Tạp chí Cơ Học T. V. 1983, Số 4 (trang 14 – 22)

VỀ PHƯƠNG TRÌNH DAO ĐỘNG CỦA VỎ MỎNG

NGUYỄN XUÂN HÙNG

Trong bài này các phương trình dao động của vỏ mỏng có tính đến các yếu tố phi tuyến hình học được xây dựng trên cơ sở của nguyên lý Hamilton và phép tính Ten-xơ. Khác với các lý thuyết khác [3], [5], [6] ở đây có tính đến sự biến đổi của Ten-xơ Mê-trik dọc theo chiều dày của vỏ. Tiếp theo, hai lý thuyết đơn giản của vỏ được xây dựng bằng cách bỏ qua một số số hạng trong biểu thức năng lượng của vỏ – Trong trường hợp tuyến tính các lý thuyết đơn giản này trùng hợp với các lý thuyết đã có trước đây.

§1. MỘT SỐ ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA VỎ

Ta ký hiệu x^i $(i = 1, 2, 3)$ là các tọa độ cong tổng quát trong không gian ba chiều của vỏ, $\vec{g}_i = \vec{r}_{,i} = \partial \vec{r}/\partial x^i$ là các vectơ cơ sở (côvarian) và $g_{ij} = \vec{g}_i . \vec{g}_j$ là ten-xơ Metrik của không gian vỏ.

Đạo hàm Covarian trong không gian được ký hiệu bởi hai vạch thẳng đứng (ví dụ $T_{ij} \| k$)

Giả thiết x^i là hệ tọa độ cong trong đó bán kính véctơ $\vec{r}$ của một điểm thuộc không gian vỏ được biểu diễn dưới dạng:

$$\vec{r} = \overset{\circ}{\vec{r}}(x^1, x^2) + x^3 \vec{a}_3(x^1, x^2), \tag{1.1}$$

với điều kiện:

$$\vec{r}_{,\alpha} . \vec{a}_3 = 0, \quad \vec{a}_3 . \vec{a}_3 = 1, \tag{1.2}$$

(từ nay về sau ta giả thiết các chỉ số viết bằng chữ Hy lạp α, β, λ, ν lấy hai giá trị 1 và 2 còn các chỉ số la tinh i, j, k, ... lấy các giá trị 1, 2 và 3).

Phương trình $x^3 = 0$ xác định một mặt (mặt trung bình của vỏ), bán kính véctơ của một điểm trên mặt xác định bởi

$$\vec{r} = \overset{\circ}{\vec{r}}(x^\alpha) = \vec{\Gamma}(x^\alpha, 0) \tag{1.3}$$

với véctơ pháp tuyến đơn vị $\vec{a}_3$

Các véctơ cơ sở và các thành phần của tenxơ metrik của mặt được xác định bởi:

$$\vec{a}_\alpha = \overset{\circ}{\vec{r}}_{,\alpha} \equiv \vec{g}_\alpha (x^\gamma, 0)\ ;\ a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} = \vec{a}_\alpha . \vec{a}_\beta \equiv g_{\alpha\beta}(x^\gamma, 0)\ ; \tag{1.4}$$

$$a_{\alpha\beta} . a^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha\ ;\ \vec{a}^\alpha = \vec{a}_\beta . a^{\beta\alpha} \tag{1.4}$$

Tenxơ độ cong của mặt được xác định qua biểu thức

$$b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha} = \vec{a}_3 . \vec{a}_{\alpha,\beta} = - \vec{a}_\alpha . \vec{a}_{3,\beta} \tag{1.5}$$

Độ cong trung bình H và độ cong Gauss K được định nghĩa như sau

$$H = \frac{1}{2}\, b^{\alpha}_{\alpha},\ K = |b^{\alpha}_{\beta}| = a^{-1}\,|b_{\alpha\beta}| = b^1_1 b^2_2 - b^2_1 b^1_2$$

$$a = |a_{\alpha\beta}| = a_{11}a_{22} - (a_{12})^2 \tag{1.6}$$

Đạo hàm covarian đối với mặt được ký hiệu bởi một vạch thẳng đứng (ví dụ $\overset{\circ}{T}_{\alpha\beta}\,|_{\gamma}$).

Từ (1.1), (1.4), (1.5) ta nhận được quan hệ giữa tenxơ không gian và tenxơ mặt

$$\vec{g}_{\alpha} = \vec{a}_{\alpha} - z b^{\nu}_{\alpha}\vec{a}_{\nu} = \mu^{\gamma}_{\alpha}\vec{a}_{\gamma},$$

$$g_{\alpha\beta} = \vec{g}_{\alpha}\cdot\vec{g}_{\beta} = \mu^{\nu}_{\alpha}\,\mu^{\lambda}_{\beta}\,a_{\nu\lambda}, \tag{1.7}$$

$$\mu^{\gamma}_{\alpha} = \delta^{\gamma}_{\alpha} - z b^{\gamma}_{\alpha},\ z \equiv x^3. \tag{1.8}$$

