Tạp chí Cơ Học T.V. 1983, Số 4 (trang 23-29)

GIẢI GẦN ĐÚNG MỘT BÀI TOÁN THẤM TRONG MÔI TRƯỜNG NHIỀU LỚP BẰNG PHƯƠNG PHÁP TRỰC

NGÔ VĂN LƯỢC — VŨ VĂN ĐẠT

Nội dung bài báo cáo này là xây dựng nghiệm giải tích số cho bài toán thấm phẳng dừng qua đập đất gồm nhiều lớp thẳng đứng. Trong trường hợp môi trường đồng chất và môi trường hai lớp, bài toán này đã được giải bằng phương pháp trực trong, [2, 6]. Mục đích của bài này là mở rộng các kết quả trên cho trường hợp số lớp bất kỳ.

§ 1. ĐẶT BÀI TOÁN

Giả sử đập đất có tiết diện chữ nhật trong mặt phẳng Oxy :

$$D = (0, a) \times (0, Y_1)$$

ngăn hai lớp nước có độ cao khác nhau là Y_1 và Y_2 ($Y_1 > Y_2$), trong đó a, Y_1, Y_2 là các số thực dương.

Giả sử đập đất cấu tạo từ $r + 1$ lớp thẳng đứng (r là số nguyên không âm) với hệ số thấm là hằng số trong mỗi lớp.

$$\varkappa = \varkappa(x) = \varkappa_k, \text{ nếu } a_{k-1} < x < a_k \ (k = 1, 2, \ldots, r+1),$$
$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_r < a_{r+1} = a \qquad (1.1)$$

Ta gọi biên phân chia vùng thấm nước và vùng khô trong đập là biên tự do và giả sử phương trình của nó có dạng:

$$y = \psi(x), \quad 0 < x < a.$$

Đặt

$$\Omega = \{(x, y) \in D \mid 0 < x < a, \ 0 < y < \psi(x)\}$$

Khi đó bài toán thấm có thể phát biểu như sau [3].

BÀI TOÁN A. Tìm các hàm $\{\psi(x), \varphi(x, y)\}$, trong đó $\varphi(x, y)$ là hàm thế của dòng thấm, thỏa mãn các điều kiện sau :

(i) Hàm $\Psi(x)$ xác định, liên tục, giảm chặt trên $(0, a)$ và

$$\psi(0) = Y_1, \quad \psi(a) > Y_2.$$

(ii) Hàm $\varphi(x, y)$ là nghiệm của bài toán biên sau

$$\operatorname{div}(\varkappa \operatorname{grad} \varphi) = 0, \text{ nếu } (x, y) \in \Omega,$$
$$\varphi = Y_1, \text{ nếu } x = 0, \ 0 < y < Y_1,$$
$$\varphi = Y_2, \text{ nếu } x = a, \ 0 < y < Y_2,$$
$$\varphi = y, \text{ nếu } x = a, \ Y_2 < y < \psi(a),$$

$$\varphi = 0, \quad \text{nếu } 0 < x < a, \; y = 0,$$

$$\varphi = y \text{ và } \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ trên biên tự do,}$$

$$\varphi \,|_{a_i - 0} = \varphi \,|_{a_i + 0}\,; \qquad \varkappa_i D_x \varphi \,|_{a_i - 0} = \varkappa_{i+1} D_x \varphi \,|_{a_i + 0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

ở đây $\frac{\partial}{\partial n}$ là đạo hàm theo pháp tuyến ngoài, D_x — đạo hàm theo x.

Ta đưa vào biến đổi Baiocchi [1]

$$u(x, y) = \int_{y}^{Y_1} [\tilde{\varphi}(x, t) - t]dt,$$

trong đó:

$$\tilde{\varphi}(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, y), \text{ nếu } (x, y) \in \Omega \\ y, \quad \text{nếu } (x, y) \in \overline{D} / \Omega \end{cases}$$

Trong [2] đã xét bài toán biên của u trong trường hợp hai lớp và nêu ra khả năng mở rộng cho trường hợp nhiều lớp. Chúng tôi sử dụng kỹ thuật trong [1] với vài thay đổi nhỏ để chuyển bài toán A sang bài toán B trong trường hợp nhiều lớp.

