

i) $b \geqslant 0$ (> 0)

ii) $g_1(x)x > 0$, $\forall x \neq 0$

iii) $g_2(y)y \geqslant 0$ (> 0), $\forall y \neq 0$.

– Phương pháp tách biến:

Hàm Liapunov $V(x, y, z) = F_1(x) + F_2(y) + F_3(z)$

Theo hệ (2.9) lấy đạo hàm toàn phần:

$$\dot{V}(x, y, z) = F_1'(x)z + F_2'(y)[z - byx^2] - F_3'(z)[g_1(x) + g_2(y)]$$

Càng không thể tìm $\dot{V} = F_{10}(x) + F_{20}(y) + F_{30}(z)$ như dạng của V. Để giải quyết cản trở này ta sử dụng sự mở rộng của phương pháp tách biến, nó đã được đề nghị trong [2], [12]. Tức là xét hệ tổng quát

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} f_k(u_k), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.11}$$

Ở đây các tác giả yêu cầu

$$f_k(u_k) > 0, \quad u_k = \sum_{m=1}^{n} a_{km} x_k, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Hàm Liapunov là

$$V(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{u_k} f_k(u)\, du. \tag{2.12}$$

Áp dụng cho hệ (2.9) ta có :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sum\limits_{k=1}^{3} p_{1k} f_k \left(\sum\limits_{m=1}^{3} a_{km} x_m \right) = x_3 \\ \dot{x}_2 = \sum\limits_{k=1}^{3} p_{2k} f_k \left(\sum\limits_{m=1}^{3} a_{km} x_m \right) = x_3 - b x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_3 = \sum\limits_{k=1}^{3} p_{3k} f_k \left(\sum\limits_{m=1}^{3} a_{km} x_m \right) = - g_1(x_1) - g_2(x_2) \end{cases}$$

Dễ dàng nhận thấy rằng

$$\begin{cases} p_{11} = 0 \\ p_{12} = 0 \\ p_{13} = 0, \text{ nên } f_3(u_3) = x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{21} = 0 \\ p_{22} = b, \text{ nên } f_2(u_2) = - x_1^2 x_2 \text{ và } f_3(u_3) = x_3 \\ p_{23} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{31} = 1 \\ p_{32} = 0 \\ p_{33} = 0, \text{ nên } f_1(u_1) = - g_1(x_1) - g_2(x_2) \end{cases}$$

Nhưng vì $u_2 = \sum\limits_{m=1}^{3} a_{2m} x_m$, cho nên $f_2(u_2) \neq - x_1^2 x_2$ và chúng ta không thể tìm các biến u_1, u_2. Tất nhiên càng không thể xây dựng hàm $V(x_1, x_2, x_3)$. Tóm lại phương pháp tách biến mới cũng không ứng dụng cho hệ (2.9).

Bằng sự kết hợp phương pháp (1.6) và phương pháp tách biến ta xét hệ

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, \ldots, x_n), \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.13}$$

trong đó X_i liên tục và thỏa mãn $X_i(0, \ldots, 0) = 0$.

Định lý 3 : *Nếu đối với hệ (2.13) tồn tại những hàm* $V_i(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ *xác định trên* $(-a, +a)$ *sao cho* :

i) $x_i v_i(x_i) > 0, \quad \forall x_i \neq 0$

ii) $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) v_i(x_i) \leq 0 \quad (< 0), \; \forall x_i \in (-a, +a)$

thì hệ (2.13) ổn định (ổn định tiệm cận). Hàm Liapunov có dạng:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^{x_i} v_i(S_i)\, dS_i$$

§3. ỔN ĐỊNH CÁC HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH

Trong không gian R^2, tính ổn định đã được khảo sát khá rộng rãi [10], [13], [14], [11] :

1, $\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy, \text{ xem [1]} \end{cases}$ (3.1)

2. $\begin{cases} \dot{x} = ax + f(y) \\ \dot{y} = cx + dy, \; f(0) = 0, \text{ xem [10]} \end{cases}$ (3.2)

3. $\begin{cases} \dot{x} = f(x) + by \\ \dot{y} = cx + dy, \; f(0) = 0, \text{ xem [10]} \end{cases}$ (3.3)

4. $\begin{cases} \dot{x} = f(x) + by \\ \dot{y} = cx + g(y), \; f(0) = g(0), \text{ xem [13]} \end{cases}$ (3.4)

5. $\begin{cases} \dot{x} = y \quad \text{xem [14].} \\ \dot{y} = -g(x)\, f(x) - q(y)\, ; \; -g(0)\, f(0) - q(0) = 0 \end{cases}$ (3.5)

6. $\begin{cases} \dot{x} = f_1(x) + by \\ \dot{y} = f_2(x) + f_3(y) \quad \text{xem [11]} \end{cases}$ (3.6)

$$\text{với} \begin{cases} f_1(0) = 0 \\ f_2(0) + f_3(0) = 0 \end{cases}$$

Trong phần này ta khảo sát các hệ trong R^2 với dạng tổng quát hơn, và chủ yếu là dùng phương pháp đã đề nghị ở định lý 1 và 3 :

7. *Xét hệ* : $\begin{cases} \dot{x} = f(x) + by \\ \dot{y} = -g(x)\, q(y) - p(y) \end{cases}$ (3.7)

$$\text{Với} \begin{cases} f(0) = 0 \\ -g(0)\, q(0) - p(0) = 0 \end{cases}$$

Giả sử hệ (3.7) thỏa mãn điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm.