Từ (1.8) ta có:

$$\mu = |\mu^{\gamma}_{\alpha}| = \sqrt{g/a} = 1 - 2zH + z^2K. \tag{1.9}$$

Ma trận ngược của μ^{α}_{γ} được ký hiệu là $(\mu^{-1})^{\alpha}_{\beta}$:

$$\mu^{\beta}_{\gamma}\,(\mu^{-1})^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\gamma}\,. \tag{1.10}$$

Theo [1] ta có biểu thức sau đây:

$$(\mu^{-1})^{\alpha}_{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n (b^n)^{\alpha}_{\beta}\,, \tag{1.11}$$

$$(b^0)^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}\,,\ (b^1)^{\alpha}_{\beta} = b^{\alpha}_{\beta}\,,\ (b^n)^{\beta}_{\alpha} = b^{\lambda}_{\beta}\,(b^{(n-1)})^{\alpha}_{\lambda} = b^{\alpha}_{\lambda}\,(b^{(n-1)})^{\lambda}_{\beta}\,. \tag{1.12}$$

Giả thiết T_i và $\overset{\circ}{T}{}^i$ là các thành phần của vectơ T đối với các vectơ cơ sở $\vec{g}^i$ và $(\vec{a}^{\alpha}, \vec{a}_3)$ tương ứng:

$$\vec{T} = T_i\vec{g}^i = T^i\vec{g}_i = T_{\alpha}\vec{g}^{\alpha} + T_3\vec{g}^3 = T^{\alpha}\vec{g}_{\alpha} + T^3\vec{g}_3, \tag{1.13}$$

$$\vec{T} = \overset{\circ}{T}_{\alpha}\vec{a}^{\alpha} + \overset{\circ}{T}_3\vec{a}^3 = \overset{\circ}{T}{}^{\alpha}\vec{a}_{\alpha} + \overset{\circ}{T}{}^3\vec{a}_3.$$

Vì $\vec{g}_3 = \vec{a}_3 = \vec{a}^3$ từ (1.7), ta nhận được các biểu thức sau đây

$$T_{\alpha} = \mu^{\nu}_{\alpha}\,\overset{\circ}{T}_{\nu},\ \ T^{\alpha} = (\mu^{-1})^{\alpha}_{\nu}\,\overset{\circ}{T}{}^{\nu},$$

$$\overset{\circ}{T}_{\alpha} = (\mu^{-1})^{\alpha}_{\nu}\,T^{\nu},\ \overset{\circ}{T}{}^{\alpha} = \mu^{\alpha}_{\nu}\,T^{\nu},\ T_3 = T^3 = \overset{\circ}{T}_3 = \overset{\circ}{T}{}^3. \tag{1.14}$$

Tương tự ta nhận được biểu thức của các tenxơ:

$$T^{\alpha}_{\beta} = (\mu^{-1})^{\alpha}_{\nu}\,\mu^{\lambda}_{\beta}\,\overset{\circ}{T}{}^{\nu}_{\lambda}\,,\ \overset{\circ}{T}{}^{\alpha}_{\beta} = \mu^{\alpha}_{\nu}\,(\mu^{-1})^{\lambda}_{\beta}\,T^{\nu}_{\lambda}\,. \tag{1.15}$$

Từ định nghĩa của đạo hàm covarian ta nhận được các biểu thức quan hệ giữa đạo hàm covarian đối với không gian và đối với mặt

$$T_\alpha \|_\beta = \mu_\alpha^\nu \, [\mathring{T}_\nu |_\beta - b_{\nu\beta} \mathring{T}^3]; \; T^\alpha \|_\beta = (\mu^{-1})_\nu^\alpha \, [\mathring{T}^\nu |_\beta - b_\beta^\nu \, \mathring{T}^3] \, ;$$

$$T_\beta^\alpha \|_\gamma = (\mu^{-1})_\nu^\alpha \, \mu_\beta^\lambda \, [\mathring{T}_\lambda^\nu |_\gamma - b_{\lambda\gamma} \, \mathring{T}_3^\nu - b_\gamma^\nu \, \mathring{T}_\lambda^3 \,] \, ;$$

$$T_\alpha \|_3 = \mu_\alpha^\nu \, \mathring{T}_{\nu,3} \, ; \; T_3 \|_\alpha = \mathring{T}_{3,\alpha} + b_\alpha^\lambda \, \mathring{T}_\lambda \, ; \; T^3 \|_\alpha = \mathring{T}^3_{,\alpha} + b_{\alpha\lambda} \, \mathring{T}^\lambda \, ;$$

$$T^\alpha \|_3 = (\mu^{-1})_\nu^\alpha \, \mathring{T}^\nu_{,3} \, ; \; T^3 \|_3 = T_3 \|_3 = T_{3,3} = \mathring{T}_{3,3} = \mathring{T}^3_{,3}. \tag{1.16}$$

§ 2. TÍNH TOÁN CÔNG BIẾN DẠNG CỦA VỎ MỎNG

Tenxơ biến dạng theo Green được định nghĩa như một nửa hiệu giữa ten-xơ metrik của vỏ bị biến dạng đối với vỏ chưa biến dạng.

