Tạp chí CƠ HỌC T. IV, 1982 Số 1 (trang 27-31)

ẢNH HƯỞNG TÍNH CHỊU NÉN CỦA NỀN LÊN DAO ĐỘNG UỐN CỦA CỘT THÁP NƯỚC

NGUYỄN NGỌC VẺ

§ 1. ĐẶT BÀI TOÁN

Việc tính toán các công trình dạng tháp có mang trên đỉnh một bể chứa chất lỏng dưới tác dụng của lực động đất từ lâu đã được các nhà nghiên cứu quan tâm. Dưới tác dụng của lực động đất hay của gió, cột tháp sẽ dao động và gây ra các chuyển động ngang của bể. Chính chuyển động của chất lỏng trong bể đã gây ra một áp lực nào đó lên thành bể. Áp lực này (thường được gọi là áp lực thủy động) đã làm thay đổi các đặc trưng dao động uốn của cột tháp như phổ tần số, các dạng dao động riêng v.v...

Trong [3] đã nghiên cứu ảnh hưởng của chất lỏng trong bể lên dao động uốn ngang của cột tháp nước. Kết quả tính toán cho thấy chất lỏng chứa trong bể có ảnh hưởng khá rõ lên các đặc trưng của dao động uốn.

Tuy vậy khi xét bài toán trên tác giả bỏ qua các tính chất của nền và coi nền là cứng tuyệt đối. Vì vậy khi viết các điều kiện biên tại chân cột, tác giả đã cho các chuyển vị ngang và góc xoay tại đó đều bằng không. Nhưng trên thực tế nền móng không phải bao giờ cũng cứng tuyệt đối mặc dù người ta luôn cố gắng để đạt được như vậy. Nền luôn có một độ nén nhất định tùy thuộc vào từng loại đất và cấu tạo của chân móng. Việc xét ảnh hưởng tính chịu nén của nền có tầm quan trọng rất lớn vì tính chất của nền sẽ ảnh hưởng lên các đặc trưng dao động của công trình.

Dưới đây tác giả xét ảnh hưởng đó lên phổ tần số, các dạng dao động riêng và mô men uốn cột tháp.

§ 2. ẢNH HƯỞNG TÍNH CHỊU NÉN CỦA NỀN LÊN PHỔ TẦN SỐ

Để đặc trưng cho tính chịu nén của nền ta đưa vào các hệ số K_φ và K_z gọi là độ cứng của nền khi xoay và khi trượt, các hệ số này phụ thuộc vào tính chất của đất, diện tích của chân móng và một số yếu tố khác. Giá trị của chúng có thể thay đổi từ vô cùng đối với nền cứng tuyệt đối đến không trong trường hợp nền là một lớp bùn nhão.

Phương trình dao động uốn của cột có dạng

$$EJ\,\frac{\partial^4 W(Z,t)}{\partial Z^4} + \rho F\,\frac{\partial^2 W(Z,t)}{\partial t^2} = 0 \tag{2.1}$$

trong đó: EJ — độ cứng chống uốn của cột
ρ — khối lượng riêng của vật liệu
F — diện tích mặt cắt ngang
W (Z, t) — chuyển vị ngang của cột

Để xét bài toán dao động ta chọn nghiệm của phương trình (2.1) dưới dạng

$$W(z,t) = Z(z).\cos\omega t. \tag{2.2}$$

trong đó Z(z) — hàm số theo tọa độ z
ω — tần số riêng

trong trường hợp nền chịu nén, các điều kiện biên có dạng:

$$Z = 0 \quad \begin{cases} EJ \dfrac{\partial^2 W}{\partial Z^2} = K_\varphi \dfrac{\partial W}{\partial Z} & (2.3a) \\ EJ \dfrac{\partial^3 W}{\partial Z^3} = -K_Z W & (2.3b) \end{cases}$$

$$Z = l \quad \begin{cases} EJ \dfrac{\partial^2 W}{\partial Z^2} = 0 & (2.4a) \\ EJ \dfrac{\partial^3 W}{\partial Z^3} = -\overline{M}\omega^2 Z(l) & (2.4b) \end{cases}$$

ở đây $\overline{M}$ là khối lượng quy đổi, bao gồm khối lượng của bể, khối lượng củachất lỏng và đại lượng thứ ba, đặc trưng cho áp lực thủy động của chất lỏng lên thành bể [3].