Định lý 4: *Nếu các hàm* $f(x)$, $g(x)$, $q(y)$, $p(y)$ *thỏa mãn :*

i) $q(y) \geqslant k_1 > 0, \quad \forall y$

ii) $\dfrac{1}{b} g(x)\, x > 0, \quad \forall x \neq 0$

iii) $p(y)\, y \geqslant 0 \; (> 0), \; \forall y \neq 0$

iiii) $-f(x)\, x \geqslant 0 \; (> 0), \; \forall x \neq 0$

thì hệ (3.7) ổn định (ổn định tiệm cận). Hàm Liapunov cho hệ (3.7) là

$$V(x, y) = \frac{1}{b} \int_0^x g(u)\, du + \int_0^y \frac{S}{q(S)}\, dS \tag{3.8}$$

Thật vậy, nếu chọn $V_1(x) = \dfrac{1}{b} g(x)$, $V_2(x) = \dfrac{y}{q(y)}$ và hàm $V(x, y)$ theo (3.8), với i), ii) định lý 4 khẳng định rằng $V(x, y) > 0$ với mọi $x, y \neq 0$. Khi đó ii) – iiii) khẳng định $\dot{V}(x, y) \leqslant 0$ (< 0). Theo định lý Liapunov, thì hệ (3.7) ổn định (ổn định tiệm cận)

8. Xét hệ : $\begin{cases} \dot{x} = f_1(x) + f_2(y) \\ \dot{y} = g(x)\, q_1(y) + q_2(y) \end{cases}$ (3.9)

$$\text{với } \begin{cases} f_1(0) + f_2(0) = 0 \\ g(0)\, q_1(0) + q_2(0) = 0 \end{cases}$$

và thỏa mãn điều kiện tồn tại duy nhất nghiệm.

Định lý 5 : *Nếu các hàm* $f_1(x)$, $f_2(y)$, $g(x)$, $q_1(x)$, $q_2(y)$ *thỏa mãn* :

i) $q_1(y) \neq 0, \ \forall y \neq 0$

ii) $g(x)\, x > 0, \ \forall x \neq 0$

iii) $f_2(y)\, y/q_1(y) > 0, \ \forall y \neq 0$

iiii) $-f(x)\, x \geqslant 0 \ (> 0), \ \forall x \neq 0$

iiiii) $q_2(y)\, y \geqslant 0 \ (> 0), \ \forall y \neq 0$

thì hệ (3.9) ổn định (ổn định tiệm cận). Hàm Liapunov cho hệ (3.9) là :

$$V(x, y) = \int_0^x g(u)\, du + \int_0^y \frac{f(S)}{q_1(S)}\, dS \qquad (3.10)$$

Chúng tôi chân thành cám ơn giáo sư B. A. Secbacốp đã quan tâm giúp đỡ và cho ý kiến bổ ích. Đồng thời biết ơn đồng chí Phạm Huyền đã có ý kiến và nhận xét khi viết bài này.

Nhận ngày: 15-10-1981

Địa chỉ :
Trường Đại học Tổng hợp
T. P. Hồ Chí Minh

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. LIAPUNOV A. M. Bài toán tổng quát về ổn định chuyển động (tiếng Nga), NXB Lê-ningrat, Matxcova, 1935.
2. BARBASIN E. A. Hàm Liapunov (tiếng Nga). NXB Khoa học (Nauka), 1970.
3. UOCER D. A. and CLARL L. G. Phương pháp tích phân xây dựng hàm Liapunov cho hệ phi tuyến (tiếng Nga – tiếng Anh). Hội Cơ học Mỹ. Toán ứng dụng 32. N°36.65.
4. BARBASIN E. A. Nhập môn lý thuyết ổn định (tiếng Nga) NXB Khoa học (Nauka), 1967.
5. BARBASIN E. A. Về xây dựng hàm Liapunov cho hệ phi tuyến (tiếng Nga). Các công trình của Hội nghị thế giới về điều khiển lần thứ nhất – Viện Hàn lâm Khoa học Liên Xô, 1961.
6. AMERIO L. Studio asontotico del moto di un punto su Linea chinsa per ajione de forge Urdipenden tidal tempo. Annalij scuola. Nour Sup. Pisa 15 (3), 1951.
7. MALKIN I. G. Lý thuyết ổn định chuyển động. Matxcova 1966 – Hà nội 1980.
8. OGUTXỐP A. I. Về ổn định toàn phần nghiệm hệ phương trình phi tuyến cấp 3 và 4 (tiếng Nga). Tin tức các trường Đại học, Cao Đẳng – toán, 1958.
9. OGUTXỐP A. I. Tin tức các trường Đại học, Cao đẳng N°3, 1959.
10. MALKIN I. G. Về một bài toán ổn định hệ điều khiển tự động (tiếng Nga) : Toán ứng dụng T. 16, 4-1952.
11. EGORỐP K. Ổn định toàn phần nghiệm không của hệ hai phương trình vi phân (tiếng Nga). Phương trình vi phân N°9, 1975.
12. BARBASIN E. A. và BIXIARINA L. P. Về ổn định nghiệm phương trình vi tích phân (tiếng Nga). Tin tức các trường Đại học, Cao đẳng N°3. 1963.
13. CRAXỐPXKI N. N. Các định lý về ổn định chuyển động xác định bởi hệ 2 phương trình (tiếng Nga). Toán Cơ ứng dụng T16, N°5, 1952.
14. BARBASIN E. A., CRAXỐPXKI N. N. Báo cáo Viện hàn lâm Khoa học Liên xô 86. N°6, 1952.

(Xem tiếp trang 32)