Từ định nghĩa đó ta nhận được biểu thức sau đây của tenxơ biến dạng

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (\mathcal{U}_i \|_j + \mathcal{U}_j \|_i + \mathcal{U}^k \|_i \, . \, \mathcal{U}_k \|_j) . \tag{2.1}$$

Trong đó $\vec{\mathcal{U}}(x^\alpha, z, t) = \mathcal{U}_i \, . \vec{g}^i = \mathcal{U}^i \, . \vec{g}_i$ là vectơ dịch chuyền của một điểm của vỏ. Từ (2.1) và (1.16) ta nhận được biểu thức chính xác sau đây của ten-xơ biến dạng

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} [\mu_\alpha^\nu \, \varepsilon_{\beta\nu} + \mu_\beta^\nu \, \varepsilon_{\alpha\nu} + a^{\lambda\nu} \varepsilon_{\alpha\nu} \varepsilon_{\beta\lambda} + \theta_\alpha \theta_\beta], \\ \gamma_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \, [\mu_\alpha^\rho \, \mathring{\mathcal{U}}_{\rho,3} + \theta_\alpha + \mathring{\mathcal{U}}^\lambda_{,3} \, \varepsilon_{\alpha\lambda} + \theta_\alpha \mathring{\mathcal{U}}_{3,3}], \\ \gamma_{33} &= \mathring{\mathcal{U}}_{3,3} + \frac{1}{2} \, (\mathring{\mathcal{U}}^\lambda_{,3} \, \mathring{\mathcal{U}}_{\lambda,3} + \mathring{\mathcal{U}}^3_{,3} \, \mathring{\mathcal{U}}^3_{,3}), \end{aligned} \tag{2.2}$$

trong đó

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \mathring{\mathcal{U}}_\beta \mid_\alpha - b_{\alpha\beta} \mathring{\mathcal{U}}_3, \\ \theta_\alpha &= \mathring{\mathcal{U}}_{3,\alpha} + b_{\alpha\beta} \mathring{\mathcal{U}}^\beta, \end{aligned} \tag{2.3}$$

$\vec{\mathring{\mathcal{U}}}_\alpha$, $\mathring{\mathcal{U}}_3$ là các thành phần của $\vec{\mathcal{U}}$ đối với $(\vec{a}_\alpha, \vec{a}_3)$ (xem (1.13)). Với giả thiết tiết diện phẳng $\mathring{\mathcal{U}}_\alpha$, $\mathcal{U}_3$ có dạng [6] :

$$\begin{aligned} \mathring{\mathcal{U}}_\alpha(x^\alpha, z, t) &= \mathcal{V}_\alpha(x^\alpha, t) + z \overset{1}{\mathcal{V}}_\alpha(x^\alpha, t), \\ \mathring{\mathcal{U}}_3(x^\alpha, z, t) &= W(x^\alpha, t). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Trong (2.4) $\mathcal{V}_\alpha$, W là các thành phần của vectơ chuyền dời của một điểm trên mặt trung bình của vỏ, $\overset{1}{\mathcal{V}}_\alpha$ là góc quay của pháp tuyến của mặt này.

Lúc bỏ qua σ^{33} định luật Húc trong hệ tọa độ pháp ($g^{\alpha 3} = 0,\ g^{33} = 1$) có dạng [2]:

$$\sigma^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta\delta\mu}\gamma_{\delta\mu}, \tag{2.5}$$

$$\sigma^{\alpha 3} = 2C^{\alpha 3\gamma 3}\gamma_{\gamma 3},$$

với

$$A^{\alpha\beta\gamma\delta} = A^{\beta\alpha\gamma\delta} = A^{\alpha\beta\delta\gamma} = A^{\gamma\delta\alpha\beta}, \tag{2.6}$$

$$C^{\alpha 3\lambda 3} = C^{\lambda 3\alpha 3}$$

Công biến dạng của vỏ được xác định từ biểu thức

$$\prod = \frac{1}{2}\int_V \sigma^{ik}\gamma_{ik}dv = \prod_\sigma + \prod_\tau \tag{2.7}$$

Trong đó

$$\prod_\sigma = \int_{\Omega_m}\int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}\mu\sqrt{a}\ dzdx^1dx^2 \tag{2.8}$$

$$\prod_\tau = \int_{\Omega_m}\int_{-h/2}^{h/2} 2\sigma^{\alpha 3}\gamma_{\alpha 3}\mu\sqrt{a}\ dzdx^1dx^2 \tag{2.9}$$

