Tạp chí Cơ Học T. V, 1983, Số 4 (trang 7—13)

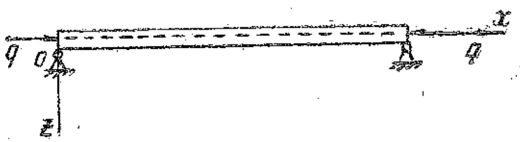
DAO ĐỘNG THÔNG SỐ CỦA DẦM CÓ KỂ ĐẾN TÍNH DI TRUYỀN CỦA VẬT LIỆU

HOÀNG VĂN ĐA

Trong [2] đã xét dao động tự do của dầm có kể đến tính di truyền của vật liệu. Bằng phương pháp tiệm cận đối với hệ phương trình vi phân cấp cao, dưới đây sẽ nghiên cứu dao động thông số của dầm có kể đến tính di truyền phi tuyến của vật liệu.

§ 1. BÀI TOÁN VÀ PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG

Xét dao động của dầm lăng trụ có độ dài l, tiết diện F, chịu tác dụng lực điều hòa q(t). Giả sử rằng trục của dầm khi không biến dạng trùng với trục Ox, còn các trục Oy, Oz trùng với trục đối xứng của tiết diện ngang, hai đầu mút của dầm chịu liên kết tựa bản lề (hình 1).



Hình 1

Ký hiệu W(x, t), M(x, t) tương ứng là dịch chuyển của các điểm của trục đối xứng của dầm theo phương Oz và mômen uốn của dầm, ρ là mật độ khối lượng. Bỏ qua chuyển động quay, chuyển động trượt, lực quán tính dọc và ảnh hưởng của lực cắt, phương trình chuyển động của dầm có dạng

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \rho F \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + q \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} . \tag{1.1}$$

Chúng ta lấy phương trình trạng thái dưới dạng [2]

$$\sigma = a_1 \varepsilon_x + a_2 \varepsilon_x^3 + \int_0^t K(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \tau} d\tau, \tag{1.2}$$

ở đây a_1, a_2 là các hằng số đặc trưng cho tính chất vật lý của vật liệu, $K(t-\tau)$ là nhân di truyền phản ánh quá trình ảnh hưởng của trạng thái ứng suất đến thời điểm t đang xét.

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \tag{1.3}$$

Biểu thức của mômen M được xác định như sau

$$M = \iint_F \sigma z dF \tag{1.4}$$

thay các biểu thức (1.2), (1.3) vào (1.4), ta nhận được

$$M = -a_1 I_o \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - a_2 I_2 \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^3 - I_o \int_0^t K(t-\tau) \frac{\partial^3 W}{\partial \tau \partial x^2} d\tau \qquad (1.5)$$

trong đó I_o, I_2 là mômen quán tính của tiết diện ngang

$$I_o = \iint_F z^2 dF, \quad I_2 = \iint_F z^4 dF$$

Sau khi thế biểu thức (1.5) vào (1.1) và thực hiện các phép tính đơn giản ta nhận được phương trình chuyển động của dầm và các điều kiện biên sau đây

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{a_1 I_o}{\rho F} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = -\frac{3a_2 I_2}{\rho F}\left[\frac{\partial^4 W}{\partial x^4}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}\right)^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right] - \frac{I_o}{\rho F} \int_0^t K(t-\tau) \frac{\partial^5 W}{\partial \tau \partial x^4} d\tau - \frac{q}{\rho F} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \qquad (1.6)$$

$$W\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = 0, \quad W\Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\Big|_{x=l} = 0 \qquad (1.7)$$

§ 2. XÂY DỰNG NGHIỆM

Ta tìm nghiệm xấp xỉ thứ nhất của bài toán biên (1.6), (1.7) dưới dạng

$$W(x,t) = y(t) \sin \frac{\pi x}{l} \qquad (2.1)$$

trong đó $y(t)$ là hàm phải tìm, $\sin(\pi x/l)$ là dạng hàm riêng thứ nhất. Thế (2.1) vào phương trình (1.6) và dùng phương pháp Galerkin — Bupnov chúng ta nhận được phương trình vi tích phân phi tuyến