BÀI TOÁN B: Tìm hàm u(x, y) là nghiệm của bài toán biên sau

$$\operatorname{div}(\varkappa \operatorname{grad} u) = \varkappa \chi_{\Omega}, \text{ nếu } (x, y) \in D,$$

$$u = g, \text{ nếu } (x, y) \in \partial D, \tag{1.2}$$

$$u \,|_{a_i - 0} = u \,|_{a_i + 0}, \; \varkappa_i D_x u \,|_{a_i - 0} = \varkappa_{i+1} D_x u \,|_{a_i + 0}, \quad i = 1, 2, \ldots, r$$

và thỏa mãn điều kiện:

$$u(x, y) > 0, \text{ nếu } (x, y) \in \Omega,$$

$$u(x, y) = 0, \text{ nếu } (x, y) \in \overline{D} \setminus \Omega \tag{1.3}$$

ở đây, ta sử dụng các ký hiệu sau

$$\chi_{\Omega} = \begin{cases} 1, \text{ nếu } (x, y) \in \Omega, \\ 0, \text{ nếu } (x, y) \in D \setminus \Omega, \end{cases}$$

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(Y_1 - y)^2, \text{ nếu } x = 0, \; 0 < y < Y_1, \\ (Y_2 - y)^2, \text{ nếu } x = a, \quad 0 < y < Y_2, \\ 0, \quad \text{nếu } x = a, \quad Y_2 < y < Y_1 \\ 0, \quad \text{nếu } 0 < x < a, \; y = Y_1, \\ -\frac{q}{\varkappa_i}(x - a_{i-1}) + \beta_i, \text{ nếu } a_{i-1} < x < a_i \;\; (i = 1, 2, \ldots, \Gamma + 1), \; y = 0, \end{cases} \tag{1.4}$$

trong đó

$$\beta_1 = Y_1^2,$$

$$\beta_i = -\frac{q}{\varkappa_i}(a_i - a_{i-1}) + \beta_i \quad (i = 1, 2, \ldots, \Gamma),$$

$$q = (Y_1 - Y_2^2)/2 \sum_{i=1}^{r+1} \frac{a_i - a_{i-1}}{\varkappa_i}$$

§2. LỜI GIẢI GẦN ĐÚNG

Ta xây dựng lời giải gần đúng cho bài toán B bằng phương pháp trực. Để làm điều đó chúng ta đưa ra họ các đường thẳng

$$x_i = ih, \quad h = \frac{a}{N+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

trong đó N là số nguyên dương nào đó.

Ta thay các đạo hàm theo x ở (1.2) bằng các tương tự sai phân của chúng và giả thiết thêm rằng các đường thẳng phân chia các lớp đất trùng với các đường thẳng nào đó của họ đường phân chia.

$$a_i = x_{n_1+n_2+\ldots+n_i+i} = (n_1 + n_2 + \ldots + n_i + i)h \quad (i = 1, \ldots, r + 1).$$

Áp dụng phương pháp nội suy tích phân [4] ta thu được hệ phương trình vi sai phân của phương pháp trực đối với bài toán (1.2) như sau

$$\frac{d^2\vec{u}}{dy^2} + \frac{1}{h^2}(\rho^{-1}T - 2E)\vec{u} = \vec{f} \qquad (2.1)$$

trong đó $\vec{u}$, $\vec{f}$ là vectơ N chiều; ρ, E, T — ma trận vuông cấp N

$$\vec{u} = \{u_1, u_2, \ldots, u_N\}, \quad u_i = u_i(y) = u(x_i, y), \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\vec{f} = \{f_1, f_2, \ldots, f_N\}, \quad f_1 = \chi(y_1) - \frac{1}{2h^2}(Y_1 - y)^2,$$

$$f_i = \chi(y_i), \ (i = 2, 3, \ldots, N-1), \ f_N = \chi(y_N) - \frac{1}{2h^2}(Y_2 - y)^2\chi(Y_2),$$

$$\rho = \operatorname{diag}\left[\varkappa_1, \ldots, \varkappa_1, \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2}, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_2, \ldots, \frac{\varkappa_r + \varkappa_{r+1}}{2}, \varkappa_{r+1}, \ldots, \varkappa_{r+1}\right]$$

E — ma trận đơn vị,

T = diag $[T_1, T_2, \ldots, T_{r+1}]$, trong đó T_j $(j = 1, 2, \ldots, r + 1)$ là ma trận vuông cấp $n_j + 1$ dạng.

$$T_j = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa_j & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \varkappa_j & 0 & \varkappa_j & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \varkappa_j & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \varkappa_j & 0 \end{bmatrix}, \quad (j = 1, 2, \ldots, r + 1),$$