Vì $\sigma^{\alpha\beta}$ đối xứng, từ (2.2), (2.3), (1.10) ta có

$$\sigma^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta}\mu_\alpha^\gamma\,[e_{\beta\gamma} + z\overset{1}{e}_{\beta\gamma} + \frac{1}{2}(\mu^{-1})_\gamma^\rho\,(a^{\lambda\nu}e_{\beta\lambda}e_{\rho\nu} + \omega_\beta\omega_\rho)$$
$$+ z(\mu^{-1})_\gamma^\rho\,(a^{\lambda\nu}e_{\beta\lambda}\overset{1}{e}_{\rho\nu} + \omega_\beta\overset{1}{\omega}_\rho) + \frac{1}{2}z^2(\mu^{-1})_\gamma^\rho\,(a^{\lambda\nu}\overset{1}{e}_{\beta\lambda}\overset{1}{e}_{\rho\nu} + \overset{1}{\omega}_\beta\overset{1}{\omega}_\rho)] \tag{2.10}$$

Khai triển $(\mu^{-1})_\gamma^\rho$ theo Z và chỉ giữ lại các số hạng đến bậc Z^2 từ (2.10) ta nhận được

$$\sigma^{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta} = \mu_\alpha^\gamma\,\sigma^{\alpha\beta}(\tilde{\gamma}_{\beta\gamma} + z\rho_{\beta\gamma} + z^2\overset{1}{\gamma}_{\beta\gamma}), \tag{2.11}$$

với

$$\tilde{\gamma}_{\beta\gamma} = e_{\beta\gamma} + \frac{1}{2}a^{\lambda\nu}e_{\beta\lambda}e_{\gamma\nu} + \frac{1}{2}\omega_\beta\omega_\gamma,$$

$$\rho_{\beta\gamma} = \overset{1}{e}_{\beta\gamma} + \frac{1}{2}b_\gamma^\rho\,(a^{\lambda\nu}e_{\beta\lambda}e_{\rho\nu} + \omega_\beta\omega_\rho) + a^{\lambda\nu}e_{\beta\lambda}\overset{1}{e}_{\gamma\nu} + \omega_\beta\overset{1}{\omega}_\gamma,$$

$$\gamma_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}(b^2)_\gamma^\rho\,(a^{\lambda\nu}e_{\beta\lambda}e_{\rho\nu} + \omega_\beta\omega_\rho) + b_\gamma^\rho\,(a^{\lambda\nu}e_{\beta\lambda}\overset{1}{e}_{\rho\nu} + \omega_\beta\overset{1}{\omega}_\rho)$$
$$+ \frac{1}{2}(a^{\lambda\nu}\overset{1}{e}_{\beta\lambda}\overset{1}{e}_{\gamma\nu} + \overset{1}{\omega}_\beta\overset{1}{\omega}_\gamma), \tag{2.12}$$

$$e_{\alpha\beta} = \mathscr{U}_\beta|_\alpha - b_{\alpha\beta}W,\quad \omega_\alpha = W_{,\alpha} + b_{\alpha\beta}\mathscr{U}^\beta,$$

$$\overset{1}{e}_{\alpha\beta} = \overset{1}{\mathscr{U}}_\beta|_\alpha,\quad \overset{1}{\omega}_\alpha = b_{\alpha\beta}\overset{1}{\mathscr{U}}{}^\beta. \tag{2.13}$$

Tương tự vì sự đối xứng của $A^{\alpha\beta\delta\varkappa}$ (xem (2.6)), từ (2.5) ta có

$$\sigma^{\alpha\beta} = A^{\alpha\beta\delta\varphi}\mu_\delta^\varkappa(\tilde{\gamma}_{\varphi\varkappa} + z\rho_{\varphi\varkappa} + z^2\overset{1}{\gamma}_{\varphi\varkappa}) \tag{2.14}$$

Từ (2.11), (2.14) ta nhận được biểu thức đối với Π_σ :

$$\prod_\sigma = \frac{1}{2}\int_{\Omega_m}(N^{\beta\gamma}\tilde{\gamma}_{\beta\gamma} + M^{\beta\gamma}\rho_{\beta\gamma} + L^{\beta\gamma}\overset{1}{\gamma}_{\beta\gamma})\sqrt{a}\,dx^1dx^2. \tag{2.15}$$

Trong (2.15) $N^{\beta\gamma}$, $M^{\beta\gamma}$, $L^{\beta\gamma}$ là các ứng lực, mômen và « bi-mô-men », chúng được xác định như sau

$$N^{\beta\gamma} = \int_{-h/2}^{h/2}\mu\mu_\alpha^\gamma\sigma^{\alpha\beta}dz = {}_0B^{\gamma\beta\varkappa\varphi}\tilde{\gamma}_{\varphi\varkappa} + {}_1B^{\gamma\beta\varkappa\varphi}\rho_{\varphi\varkappa} + {}_2B^{\gamma\beta\varkappa\varphi}\overset{1}{\gamma}_{\varphi\varkappa};$$

$$M^{\beta\gamma} = \int_{-h/2}^{h/2}\mu\mu_\alpha^\gamma\sigma^{\alpha\beta}zdz = {}_1B^{\gamma\beta\varkappa\varphi}\tilde{\gamma}_{\varphi\varkappa} + {}_2B^{\gamma\beta\varkappa\varphi}\rho_{\varphi\varkappa} + {}_3B^{\gamma\beta\varkappa\varphi}\overset{1}{\gamma}_{\varphi\varkappa};$$

$$L^{\beta\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2}\mu\mu_\alpha^\gamma\sigma^{\alpha\beta}z^2dz = {}_2B^{\gamma\beta\varkappa\varphi}\tilde{\gamma}_{\varphi\varkappa} + {}_3B^{\gamma\beta\varkappa\varphi}\rho_{\varphi\varkappa} + {}_4B^{\gamma\beta\varkappa\varphi}\overset{1}{\gamma}_{\varphi\varkappa}. \tag{2.16}$$