Cần chú ý rằng trong trường hợp nền cứng tuyệt đối các điều kiện biên (2.3a) và (2.3b) có dạng:

$$Z = 0 \quad \left\{ \frac{\partial W}{\partial Z} = 0 \text{ và } W = 0 \right.$$

Trong trường hợp này các hệ số K_φ và K_z lấy các giá trị bằng vô cùng.

Thay (2.2) vào (2.1) ta nhận được phương trình đối với hàm Z(z).

$$Z^{IV}(z) - K^4 Z(z) = 0 \tag{2.5}$$

trong đó

$$K^4 = \frac{\rho F}{EJ} \omega^2 \tag{2.6}$$

Hàm Z(z) xác định từ phương trình (2.5) với các điều kiện biên sau đây:

$$EJ \frac{\partial^2 Z(o)}{\partial Z^2} = K_\varphi \frac{\partial Z(o)}{\partial Z} \tag{2.3a'}$$

$$EJ \frac{\partial^3 Z(o)}{\partial Z^3} = -k_z Z(o) \tag{2.3b'}$$

$$EJ \frac{\partial^2 Z(l)}{\partial Z^2} = 0 \tag{2.4a'}$$

$$EJ \frac{\partial^3 Z(l)}{\partial Z^3} = -\overline{M}\omega^2 Z(l) \tag{2.4b'}$$

Nghiệm của phương trình (2.5) có dạng [4]:

$$Z(z) = AU(kz) + BV(kz) + CS(kz) + DT(kz) \tag{2.7}$$

trong đó: A, B, C, D là các hằng số tích phân, xác định từ các điều kiện biên (2.3a')–(2.4b'), U, V, S, T là các hàm Crulốp.

Thay biểu thức của Z(z) từ (2.7) vào các điều kiện biên (2.3a') (2.4b') ta được hệ các phương trình bậc nhất để xác định các hằng số A, B, C, D. Chú ý rằng các phương trình trên là đồng nhất nên để các hằng số không đồng thời bằng không thì định thức của hệ phải bằng không. Từ đây ta nhận được phương trình tần số dao động riêng.

$$EJ \frac{K^3}{\omega^2} \left[(1 + \cos\gamma \cdot \mathrm{ch}\gamma) + C_o h_o \gamma^4 (1 - \cos\gamma \cdot \mathrm{ch}\gamma)\right] -$$

$$- 2\overline{M} h_o \gamma \sin\gamma\, \mathrm{sh}\gamma - EJ \frac{K^3}{\omega^2} C_o \gamma^3 (\sin\gamma\, \mathrm{ch}\gamma + \cos\gamma\, \mathrm{sh}\gamma) + \tag{2.8}$$

$$+ \left(\overline{M} C_o h_o \gamma^4 - \overline{M} - EJ \frac{K^3}{\omega^2} h_o \gamma\right)(\sin\gamma\, \mathrm{ch}\gamma - \cos\gamma\, \mathrm{sh}\gamma) - 2\overline{M} C_o \gamma^3 \cos\gamma\, \mathrm{ch}\gamma = 0$$

$$\text{ở đây } \gamma = kl,\ h_o = \frac{EJ}{l K_\varphi},\ C_o = \frac{EJ}{l^3 K_z} \tag{2.9}$$

Phương trình tần số (2.8) có chứa hai tham số: C_o và h_o (biểu diễn qua k_φ và k_z) đặc trưng cho tính chịu nén của nền. Ta nhận thấy rằng đây là một phương trình siêu việt và bài toán không có nghiệm dưới dạng một biểu thức giải tích.

Để giải phương trình trên ta phải dùng các phương pháp gần đúng. Ở đây tác giả dùng phương pháp xấp xỉ liên tiếp, trong đó nghiệm gần đúng thứ nhất được xác định bằng phương pháp vẽ đồ thị. Với phương pháp này chúng ta có thể thu được nghiệm cần tìm với độ chính xác khá cao.