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = \beta_1 y^3 + \beta_2 \int_0^t K(t-\tau) \frac{dy}{d\tau} d\tau + \beta_3 q y, \qquad (2.2)$$

trong đó

$$\omega^2 = \frac{a_1 I_o \pi^4}{\rho F l^4}, \quad \beta_1 = -\frac{3a_2 I_2 \pi^8}{4\rho F l^8}, \quad \beta_2 = -\frac{I_o \pi^4}{\rho F l^4}, \quad \beta_3 = \frac{\pi^2}{\rho F l^2}$$

Giả sử rằng y đủ nhỏ, đặc trưng di truyền yếu và có dạng hàm mũ, lực kích động nhỏ. Ta đưa vào phương trình (2.2) tham số bé $0 < \varepsilon \ll 1$, và các thông số mới $f(t)$, P_o, q_o,

$$y = \varepsilon^{1/2} f(t), \quad K(t-\tau) = \varepsilon P_o e^{-\alpha(t-\tau)}, \quad q = \varepsilon q_o \sin\gamma t \qquad (2.3)$$

(Xét trường hợp α^2 không quá nhỏ).

Thay các biểu thức (2.3) vào phương trình (2.2) chúng ta có

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \omega^2 f = \varepsilon\left[\beta_1 f^3 + \beta_2 P_o \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \frac{df}{d\tau} d\tau + \beta_3 q_o \sin\gamma t f\right] \qquad (2.4)$$

Đạo hàm phương trình (2.4) theo thời gian t rồi khử tích phân, ta nhận được phương trình vi phân cấp ba đối với f(t):

$$\frac{d^3f}{dt^3} + \alpha \frac{d^2f}{dt^2} + \omega^2 \frac{df}{dt} + \alpha\omega^2 f = \varepsilon \left[\alpha\beta_1 f^3 + 3\beta_1 f^2 \frac{df}{dt} + \right.$$

$$\left. + \beta_2 P_o \frac{df}{dt} + \beta_3 q_o \sin\gamma t \frac{df}{dt} + \beta_3 q_o \gamma \cos\gamma t f + \alpha\beta_3 q_o \sin\gamma t f\right] \qquad (2.5)$$

Khi $\varepsilon = 0$, phương trình đặc trưng của phương trình suy biến tương ứng với (2.5) có cặp nghiệm ảo thuần túy $\lambda = \pm i\omega$ và $\lambda = -\alpha < 0$.

Xét trường hợp cộng hưởng sau:

$$\omega^2 = \left(\frac{p}{q}\gamma\right)^2 + \varepsilon\delta. \qquad (2.6)$$

Ứng dụng phương pháp tiệm cận đối với phương trình vi phân cấp cao ta tìm nghiệm riêng của phương trình (2.5) dưới dạng chuỗi

$$f = a\cos\varphi + \varepsilon U_1(a, \varphi, \theta) + \varepsilon^2 U_2(a, \varphi, \theta) + \varepsilon^3 \ldots \qquad (2.7)$$

ở đây $\varphi = \frac{p}{q}\gamma t + \psi$, $\theta = \gamma t$ còn a, ψ được xác định từ hệ phương trình vi phân

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a, \psi) + \varepsilon^2 A_2(a, \psi) + \varepsilon^3 \ldots$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \left(\omega - \frac{p}{q}\gamma\right) + \varepsilon B_1(a, \psi) + \varepsilon^2 B_2(a, \psi) + \varepsilon^3 \ldots \qquad (2.8)$$

Dễ dàng thấy rằng, trong trường hợp xét ở đây, hiện tượng cộng hưởng chỉ xảy ra khi