Từ (2.15) (2.16) biểu thức Π_σ có thể viết dưới dạng sau :

$$\prod_\sigma = \frac{1}{2}\int_{\Omega_m}\vec{\gamma}^T B\,\vec{\gamma}\sqrt{a}\,dx^1dx^2. \tag{2.17}$$

Với $\vec{\gamma} = (\tilde{\gamma}_{\varphi\varkappa}, \rho_{\varphi\varkappa}, \overset{1}{\gamma}_{\varphi\varkappa})^T$ và ma trận đối xứng B

$$B = \begin{vmatrix} {}_0B^{\gamma\beta\varkappa\varphi} & {}_1B^{\gamma\beta\varkappa\varphi} & {}_2B^{\gamma\beta\varkappa\varphi} \\ {}_1B^{\gamma\beta\varkappa\varphi} & {}_2B^{\gamma\beta\varkappa\varphi} & {}_3B^{\gamma\beta\varkappa\varphi} \\ {}_2B^{\gamma\beta\varkappa\varphi} & {}_3B^{\gamma\beta\varkappa\varphi} & {}_4B^{\gamma\beta\varkappa\varphi} \end{vmatrix} \tag{2.18}$$

Trong (2.16) và (2.18) ${}_nB^{\gamma\beta\varkappa\varphi}$ có dạng:

$${}_nB^{\gamma\beta\varkappa\varphi} = \int_{-h/2}^{h/2}\mu\mu_\alpha^\gamma\mu_\delta^\varkappa A^{\alpha\beta\delta\varphi}z^n dz. \tag{2.19}$$

Từ (2.19) ta thấy :

$$\begin{gathered} {}_nB^{\gamma\beta\varkappa\varphi} = {}_nB^{\varkappa\varphi\beta\gamma}, \\ {}_nB^{\gamma\beta\varkappa\varphi} \neq {}_nB^{\beta\gamma\varkappa\varphi}. \end{gathered} \tag{2.20}$$

Từ đây

$$N^{\alpha\beta} \neq N^{\beta\alpha},\ M^{\alpha\beta} \neq M^{\beta\alpha},\ L^{\alpha\beta} \neq L^{\beta\alpha}.$$

Từ (2.2), (2.4) ta có:

$$\gamma_{\alpha 3} = \tilde{\gamma}_{\alpha 3} + z\overset{1}{\gamma}_{\alpha 3},$$

$$\tilde{\gamma}_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(\overset{1}{\vartheta}_\alpha + \omega_\alpha + \overset{1}{\vartheta}^\lambda e_{\alpha\lambda}), \tag{2.21}$$

$$\overset{1}{\gamma}_{\alpha 3} = \frac{1}{2}\overset{1}{\vartheta}^\lambda \overset{1}{e}_{\alpha\lambda}. \tag{2.22}$$

Sau một số biến đổi biểu thức của Π_τ có thể viết dưới dạng:

$$\Pi_\tau = \frac{1}{2}\int_{\Omega_m} 2Q^\alpha \tilde{\gamma}_{\alpha 3} \sqrt{a}\, dx^1 dx^2. \tag{2.23}$$

Với $\quad Q^\alpha = {}_oB^{\alpha 3\lambda 3}\tilde{\gamma}_{\lambda 3},$

$${}_oB^{\alpha 3\lambda 3} = 2k^4 \int_{-h/2}^{h/2} C^{\alpha 3\lambda 3} f^2(z)\mu dz$$

Trong (2.24)

$$k^2 = h\int_{-h/2}^{h/2} f^2(z)dz$$

với f(z) là hàm biểu diễn sự phân bố không đều của $\sigma^{\alpha 3}$ theo chiều dày của vỏ.

Biểu thức (2.7), (2.15) và (2.23) là biểu thức chính xác của công biến dạng của vỏ với giả thiết (2.4) và giữ lại các số hạng bé bậc $(z/R)^2$.

Đối với lý thuyết tuyến tính của vỏ từ (2.12) ta có $\overset{1}{\gamma}_{\beta\gamma} = 0$ và từ đấy nhận được kết quả của [1].