Thực hiện một số phép biến đổi ta đưa phương trình (2.8) về dạng

$$1 + \cos\Upsilon\,\mathrm{Ch}\Upsilon - 2N\Upsilon\beta(\Upsilon)\,[C_o\Upsilon^3\,\mathrm{Ch}\Upsilon\cos\Upsilon + h_o\Upsilon\sin\Upsilon\,\mathrm{sh}\Upsilon] + C_oh_o\Upsilon^4\,(1-\cos\Upsilon\,\mathrm{Ch}\Upsilon) - N\Upsilon\beta(\Upsilon)$$
$$\times(1-C_oh_o\Upsilon^4)\,(\sin\Upsilon\,\mathrm{Ch}\Upsilon-\cos\Upsilon\,\mathrm{sh}\Upsilon) - C_o\Upsilon^3(\mathrm{Ch}\Upsilon\sin\Upsilon+\cos\Upsilon\,\mathrm{sh}\Upsilon) - h_o\Upsilon(\sin\Upsilon\,\mathrm{Ch}\Upsilon-\cos\Upsilon\,\mathrm{sh}\Upsilon)=0 \quad (2.10)$$

trong đó: N là tỷ số giữa tổng khối lượng của bể và chất lỏng chứa trong bể trên khối lượng của cột $\beta(\Upsilon)$—biểu thức đặc trưng cho ảnh hưởng của chất lỏng chứa trong bể (xem [3])

Xét một số trường hợp riêng sau đây.

a) Trường hợp nền cứng tuyệt đối: $C_o=0$, $h_o=0$ phương trình (2.10) biến đổi thành:

$$1 + \mathrm{Ch}\Upsilon\cos\Upsilon - N\Upsilon\beta(\Upsilon)[\mathrm{Ch}\Upsilon\sin\Upsilon - \mathrm{sh}\Upsilon\cos\Upsilon] = 0 \quad (2.11)$$

Phương trình này trùng với phương trình tần số trong [3]

b) Nền chỉ cho phép dịch chuyển ngang mà không cho phép chuyển vị góc: $C_o \neq 0$, $h_o=0$. Trong trường hợp này ta thu được phương trình sau:

$$1 + \mathrm{Ch}\Upsilon\cos\Upsilon - C_o\Upsilon^3(\mathrm{Ch}\Upsilon\sin\Upsilon + \mathrm{sh}\Upsilon\cos\Upsilon) -$$
$$- N\Upsilon\beta(\Upsilon)[2\,C_o\Upsilon^2\cos\Upsilon\,\mathrm{Ch}\Upsilon + \mathrm{ch}\Upsilon\sin\Upsilon - \mathrm{sh}\Upsilon\cos\Upsilon] = 0 \quad (2.12)$$

c) Đối với nền chỉ cho phép một góc xoay mà không cho phép dịch chuyển ngang ta có phương trình tần số:

$$1 + \mathrm{Ch}\Upsilon\cos\Upsilon - h_o\Upsilon(\mathrm{Ch}\Upsilon\sin\Upsilon - \mathrm{sh}\Upsilon\cos\Upsilon) -$$
$$N\Upsilon\beta(\Upsilon)[2h_o\Upsilon\,\mathrm{sh}\Upsilon\sin\Upsilon + \mathrm{Ch}\Upsilon\sin\Upsilon - \mathrm{sh}\Upsilon\cos\Upsilon] = 0 \quad (2.13)$$

Để xét ảnh hưởng các hệ số đặc trưng cho tính chịu nén của nền lên tần số riêng ta giải các phương trình tần số (2.11) (2.12) và (2.13) và cho các hệ số h_o và C_o biến thiên từ không đến vô cùng. Dưới đây là các tính toán cụ thể cho trường hợp thứ 3, trường hợp nền chỉ cho phép góc xoay tại chân cột mà không cho phép chuyển dịch ngang. Đối với các trường hợp khác, các tính toán hoàn toàn tương tự.

Cũng như trong [3] ta coi $\beta(\Upsilon)$ = Const và trong các tính toán tiếp theo ta lấy $N \cdot \beta(\Upsilon) = 1$.

