Tạp chí Cơ Học T. V, 1983, Số 4 (trang 1 — 6)

CẤU TRÚC TOÁN HỌC CỦA CÁC VẬT THỂ ĐÀN HỒI
I — TRẠNG THÁI ĐÀN HỒI RIÊNG

RYCHLEWSKI J.

Trong cơ học môi trường liên tục khó có thể tìm một tương quan đơn giản, quen thuộc và được sử dụng nhiều trong hoạt động kỹ thuật hơn định luật Hook. Tuy nhiên ý nghĩa của định luật vẫn chưa được thấu hiểu hoàn toàn. Trong bài báo này tôi sẽ chỉ ra rằng ở đây cũng có thể nảy sinh những ý tưởng hay hấp dẫn bởi sự trong sáng và mang lại nhiều kết quả có ích. Chúng ta sẽ viết các công thức ở dạng ngôn ngữ Tenxơ không chỉ số; vì qua mạng lưới chỉ số khó thấy được sự đơn giản của tư tưởng đã nêu ra.

Tất cả các tenxơ trong bài báo này đều là tenxơ Euclide. Chúng là phần tử của các bậc tenxơ bội p: $T_p = \ni \otimes \ni \otimes \ldots \otimes \ni$ của không gian véc tơ « vật lý » Euclide ba chiều ban đầu $\ni$. Đó là các số a,..., ε, k,... khi $p = 0$, các véc tơ $\underline{m}$, $\underline{n}$,... khi $p = 1$, các tenxơ hạng hai $\underline{\omega}$, $\underline{\tau}$... khi $p = 2$, các tenxơ hạng bốn $\underline{C}$, $\underline{S}$,... khi $p = 4$.

Các tenxơ hạng hai $\underline{\omega}$... được lấy từ không gian ten xơ con đối xứng:

$$\mathcal{S} \equiv \mathrm{sym} \ni \otimes \ni \subset T_2$$

tức là, $\underline{\omega}^T = \underline{\omega}$.

Các tenxơ hạng bốn sẽ chỉ là các tenxơ lấy từ không gian tenxơ con

$$J \equiv \mathcal{S} \otimes \mathcal{S} \subset T_4$$

Các tenxơ trực giao hạng hai sẽ ký hiệu qua $\underline{Q}$,... Bảng đối chiếu dưới đây cho phép ta lập tức chuyển từ một công thức bất kỳ trong bài báo này sang công thức viết ở dạng chỉ số Descartes:

$$
\begin{array}{lcl}
\underline{n}, \underline{\omega}, \underline{C} & \leftrightarrow & n_i, \omega_{ij}, C_{ijkm} \\
\underline{\delta} & \leftrightarrow & \delta_{ij} \\
\underline{n} \otimes \underline{m}, \underline{n} \otimes \underline{\omega} & \leftrightarrow & n_i m_j, n_i \omega_{jk} \\
\underline{\omega} \otimes \underline{\tau} & \leftrightarrow & \omega_{ij} \tau_{km} \\
\underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3 & \leftrightarrow & \omega_{ij}\omega_{jk}, \omega_{ij}\omega_{jk}\omega_{km} \\
\underline{\omega}\,\underline{n}, \underline{n}\,\underline{\omega}\,\underline{m} & \leftrightarrow & \omega_{ij} n_j, n_i \omega_{ij} m_j \\
\underline{\alpha}\,\underline{\beta} & \leftrightarrow & \alpha_{ij} \beta_{jk} \\
\underline{\alpha} \cdot \underline{\beta} & \leftrightarrow & \alpha_{ij} \beta_{ij} \\
\underline{C} \cdot \underline{\omega} & \leftrightarrow & C_{ijkm} \omega_{km} \\
\underline{\alpha} \cdot \underline{C} \cdot \underline{\beta} & \leftrightarrow & C_{ijkm} \alpha_{ij} \beta_{km} \\
\underline{C} \circ \underline{S} & \leftrightarrow & C_{ijkm} S_{kmpq} \\
\underline{Q} * \underline{\omega} & \leftrightarrow & Q_{ij} Q_{km} \omega_{jm} \\
\underline{Q} * \underline{C} & \leftrightarrow & Q_{ij} Q_{km} Q_{pq} Q_{st} C_{jmqt} \\
\underline{A} \cdot \underline{B} & \leftrightarrow & A_{ijkm} B_{ijkm} \\
|\underline{\omega}| & \leftrightarrow & (\omega_{ij}\omega_{ij})^{1/2} \\
\|\underline{C}\| & \leftrightarrow & (C_{ijkm} C_{ijkm})^{1/2}
\end{array}
$$