§3. CÁC PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA VỎ MỎNG

Để rút ra các phương trình chuyển động của vỏ mỏng ta sử dụng nguyên lý Hamilton trong dạng

$$\delta\int_{t_o}^{t_1}(T - \Pi + w)dt - \int_{t_o}^{t_1}\delta w' = 0 \tag{3.1}$$

Trong đó T, Π tương ứng là động năng và công biến dạng của vỏ, w là công của tải trọng ngoài, w' là công của lực cản trong và ngoài.

Từ (1.9) và (2.4) ta nhận được biểu thức của T

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\rho\int_{\Omega_m}\int_{-h/2}^{h/2}[\dot{\mathcal{U}}^\alpha\dot{\mathcal{U}}_\alpha + (\dot{\mathcal{U}}_3)^2]\mu dz\sqrt{a}\,dx^1dx^2 \\ &= \frac{1}{2}\rho h\int_{\Omega_m}[(\dot{\vartheta}_\alpha\dot{\vartheta}^\alpha + \dot{W}^2)\left(1 + \frac{h^2}{12}K\right) + \frac{h^2}{12}(\overset{1}{\dot{\vartheta}}{}^\alpha\overset{1}{\dot{\vartheta}}_\alpha) - \\ &- \frac{h^2}{6}H(\overset{1}{\dot{\vartheta}}_\alpha\dot{\vartheta}^\alpha + \overset{1}{\dot{\vartheta}}{}^\alpha\dot{\vartheta}_\alpha)]\sqrt{a}\,dx^1dx^2, \end{aligned} \tag{3.2}$$

Công của lực ngoài tác dụng lên vỏ giả thiết có dạng

$$\delta W = \int_{\Omega_m} (p^{\alpha}\mathcal{V}_{\alpha} + qW)\sqrt{a}\,dx^1dx^2 + \int_{C} (\widetilde{N}^{\alpha}\mathcal{V}_{\alpha} + \widetilde{Q}W + \widetilde{M}^{\alpha}\overset{1}{\mathcal{V}}_{\alpha})dc. \qquad (3.3)$$

Trong (3.3) p^{α} và q là các tải trọng tiếp tuyến và pháp tuyến đối với mặt trung bình của vỏ, $\widetilde{N}^{\alpha}$, $\widetilde{Q}$, $\widetilde{M}^{\alpha}$ là các tải trọng biên tác dụng lên biên C của vỏ.

Công khả dĩ của lực cản giả thiết có dạng

$$\delta W' = -\int_{\Omega_m} [R^{\alpha}(\dot{\mathcal{V}}_{\alpha})\delta\mathcal{V}_{\alpha} + R^{w}(\dot{W})\delta W]\sqrt{a}\,dx^1dx^2. \qquad (3.4)$$

Chú ý đến tính đối xứng của ${}_{n}B^{\gamma\beta\varkappa\varphi}$ theo (2.20) và biểu thức:

$${}_{o}B^{\alpha 3\lambda 3} = {}_{o}B^{\lambda 3\alpha 3}, \qquad (3.5)$$

ta nhận được biểu thức biến phân của Π:

$$\delta\Pi = \int_{\Omega_m} (N^{\beta\gamma}\delta\widetilde{\gamma}_{\beta\gamma} + M^{\beta\gamma}\delta\rho_{\beta\gamma} + L^{\beta\gamma}\delta\overset{1}{\gamma}_{\beta\gamma} + 2Q^{\alpha}\delta\widetilde{\gamma}_{\alpha 3})\sqrt{a}\,dx^1dx^2. \qquad (3.6)$$

Sử dụng định lý Green trong dạng

$$\int_{\Omega_m} F(x^{\alpha})\big|_{\beta}\sqrt{a}\,dx^1dx^2 = \int_{C} F(x^{\alpha})n_{\beta}dC$$

($\vec{n} = n_{\alpha}\vec{a}_{\alpha}$ là pháp tuyến của C trong mặt trung bình của vỏ), từ phương trình (3.1) bằng cách tính các biến phân, biến đổi và sắp xếp chúng lại thành các nhóm độc lập ta nhận được các phương trình chuyển động