ở đây

$$\chi(\xi) = \begin{cases} 1, \text{ nếu } 0 \leqslant y \leqslant \xi \\ 0, \text{ nếu } \xi < y \leqslant Y_1 \end{cases}$$

Trong [5] đã nghiên cứu sự tồn tại của biểu thức các giá trị riêng và vec tơ riêng của ma trận $\rho^{-1}T$ và đưa ra các hệ thức

$$\rho^{-1}T = W\Lambda W^*\rho, \quad WW^*\rho = W^*\rho W = E, \qquad (2.2)$$

trong đó $W = (W_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, N)$ là ma trận cơ sở của $\rho^{-1}T$,

W^* — ma trận chuyển vị của W và Λ — ma trận đường chéo với các phần tử bằng các giá trị riêng của ma trận $\rho^{-1}T$

$$\Lambda = \operatorname{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_N].$$

Từ (2.2) và (2.1) ta thu được

$$\frac{d^2\vec{v}}{dy^2} + \frac{1}{h^2}(A - 2E)\vec{v} = \vec{g}(y),\ 0 < y < Y_1, \tag{2.3}$$

trong đó

$$\vec{v} = W^*\rho\,\vec{u}\ ,\ \vec{g} = W^*\rho\,\vec{f} \tag{2.4}$$

Ta có thể viết (2.3) ở dạng thành phần như sau

$$\frac{d^2v_k}{dy^2} - \mu_k v_k = g_k(y),\quad (0 < y < Y_1;\ k = 1,\dots, N), \tag{2.5}$$

trong đó

$$\mu_k = \frac{2}{h^2}(1 - \lambda_k/2),\quad (k = 1,\ 2,\dots,\ N).$$

Nghiệm của phương trình (2.5) thỏa mãn các điều kiện trên hai đường biên ngang $y = 0$ và $y = Y_1$ trong (1.4) có dạng [2].

$$v_k = \frac{sh\sqrt{\mu_k}\,y}{sh\sqrt{\mu_k}\,Y_1}\,\frac{1}{2\mu_k}\,R_k(Y_1) + \frac{sh\sqrt{\mu_k}\,(Y_1 - y)}{sh\sqrt{\mu_k}\,Y_1}\left[\frac{1}{2\mu_k}\,R_k(0) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{N} W_{ik}\rho_i u_i(0)\right] - \frac{1}{2\mu_k}\,R_k(y),\ (0 < y < Y_1,\ k = 1, 2,\dots, N) \tag{2.6}$$

trong đó

$$R_k(y) = \begin{cases} 2\sum\limits_{i=1}^{N} W_{ik}\rho_i - \dfrac{W_{1k}\rho_1}{h^2}\left[(Y_1 - y)^2 + \dfrac{2}{\mu_k}\right] - \dfrac{W_{Nk}\rho_N}{h^2}\left[(Y_2 - y)^2 + \dfrac{2}{\mu_k}\right], \\ \qquad \text{nếu } 0 < y < Y_2. \\ 2\sum\limits_{i=1}^{N} W_{ik}M_{ik} - \dfrac{W_{1k}\rho_1}{h^2}\left[(Y_1 - y)^2 + \dfrac{2}{\mu_k}\right] - \dfrac{2W_{Nk}\rho_N}{\mu_k h^2}\,ch\sqrt{\mu_k}\,(y - Y_2), \\ \text{với } M_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } Y_2 < y \leqslant y_i. \\ ch\sqrt{\mu_k}\ (y - y_i) \text{ nếu } y_i < y \leqslant Y_1. \end{cases} \\ (k = 1,\ 2,\dots,\ N). \end{cases} \tag{2.7}$$

Qua phép biến đổi

$$\vec{u} = W\,\vec{v} \tag{2.8}$$

ta thu được kết quả sau

ĐỊNH LÝ. Nghiệm gần đúng của hệ phương trình (2.1) đối với bài toán (1.2) giải bằng phương pháp trực có dạng:

$$u_k(y) = \sum_{j=1}^{N} \frac{sh\sqrt{\mu_j}\,y}{sh\sqrt{\mu_j}\,Y_1}\,W_{kj}\sum_{i=1}^{N} q_i W_{ji} + \sum_{j=1}^{N}\frac{sh\sqrt{\mu_j}\,(Y_1 - y)}{sh\sqrt{\mu_j}\,Y_1}\ \times$$

$$\times W_{kj}\sum_{i=}^{N} t_i W_{ij} - Q_k(y) - S_k(y)\quad (k = 1,\ 2,\dots,\ N). \tag{2.9}$$