Viết phương trình (2.13) dưới dạng

$$\Upsilon = \mathrm{arctg}\left[\frac{1 + (1+h_o)\Upsilon\,\mathrm{th}\Upsilon + \dfrac{1}{\mathrm{ch}\Upsilon\cos\Upsilon}}{(1+h_o)\Upsilon + 2h_o\Upsilon^2\,\mathrm{th}\Upsilon}\right]$$

Quá trình xấp xỉ liên tiếp được tiến hành như sau

$$\Upsilon^{(n+1)} = \mathrm{arctg}\left[\frac{1 + (1+h_o)\Upsilon^{(n)}\mathrm{th}\Upsilon^{(n)} + \dfrac{1}{\mathrm{ch}\Upsilon^{(n)}\cos\Upsilon^{(n)}}}{(1+h_o)\Upsilon^{(n)} + 2h_o^2\,\Upsilon^{(n)2}\,\mathrm{th}\Upsilon^{(n)}}\right] \quad (2.14)$$

trong đó nghiệm gần đúng bậc nhất $\Upsilon^{(1)}$ được xác định bằng cách vẽ đồ thị. Việc vẽ đồ thị để xác định $\Upsilon^{(1)}$ có thể tiến hành bằng nhiều cách. Chẳng hạn ta có thể viết phương trình (2.13) dưới dạng sau:

$$h_o\Upsilon = \frac{1 + (\mathrm{th}\Upsilon - \mathrm{tg}\Upsilon)\Upsilon + \dfrac{1}{\mathrm{Ch}\Upsilon\cos\Upsilon}}{(1 + 2\Upsilon\,\mathrm{th}\Upsilon)\Upsilon - \mathrm{th}\Upsilon} \quad (2.15)$$

Trên mặt phẳng tọa độ với hoành độ Υ, ta vẽ đồ thị hai vế của phương trình thu được, và tìm các giao điểm của chúng. Các giao điểm này cho các nghiệm $\Upsilon^{(1)} = \Upsilon^{(1)}(h_o)$. Sau đó nghiệm bài toán được xác định bằng phép lặp (2.14).

Thuật toán được tiến hành trên máy tính điện tử EC – 1020 và cho kết quả ghi ở bảng 1:

Bảng 1

γ_i \ h_0	0	0,1	0,5	1	5	∞
γ_1	1,25	1,17	0,98	0,87	0,62	0
γ_2	4,03	3,79	3,48	3,39	3,27	3,0
γ_3	7,13	7,07	6,93	6,85	6,37	6,35
γ_4	10,26	9,78	9,57	9,52	9,48	9,74
γ_5	13,38	12,88	12,67	12,95	12,61	12,61

Sau khi tính được γ_i ta xác định tần số riêng ω_i qua biểu thức

$$\omega_i = \frac{\gamma_i^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}$$

Từ kết quả tính toán chúng ta nhận thấy rằng hệ số h_o đặc trưng cho độ cứng của nền khi quay ảnh hưởng khá rõ lên tần số dao động riêng của cột tháp nước. Khi hệ số h_o tăng lên thì tần số riêng giảm đi. Đối với các loại nền thông thường, hệ số h_o lấy giá trị xấp xỉ đơn vị và tần số riêng lấy những giá trị thấp hơn so với tần số riêng trong trường hợp nền cứng tuyệt đối.

§3. CÁC DẠNG DAO ĐỘNG RIÊNG VÀ MÔ MEN UỐN TRONG TRƯỜNG HỢP NỀN CHỊU NÉN

a) Viết lại biểu thức của Z(z) theo (2.7)

$$Z(z) = AU(kz) + BV(kz) + CS(kz) + DT(kz)$$

Xác định các hằng số A, B, C, D từ các điều kiện biên (2.3a') (2.4b') sau đó thay chúng vào biểu thức Z(z) ta có

$$Z(z) = B\left\{V(kz) - C_o\gamma^3 S(kz) - \frac{T(\gamma) - C_o\gamma^3 U(\gamma)}{S(\gamma) + h_o\gamma V(\gamma)}\left[U(kz) + h_o\gamma T(kz)\right]\right\}$$

Cho B = 1 ta viết biểu thức các dạng dao động riêng

$$Z_i(z) = V(k_i z) - C_o\gamma_i^3 S(k_i z) - \frac{T(\gamma_i) - C_o\gamma_i^3 U(\gamma_i)}{S(\gamma_i) + h_o\gamma_i V(\gamma_i)}\left[U(k_i z) + h_o\gamma_i T(k_i z)\right] \quad (3.1)$$

b) Biểu thức của mô men uốn tại mặt cắt ngang bất kỳ sẽ là:

$$M(z) = \overline{M}g\left[Z(l) - Z(z)\right] + \int_z^l mg\left[Z(\tau) - Z(z)\right]d\tau$$