$$\begin{aligned}
&N^{\alpha\beta}\Big|_{\alpha} + \frac{1}{2}(e^{\beta}_{\alpha}N^{\alpha\gamma})\Big|_{\gamma} + \frac{1}{2}(e^{\beta}_{\gamma}N^{\gamma\beta})\Big|_{\alpha} - \frac{1}{2}b^{\beta}_{\gamma}\omega_{\alpha}N^{\alpha\gamma} - \\
&- \frac{1}{2}b^{\beta}_{\alpha}\omega_{\gamma}N^{\alpha\gamma} + (\overset{1}{e}{}^{\beta}_{\gamma}M^{\alpha\gamma})\Big|_{\alpha} - b^{\beta}_{\alpha}\overset{1}{\omega}_{\gamma}M^{\alpha\gamma} - b^{\beta}_{\alpha}Q^{\alpha} + \\
&+ (\overset{1}{\mathcal{V}}{}^{\beta}Q^{\alpha})\Big|_{\alpha} + \frac{1}{2}[(b^{\rho}_{\gamma}e^{\beta}_{\rho}M^{\alpha\gamma}) + (2b^{\rho}_{\gamma}\overset{1}{e}{}^{\beta}_{\rho} + \\
&(b^2)^{\rho}_{\gamma}e^{\beta}_{\rho})L^{\alpha\gamma}]\Big|_{\alpha} + \frac{1}{2}(b^{\rho}_{\gamma}b^{\beta}_{\alpha}\omega_{\rho} + b^{\rho}_{\gamma}b^{\beta}_{\rho}\omega_{\alpha})M^{\alpha\gamma} + \\
&\frac{1}{2}(2b^{\rho}_{\gamma}b^{\beta}_{\alpha}\overset{1}{\omega}_{\rho} + (b^2)^{\beta}_{\gamma}b^{\beta}_{\alpha}\omega_{\rho} + (b^2)^{\rho}_{\gamma}b^{\beta}_{\rho}\omega_{\alpha})L^{\alpha\gamma} + \\
&\frac{1}{2}(b^{\rho}_{\gamma}e^{\beta}_{\alpha}M^{\alpha\gamma} + (b^2)^{\rho}_{\gamma}e^{\beta}_{\alpha}L^{\alpha\gamma})\Big|_{\rho} + p^{\beta} + R^{\beta}(\dot{\mathcal{V}}^{\alpha}) - \\
&- \rho h[\ddot{\mathcal{V}}^{\beta}\left(1 + \frac{h^2}{12}K\right) - H\frac{h^2}{6}\ddot{\overset{1}{\mathcal{V}}}{}^{\beta}] = 0, \quad (\beta = 1, 2); \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

$$Q^\alpha\Big|_\alpha + \overset{\circ}{b}_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(b^\lambda_\beta\, e_{\alpha\lambda} + b^\nu_\alpha\, e_{\beta\nu})\, N^{\alpha\beta} + (\omega_\beta N^{\alpha\beta})\Big|_\alpha +$$

$$+ b^\nu_\alpha \overset{1}{\vartheta}_\nu Q^\alpha + (\overset{1}{\omega}_\beta M^{\alpha\beta})\Big|_\alpha + b^\nu_\alpha \overset{1}{e}_{\beta\nu} M^{\alpha\beta} + \underline{\frac{1}{2}(b^\rho_\beta\, b^\nu_\alpha\, e_{\rho\nu} +}$$

$$\underline{+ b^\rho_\beta\, b^\nu_\rho\, e_{\alpha\nu}) M^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(2 b^\rho_\beta\, b^\nu_\alpha\, \overset{1}{e}_{\rho\nu} + (b^2)^\rho_\beta\, b^\nu_\alpha\, e_{\rho\nu} + (b^2)^\rho_\beta\, b^\lambda_\rho\, e_{\alpha\lambda}) L^{\alpha\beta}}$$

$$\underline{+ \frac{1}{2}\left[b^\rho_\beta\, \omega_\rho\, M^{\alpha\beta} + (2 b^\rho_\beta\, \omega_\rho + (b^2)^\rho_\beta\, \omega_\rho)\, L^{\alpha\beta}\right]\Big|_\alpha +}$$

$$\underline{+ \frac{1}{2}(b^\rho_\beta\, \omega_\alpha M^{\alpha\beta} + (b^2)^\rho_\beta\, \omega_\alpha L^{\alpha\beta})\Big|_\rho} + q + R^w(\dot{W}) - \rho h\left[1 + \underline{\frac{h^2}{12} K}\right]\ddot{W} = 0; \qquad (3.8)$$

$$M^{\alpha\beta}\big|_\alpha - Q^\beta + (e^\beta_\alpha M^{\alpha\nu})\Big|_\nu - \omega_\alpha b^\beta_\nu M^{\alpha\nu} - Q^\alpha e^\beta_\alpha - \underline{\frac{1}{2}(b^\beta_\gamma \overset{1}{\omega}_\alpha +}$$

$$\underline{b^\beta_\alpha \overset{1}{\omega}_\gamma + 2 b^\rho_\gamma\, b^\beta_\rho\, \omega_\alpha) L^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}(\overset{1}{e}{}^\beta_\alpha L^{\alpha\beta} + \overset{1}{e}{}^\beta_\gamma L^{\rho\gamma} +}$$

$$\underline{+ 2 b^\rho_\gamma\, e^\beta_\alpha\, L^{\alpha\beta})\Big|_\rho} - \frac{\rho h^3}{12}(\ddot{\overset{1}{\vartheta}}{}^\beta - \underline{2H\ddot{\vartheta}{}^\beta}) = 0 \qquad (3.9)$$

và các điều kiện biên trên C

$$N^{\alpha\beta}\left(\delta^\nu_\alpha + \frac{1}{2} e^\nu_\alpha\right) n_\beta + \frac{1}{2} e^\nu_\beta N^{\alpha\beta} n_\alpha + M^{\alpha\beta} \overset{1}{e}{}^\nu_\alpha n_\beta +$$