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{2} \qquad (2.9)$$

Trong xấp xỉ thứ nhất nghiệm (2.7) có dạng

$$f = a\cos\varphi = a\cos\left(\frac{\gamma}{2}t + \psi\right) \qquad (2.10)$$

với a, ψ thỏa mãn hệ phương trình sau

$$\gamma \frac{da}{dt} = a[h_1\alpha\gamma - Q_1\cos 2\psi],$$

$$a\gamma \frac{d\psi}{dt} = a\left[\left(\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right) - P_1 a^2 - 2h_1\omega^2 + Q_1\sin 2\psi\right], \qquad (2.11)$$

trong đó

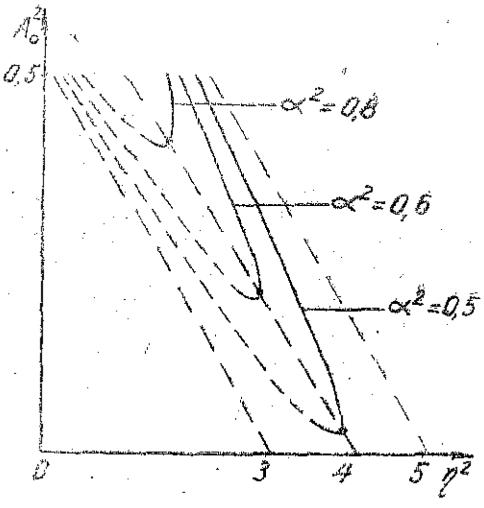
$$h_1 = \varepsilon \frac{\beta_2 P_o}{2(\omega^2 + \alpha^2)}, \qquad Q_1 = \varepsilon \frac{\beta_3 q_o}{2}, \qquad P_1 = \frac{3}{4}\varepsilon\beta_1 \qquad (2.12)$$

Hệ (2.11) trùng với kết quả thu được, khi áp dụng trực tiếp phương pháp trung bình hay phương pháp tiệm cận đối với phương trình vi tích phân (2.4).

Từ (2.11) suy ra phương trình đường cong biên độ dao động dừng như sau

$$A_o^2 = (1 - 2h_1) - \frac{\eta^2}{4} \pm \sqrt{C^2 - B^2\alpha^2\eta^2}. \qquad (2.13)$$

Ở đây $A_o^2 = P_1 a_o^2/\omega^2$, $C^2 = Q_1^2/\omega^4$, $B^2 = h_1^2/\omega^2$, $\eta^2 = \gamma^2/\omega^2$.



Hình 2

Trên hình 2, những đường cong cộng hưởng ứng với các giá trị

$C^2 = 0,1$; $B^2 = 0,05$; $h_1 = -0,1$; $\alpha^2 = 0,5$; $0,6$; $0,8$.

Qua hình 2, ta thấy rằng, khi đại lượng α^2 tăng, đường cong cộng hưởng được nâng lên, nhưng ứng với một giá trị xác định của tần số η^2, nếu α^2 lớn thì biên độ dao động nhỏ và ngược lại. Khi α^2 đạt tới giá trị α_o^2 nào đó, mà đủ lớn, thì dao động bị dập tắt hoàn toàn. Do đó đại lượng α^2 mà biến thiên trong khoảng $(0, \alpha_o)$, làm giảm biên độ dao động tương tự như ma sát nhớt đối với hệ có đặc trưng mềm [3].

Chú ý rằng khi α^2 thay đổi, theo biểu thức (2.12) đại lượng h_1 cũng biến đổi, trong vùng α^2 đang xét thì sự biến đổi của h_1 là rất nhỏ cỡ vài phần nghìn, cho nên ta vẫn coi h_1 có giá trị xác định

§ 3. SỰ ỔN ĐỊNH CỦA NGHIỆM DỪNG

Để xét ổn định của nghiệm dừng a_o, ψ_o ta đặt $a = a_o + \delta a$, $\psi = \psi_o + \delta\psi$. Thay các giá trị này vào hệ phương trình (2.11) ta có các phương trình biến phân sau đây