Công thức này đúng cho mọi dạng dao động riêng nên ta có thể viết

$$M_i(z) = \overline{M}g\left[Z_i(l) - Z_i(z)\right] + \int_z^l mg\left[Z_i(\tau) - Z_i(z)\right]d\tau$$

Thay biểu thức $Z_i(z)$ từ (3.1) vào biểu thức trên ta nhận được

$$\frac{M_i(z)}{\overline{M}g} = Z_i(l) - Z_i(z)\left[1 - \frac{z}{l}\right] - \frac{1}{\gamma_i}\left\{Z(\gamma_i) - S(k_i z) - C_o\gamma_i^3\left[T(\gamma_i) - T(k_i z)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{T(\gamma_i) - C_o\gamma_i^3 U(\gamma_i)}{S(\gamma_i) + h_o\gamma_i V(\gamma_i)}\left[V(\gamma_i) - V(k_i z) + h_o\gamma_i\left(U(\gamma_i) - U(k_i z)\right)\right]\right\}$$

Cho Z các giá trị từ 0 đến 1 vào các biểu thức (3.1) và (3.2) ta có thể vẽ biểu đồ các dạng dao động riêng và mô men uốn. Các tính toán cụ thể cho trường hợp $C_o = 0$ và h_o thay đổi cho thấy rằng các giá trị h_o thay đổi nhìn chung không có ảnh hưởng lớn lên biểu đồ các dạng dao động riêng và biểu đồ của mô men uốn.

Địa chỉ: Viện Cơ học, Viện KHVN

Nhận ngày 15/10/1981

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. КАБУЛОВ В. К. Свободные колебания консоли с массой на конце. Изв. АН. УзССР сер. тех. наук N°I/1957.

2. МАМАТКУЛОВ Ш. М. Изгибные свободные колебания стойки, несущей на свободном конце резервуар, частично заполненный жидкостью. Труды ТашГУ. Вып. 275.

3. КАРИЕВ Х. С. Исследование колебания стойки, несущей на свободном конце резервуар с жидкостью. Изв. АН. УзССР сер. тех. наук N°I/1962.

4. ТИМОШЕНКО С. П. Колебания в инженерном деле. М. Физматиз. 1959.

РЕЗЮМЕ

Влияние податливости основания на свободные изгибные колебания стойки, несущей на свободном конце резервуар с жидкостью

Полученные частотные уравнения содержат коэффициенты, характеризующие податливость основания. Частотные уравнения решаются методом последовательных приближений. Получены также выражения форм собственных колебаний и изгибающих моментов. Численные расчеты показывают, что податливость основания оказывает большое влияние на собственные частоты стойки. Однако на собственные формы стойки и изгибающие моменты это влияние не существено.

THÔNG BÁO SỐ 2 VỀ HỘI NGHỊ CƠ HỌC TOÀN QUỐC LẦN THỨ III

Thể theo yêu cầu của nhiều cán bộ khoa học kỹ thuật, để có thời gian chuẩn bị tốt hơn Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ III trước đây dự định tổ chức vào tháng 4/1982 nay sẽ tổ chức vào quý III/1982. Việc đăng ký báo cáo được gia hạn đến ngày 1-4-1982. Tất cả các báo cáo (đã hoặc sẽ đăng ký) muốn được trình bày ở hội nghị cần gửi đến Ban trù bị hai bản báo cáo toàn văn (viết theo quy định đối với bài gửi đăng ở tạp chí Cơ học) trước ngày 1-4-1982 để kịp xét duyệt và đưa vào chương trình hội nghị.

Trong thời gian tiến hành hội nghị sẽ có triển lãm về « Những thành tựu nghiên cứu, giảng dạy và ứng dụng cơ học ở nước ta ». Ban trù bị hội nghị trân trọng đề nghị các cơ quan cũng như các cán bộ cơ học tích cực tham gia triển lãm, trước hết thông báo với Ban trù bị về những thành tựu cơ học của cơ quan cũng như của cá nhân đã đạt được.

Về các vấn đề có liên quan đến hội nghị xin liên hệ với thường trực Ban theo địa chỉ : Viện Cơ học — Viện Khoa học Việt nam — 208^{Đ} Đội Cấn, Hà nội.