$$+ Q^\beta \overset{1}{\vartheta}{}^\nu n_\beta + \underline{\frac{1}{2}(b^\rho_\beta\, e^\nu_\rho\, n_\alpha + b^\rho_\beta\, e^\nu_\alpha\, n_\rho) M^{\alpha\beta} +}$$

$$\underline{+ \frac{1}{2}(2 b^\rho_\beta\, \overset{1}{e}{}^\nu_\rho\, n_\alpha + (b^2)^\rho_\beta\, e^\nu_\rho\, n_\alpha + (b^2)^\rho_\beta\, e^\nu_\alpha\, n_\rho) L^{\alpha\beta}} - \tilde{N}^\nu = 0, \ (\nu = 1, 2); \qquad (3.10)$$

$$Q^\alpha n_\alpha + \omega_\beta N^{\alpha\beta} n_\alpha + \overset{1}{\omega}_\beta M^{\alpha\beta} n_\alpha + \underline{\frac{1}{2}(b^\rho_\beta\, \omega_\rho n_\alpha + b^\rho_\beta\, \omega_\alpha n_\rho) M^{\alpha\beta} +}$$

$$\underline{+ \frac{1}{2}(2 b^\rho_\beta\, \omega_\rho n_\alpha + (b^2)^\rho_\beta\, \omega_\rho n_\alpha + (b^2)^\rho_\beta\, \omega_\alpha n_\rho) L^{\alpha\beta}} - \tilde{Q} = 0; \qquad (3.11)$$

$$M^{\alpha\beta}(\delta^\nu_\alpha + e^\nu_\alpha) n_\beta + \underline{\frac{1}{2}(\overset{1}{e}{}^\nu_\alpha n_\beta + \overset{1}{e}{}^\nu_\beta n_\alpha +}$$

$$\underline{+ 2 b^\rho_\beta\, e^\nu_\alpha\, n_\rho) L^{\alpha\beta}} - \tilde{M}^\nu = 0. \qquad (3.12)$$

Năm phương trình (3.7), (3.8), (3.9) và các điều kiện biên (3.10), (3.11), (3.12) đủ để xác định 5 ẩn $\vartheta_\alpha(x^\alpha, t)$, $W(x^\alpha, t)$, $\overset{1}{\vartheta}_\alpha(x^\alpha, t)$, $(\alpha = 1, 2)$.

Đấy là các phương trình chính xác hơn của lý thuyết vỏ mỏng so với [5], [6]; [3].

Các số hạng gạch dít trong các phương trình này xuất hiện do tính đến sự biến đổi của tenxơ metrik theo phương pháp tuyến với mặt trung bình của vỏ. Bỏ qua các số hạng này ta nhận được các phương trình chuyển động và các điều kiện biên tương ứng của A. C. Volmir [5], [6].

Bỏ qua biến dạng trượt ta nhận được các phương trình lý thuyết vỏ của Koiter [3].

Địa chỉ

Trường Đại học Bách khoa

Hà Nội

Nhận ngày 20/1/11982

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. NAGHDI P.M. Foundation of elastic shell theory. Progress in Solid Mechanics. Volum 4, North Holland publishing company, 1963.
2. GRREN A.E. and ZERNA W. Theoretical Elasticity
3. KOITER W.T. On the nonlinear theory of thin elastic shells 1, 2, 3 Konicki Nederi. Akad. von Wetenschappen Amsterdam Proc Ser. 1, S1-54 B(1966)
4. KOITER W.T. Proc. IUTAM Symposium on the theory of thin elastic shells (North. Horlland Publ. Co.) 12, 1960.
5. ВОЛЬМИР А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., 1972.
6. ВОЛЬМИР А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Москва, 1976.

ZUSAMENFASSUNG

VON DEN SCHWINGUNGSGLEICHUNGEN DER DUENNEN SCHALEN

Auf der Grundlage des Tensorkalkuels und der Anwendung des Hamiltonschen Prinzips werden die allgemeinen Schalenbewegungsgleichung hergeleitet. Dabei werden die Metrikveraenderung laengs der Schalendicke und die Schubdeformation beruechsichtigt.

HỘI NGHỊ QUỐC TẾ VỀ DAO ĐỘNG PHI TUYẾN LẦN THỨ 10 TẠI BUNGARI

Từ 16 – 23 tháng 9 năm 1984, tại thành phố Varna Bungari sẽ tổ chức hội nghị quốc tế về dao động phi tuyến lần thứ 10. Hội nghị này được tổ chức 3 năm một lần ở các nước khác nhau. Hội nghị lần thứ 9 đã được tổ chức vào năm 1981 tại Kiep (Liên Xô). Ban tổ chức hội nghị đã gửi đến các nước thông báo thứ nhất và yêu cầu đăng ký báo cáo theo địa chỉ : Institute of Mechanics and Biomechanics « Acad. G. Bonchev » Str. Bl.8, 1113 Sofia, Bulgaria.