Với $a \neq 0$

$$\gamma \frac{d}{dt}(\delta a) = 2a_o Q_1 \cos 2\psi_o \delta\psi,$$

$$a_o\gamma \frac{d}{dt}(\delta\psi) = -2P_1 a_o^2 \delta a + 2a_o Q_1 \cos 2\psi_o \delta\psi \tag{3.1}$$

Với $a_o = 0$

$$\gamma \frac{d}{dt}(\delta a) = (h_1\alpha\gamma - Q_1\cos 2\psi_o)\delta a,$$

$$0 = \left(\omega^2 - \frac{\gamma^2}{4} - 2h_1\omega^2 + Q_1\sin 2\psi_o\right)\delta a. \tag{3.2}$$

Đặt $\delta a = C_1 e^{\lambda t}$, $C_2 e^{\lambda t} = \delta\psi$, ($C_1$, C_2 là các hằng số) vào trong (3.1). Sau khi tính toán ta thấy rằng điều kiện để cho có phần thực âm là

$$-2\alpha h_1 \gamma^2 > 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{2P_1 a_o^2}{\omega^2}\left[A_o^2 + \frac{\eta^2}{4} + (2h_1 - 1)\right] > 0. \tag{3.4}$$

Điều kiện (3.3) luôn luôn thỏa mãn vì $\alpha > 0$, $h_1 < 0$. Từ (2.13) ta thấy rằng, đường cong biên độ gồm hai nhánh được phân tách bởi đường

$$A^2 = (1 - 2h_1) - \eta^2/4, \tag{3.5}$$

điều kiện (3.4) chứng tỏ nhánh trên của đường cong cộng hưởng ứng với biên độ $A_o^2 > A^2$ là ổn định.

Từ hệ phương trình (3.2) ta suy ra

$$Q_1 \sin 2\psi_o = (2h_1 - 1)\omega^2 + \gamma^2/4. \tag{3.6}$$

Thay (3.6) vào phương trình thứ nhất của (3.2) ta có

$$\gamma \frac{d}{da} \delta a = \lambda dt \tag{3.7}$$

Ở đây

$$\lambda = b_1 \alpha \gamma \pm \sqrt{Q_1^2 - [(2h_1 - 1)\omega^2 + \gamma^2/4]^2} \tag{3.8}$$

Điều kiện để cho nghiệm dừng có biên độ $a_o = 0$ ổn định là

$$\lambda < 0 \tag{3.9}$$

Ứng với dấu trừ trong biểu thức (3.8) thì bất đẳng thức (3.9) luôn luôn thỏa mãn vì $\alpha > 0$, $h_1 < 0$. Ứng với dấu cộng điều kiện (3.9) đòi hỏi

$$[(2h_1 - 1) + \eta^2/4]^2 + B^2\alpha^2\eta^2 - C^2 > 0 \tag{3.10}$$

Phương trình đường cong biên độ (2.13) khi $a_o = 0$ có dạng

$$[(2h_1 - 1) + \eta^2/4]^2 + B^2\alpha^2\eta^2 - C^2 = 0 \tag{3.11}$$

Sau khi tính toán đơn giản ta thấy có hai trường hợp cần nghiên cứu

1. TRƯỜNG HỢP THỨ NHẤT

Nếu biên độ của lực kích động q_o và hệ số nhân di truyền P_o thỏa mãn bất đẳng thức sau đây

$$\frac{l_4}{I_o^2\pi^4} \frac{q_o^2}{P_o^2} < 1, \tag{3.12}$$

thì phương trình (3.11) có hai nghiệm riêng biệt η_1^2, η_2^2, khi đại lượng α^2 biến thiên trong khoảng

$$\alpha^2 < \frac{\omega^2(1 - \sqrt{1 - Q_1^2/G^2})^2}{Q_1^2/G^2} = \alpha_1^2 \tag{3.13}$$