trong đó

$$Q_k(y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\mu_i} W_{ki}\rho_i \begin{cases} 1, & \text{nếu } 0 < y < y_i, \\ \mathrm{ch}\sqrt{\mu_j}\,(y - y_i), & \text{nếu } y_i < y < Y_1, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$S_k(y) = \frac{\rho_1}{h^2} \sum_{j=1}^{N} \frac{W_{kj}W_{Nj}}{\mu_j} \left[\frac{1}{2}(Y_1 - y)^2 + \frac{1}{\mu_j}\right] +$$

$$+ \begin{cases} \dfrac{\rho_N}{h^2} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{W_{kj}W_{Nj}}{\mu_j} \left[\frac{1}{2}(Y_2 - y)^2 + \frac{1}{\mu_i}\right], & \text{nếu } 0 \leqslant y \leqslant Y_2, \\ \dfrac{\rho_N}{h^2} \displaystyle\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\mu_j^2} W_{kj}W_{Nj}\mathrm{ch}\sqrt{\mu_j}\,(y - Y_2), & \text{nếu } y_2 < y \leqslant Y_1 \end{cases} \tag{2.11}$$

$$q_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\mu_k} W_{ki}\rho_k \sum_{m=1}^{N} W_{mk}\rho_m \mathrm{ch}\sqrt{\mu_k}(Y_1 - Y_m) -$$

$$- \frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\mu_k^2} W_{ki}\rho_k [W_{1k}\rho_1 + W_{Nk}\rho_N \mathrm{ch}\sqrt{\mu_k}(Y_1 - Y_2)], \tag{2.12}$$

$$t_i = -\sum_{k=1}^{N} \frac{W_{ki}\rho_k}{\mu_k h^2} \left[W_{1k}\rho_1\left(\frac{Y_1^2}{2}\right) + W_{Nk}\rho_N\left(\frac{Y_2^2}{2} + \frac{1}{\mu_k}\right)\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} W_{ki}\rho_k \sum_{m=1}^{N} W_{mk}\rho_m \left[\frac{1}{\mu_k} + u_m(0)\right], (i,\ k = 1, 2, \ldots, N) \tag{2.13}$$

Trong trường hợp $r = 0$ (môi trường đồng chất) và $r = 1$ (môi trường hai lớp) kết quả thu được trên đây trùng với các kết quả tương ứng đã thu được trong [2, 6].

§ 3. TÌM BIÊN TỰ DO

Biểu thức giải tích số (2.9) chứa các tham số y_k ($k = 1, 2, \ldots, N$) là các tham số xác định mặt tự do. Để xác định chúng, ta tính các giá trị của $u_k(y)$ tại các điểm y_k nhờ công thức (2.9).

Đặt

$$\Phi_k(y_1, y_2, \ldots, y_N) = u_k(y_k) \quad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{3.1}$$

Từ điều kiện (1.3) suy ra rằng việc tìm biên tự do đưa về việc giải hệ phương trình đại số phi tuyến

$$\Phi_k(y_1, y_2, \ldots, y_N) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, N) \tag{3.2}$$

Đây là hệ phương trình đại số khép kín đối với $(y_1, y_2, \ldots, y_N)$. Sự tồn tại nghiệm của (3.2) trong hai trường hợp đặc biệt $r = 0$ và $r = 1$ đã xét trong [2, 6].

Ta có thể giải gần đúng hệ (3.2) bằng phương pháp lặp. Chọn nghiệm gần đúng ban đầu là xấp xỉ tuyến tính :

$$y_j^{(o)} = Y_1 - (Y_1 - Y_2)\, jh \quad (j = 1, 2, \ldots, N)$$

Đặt

$$\Phi_k^{(o)} = \Phi_k\,(y_1^{(o)}, y_2^{(o)}, \ldots, y_N^{(o)}) \quad (K = 1, 2, \ldots, N)$$

Tiếp đó quá trình lặp như sau :

$$y_k^{(i+1)} = y_k^{(i)} + \omega\Phi_k^{(i)} \tag{3.3}$$

$$(k = 1,2, \ldots, N\,;\ i = 0, 1, 2, \ldots)$$

trong đó ω là tham số được chọn để quá trình lặp hội tụ tốt hơn.

Tiêu chuẩn dừng của quá trình lặp là

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant N} |\, y_k^{(i)} - y_k^{(i-1)} \,| < \varepsilon,$$

trong đó $\varepsilon > 0$ được chọn tùy theo độ chính xác của bài toán.