hoặc

$$\alpha^2 > \frac{\omega^2(1 + \sqrt{1 - Q_1^2/G^2})^2}{Q_1^2/G^2} = \alpha_2^2 \tag{3.14}$$

trong đó

$$G^2 = \varepsilon^2\beta_2^2P_o^2/4.$$

Để cho (3.10) thỏa mãn thì η^2 phải nằm ngoài khoảng (η_1^2, η_2^2). Hình 3, đồ thị vẽ ứng với các giá trị

$$C^2 = 0{,}1; \quad B^2 = 0{,}05; \quad h_1 = -0{,}1; \quad \alpha^2 = 0{,}3$$

Nếu đại lượng α^2 biến thiên trong khoảng

$$\alpha_1^2 < \alpha^2 < \alpha_2^2 \tag{3.15}$$

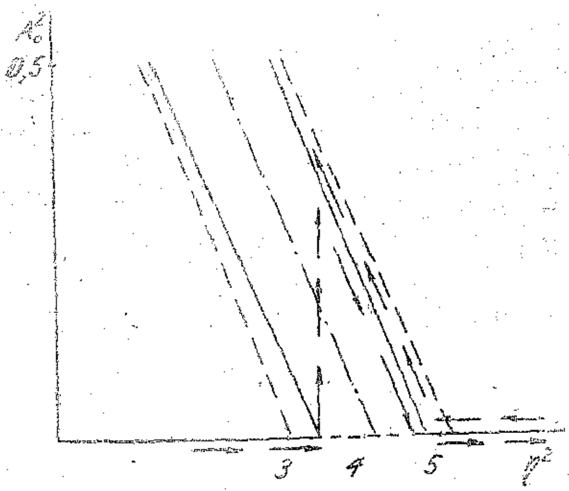
thì phương trình (3.11) vô nghiệm, đường cong cộng hưởng ở phía trên trục η^2, bất đẳng thức (3.10) luôn luôn thỏa mãn, do đó nghiệm dừng $A_o^2 = 0$ ổn định. Hình 4 biểu diễn sự biến thiên của biên độ khi tần số thay đổi rất chậm ở lân cận $\eta^2 = 4$.

2. TRƯỜNG HỢP THỨ HAI

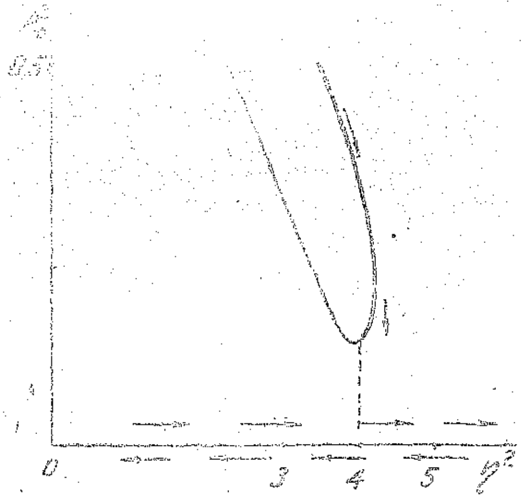
Khi biên độ của lực kích động q_o và hệ số nhân di truyền P_o thỏa mãn bất đẳng thức sau đây

$$\frac{l^4}{I_o^2\pi^4} \frac{q_o^2}{P_o^2} > 1, \tag{3.16}$$

thì phương trình (3.13) luôn luôn có hai nghiệm [illegible] của α^2, đường cong [illegible] luôn cắt trục η^2 tại hai [illegible], trong trường hợp [illegible] di truyền có ảnh hưởng [illegible] dập tắt dao động.



Hình 3



Hình 4

§ 4. KẾT LUẬN

1. Bài toán dao động thông số của dầm đã được nghiên cứu trong trường hợp khi tính di truyền của vật liệu có ảnh hưởng đáng kể đến dao động (nghĩa là với những giá trị của α^2 không quá nhỏ và cũng không quá lớn.