Thay các giá trị gần đúng tính được này của y_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ vào công thức (2.9) – (2.13) ta thu được lời giải gần đúng của bài toán B.

Để nhận được nghiệm của bài toán A ban đầu ta sử dụng phép biến đổi ngược Baiocchi [1]

$$\varphi\,(x, y) = y - U_y\,(x, y)$$

Ta cũng có thể giải trực tiếp bài toán A bằng một phương pháp gần đúng nào đó vì sau khi xác định được biên tự do thì miền Ω đã hoàn toàn xác định.

Chúng tôi đã lập chương trình theo ngôn ngữ FOTRAN và tính toán bằng số trên máy tính điện tử MINSK-32 cho một trường hợp cụ thể như sau. Mực nước thượng lưu $Y_1 = 1.0$m, mực nước hạ lưu $Y_2 = 0{,}5$m, chiều dày đập $a = 1{,}0$m. Đập gồm hai lớp đất với đường phân chia $a_1 = 0{,}5$m. Các hệ số thấm tương ứng là $\varkappa_1 = 0.0001$ m/s, $\varkappa_2 = 0.0005$m/s. Lấy độ chính xác $\varepsilon = 0{,}01$. Kết quả tính biên tự do cho trên bảng 1, khi lấy bước chia n = 12.

Bảng 1

nút	1	2	3	4	5	6
ψ	0.9724	0.9408	0.8998	0.8489	0.7775	0.6294
nút	7	8	9	10	11	
ψ	0.6433	0.5755	0.5649	0.5474	0.5266	

Kết luận : Phương pháp gần đúng trình bày trên đây trực tiếp mở rộng kết quả của Phage trong trường hợp đập đất đồng chất sang trường hợp đập gồm nhiều lớp đất với hệ số thấm khác nhau. Nó có ưu điểm là cho phép trực tiếp tính biên tự do, yếu tố quan trọng nhất của bài toán, mà trong các phương pháp khác phải tính biên tự do gián tiếp thông qua nghiệm bài toán (chẳng hạn xem phương pháp Baiocchi [1]). Tuy nhiên vấn đề hội tụ của phương pháp cần được tiếp tục nghiên cứu vì ngay cả trong trường hợp đập đất đồng chất vấn đề này cũng chưa được xét [6].

Địa chỉ
Viện Toán học Viện KHVN

Nhận ngày 5/1/1982

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. C. BAIOCCHI, V. COMINCIOLI, E. MAGENES, G. A. POZZI.
Free boundary problems in the theory of fluid flow through pourous media : Exisistence and uniqueness theorems. Ann. de Math. Pura ed Appl., serie IV, 97 (1973), P. P. 1 – 83.

2. NGÔ VĂN LƯỢC, VŨ VĂN ĐẠT.
An approximative solution of free boundary value problem for fluid flow through a dam with vertical layers. Preprints, series N° 16, Hanoi, 1981, Institute of mathematics and institute of computer science and cybernetics

3. ПОЛУБАРИНОВА–КОЧИНА П. А. Теория движения грунтовых вод Наука, М., 1977.

4. САМАРСКИЙ А.А. Теория разностных схем. Наука, М., 1977.

5. ЛЯШЕНКО И. Н. Собственные значения и собственныеф функции конечно-разностного оператора с кусочно-постоянными коэффициентами. «Вычислительная и прикладная математика», Вып. 10, 78 — 89, Киев, 1970.

6. ФАГЕ Д. М. Приближённое решение модельной задачи фильтрации методом прямых. «Численные методы механики сплошных сред», Т. 10, N°5, Новорсибирск, 1979.

РЕЗЮМЕ

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИЙ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ ПРЯМЫХ

В данной работе, следуя [5], построено численно — аналитическое решение одной задачи фильтрации в многослойной среде со свободной гарницей методом прямых.

HỘI NGHỊ KHOA HỌC ĐỊA KỸ THUẬT CÁC TỈNH PHÍA NAM

Vừa qua, trong hai ngày 24 và 25-6-1983, tại thành phố Hồ Chí Minh, đã tiến hành Hội nghị khoa học Địa kỹ thuật (Địa chất Công trình, Cơ học đất, Nền móng) lần thứ nhất, do UBKH và KTNN, UBXDCBNN phối hợp cùng Ủy ban Nhân dân thành phố Hồ Chí Minh tổ chức.