2. Đã thiết lập được phương trình dao động của dầm khi kể đến tính di truyền của vật liệu. Lớp phương trình vi tích phân thu được có thể đưa về phương trình vi phân thường cấp cao để giải bằng phương pháp đã biết [1];

3. Trong xấp xỉ thứ nhất, nghiệm của phương trình dao động đã được xây dựng bằng phương pháp Galerkin – Bupnov và phương pháp tiệm cận đối với hệ cấp cao [1]. Sự ổn định của nghiệm dừng đã được nghiên cứu.

4. Khi bất đẳng thức (3.12) thỏa mãn, tức là lực kích động nhỏ, đại lượng α^2 biến thiên trong khoảng $(0, \alpha_0^2)$ với $\alpha_1^2 < \alpha_0^2 < \alpha_2^2$, có ảnh hưởng đến dao động tương tự như ma sát nhớt đối với hệ có đặc trưng mềm, tức là khi α^2 đủ lớn thì dao động bị dập tắt hoàn toàn. Nếu $\alpha^2 > \alpha_0^2$ thì nó có ảnh hưởng rất ít đến dao động và khi α^2 đủ lớn, có thể coi hệ không còn tính di truyền của vật liệu nữa.

Nếu bất đẳng thức (3.16) thỏa mãn, tức là lực kích động lớn thì đại lượng α^2 không có khả năng dập tắt dao động. Như vậy [illegible] lực kích động q_0, hệ số của nhân di truyền [illegible] và đại lượng α^2 có quan hệ với nhau trong việc ảnh hưởng đến dao động thông số của dầm.

Nhân dịp này tác giả xin chân thành cảm ơn Giáo sư Tiến sỹ Nguyễn Văn Đạo, phó Giáo sư Tiến sỹ Nguyễn xuân Hùng đã tận tình giúp đỡ chúng tôi hoàn thành công việc này.

Địa chỉ:
Đại học mỏ địa chất

Nhận ngày 22/2/1983

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. NGUYỄN VĂN ĐẠO. Non-linear oscillations of high order systems. National center for scientific research of Viet nam, Hà nội, 1975.
2. БЕРЕЗОВСКИЙ А. А., КУРБАНОВ И. Поперечные колебания стержней с учётом нелинейной упругой наследственности. Аналитические методы исследования решений нелинейных дифференциальных уравнений. Изд. института математики, АН УССР, Киев, 1975.
3. КАУДЕРЕР Г. Нелинейная механика. Москва, 1969.
4. РЖАНИЦЫН А. Р. Теория ползучести. Москва, 1968.

SUMMARY

PARAMETRIC OSCILLATION OF THE PRISMATIC BEAM WITH HEREDITY OF MATERIAL

In this work, the author set up the equation of motion of the prismatic beam under parametric excitation with regard to the heredity of material. The solution of this problem were constructed by means of average and asymptotic method. It is shown that heredity of material exerts its influence on the amplitude of the oscillation as does viscous friction for a system with soft characteristics.

HỘI NGHỊ KHOA HỌC VỀ «ĐỘNG LỰC HỌC MÁY» TẠI TIỆP KHẮC

Từ 12 – 16 tháng 9 năm 1983 tại Liblice (ngoại ô Praha) đã tiến hành hội nghị khoa học về Động lực học máy lần thứ 14. Tham dự hội nghị có gần 100 nhà khoa học của các nước Tiệp, Ba lan, Cộng hòa dân chủ Đức, Liên Xô, Việt Nam, Bungari, Thụy điển, Pháp, Cộng hòa Liên bang Đức. Hội nghị đã nghe nhiều báo cáo về các kết quả nghiên cứu mới nhất trong lĩnh vực động lực học máy. Các phương pháp nghiên cứu bằng thực nghiệm đã được đặc biệt chú ý. Tại hội nghị đại biểu Việt Nam (Nguyễn văn Đạo, Nguyễn văn Đình) đã trình bày bản báo cáo về «Bộ tắt chấn động lực cho hệ tự dao động».