Tenxơ hạng bốn thông dụng $\underline{E} \in \mathcal{J}$ được xác định bằng điều kiện đơn trị :

$\underline{E} \cdot \underline{\omega} = \underline{\omega}$ với mọi $\underline{\omega} \in \mathcal{S}$ có vai trò to lớn trong các suy luận của chúng ta. Ta sẽ gọi $\underline{E}$ là đơn vị. Từ định nghĩa suy ra

$$E_{ijkm} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{kj})$$

Ta nhận thấy rằng $\underline{Q} * \underline{E} = \underline{E}$ với mọi $\underline{Q} \in \theta$, trong đó θ ký hiệu nhóm các phép biến đổi trực giao của không gian $\ni$.

Đối tượng nghiên cứu của bài báo này chính là định luật Hook thông thường. Chúng ta có thể cho rằng ứng suất là hàm tuyến tính của biến dạng, biến dạng là nhỏ, trạng thái tự nhiên không ứng suất là mốc biến dạng, tenxơ ứng suất là đối xứng, ảnh hưởng của nhiệt độ và của các trường khác là không đáng kể.

Nhờ vậy, định luật Hook có dạng

$$\underline{\sigma} = \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon};\ \sigma_{ij} = C_{ijkm}\,\varepsilon_{km} \tag{1.1}$$

Tenxơ $\underline{C}$ được gọi là tenxơ độ cứng. Nói chung, định luật Hook cho nghịch đảo :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{S} \cdot \underline{\sigma};\quad \varepsilon_{ij} = S_{ijkm}\,\sigma_{km} \tag{1.2}$$

Tenxơ $\underline{S}$ được gọi là tenxơ độ mềm. Các tenxơ $\underline{C}$, $\underline{S}$ nghịch đảo lẫn nhau theo nghĩa

$$\underline{C} \circ \underline{S} = \underline{S} \circ \underline{C} = \underline{E}$$

Theo truyền thống đã được xác lập, chúng ta sẽ mô tả các tính chất đàn hồi bằng tenxơ độ cứng $\underline{C}$.

Lấy một vật thể đàn hồi C tùy ý. Nói chung, các tenxơ ứng suất σ và biến dạng ε liên hệ với nhau bằng định luật Hook (1.1), (1.2), không những không tỷ lệ với nhau, tức là $\sigma \neq \lambda\,\varepsilon$ với λ bất kỳ, mà thậm chí còn không đồng trục. Vật thể đẳng hướng cũng không phải là ngoại lệ. Tuy nhiên, có thể xảy ra trường hợp là đối với vật thể đàn hồi $\underline{C}$ cho trước, các biến dạng $\underline{\varepsilon}$ và ứng suất $\underline{\sigma}$ được chọn lựa sao cho $\underline{\varepsilon}$ và $\underline{\sigma}$ tỷ lệ hoàn toàn, tức là

$$\underline{\sigma} = \lambda\,\underline{\varepsilon};\ \sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{ij}$$

với một hằng số λ nào đó.

Tất nhiên là điều đó xảy ra đối với $\underline{\varepsilon} = \underline{\omega}$, trong đó $\lambda, \underline{\omega}$ được xác định bằng điều kiện :

$$\underline{C} \cdot \underline{\omega} = \lambda\,\underline{\omega} \tag{1.3}$$

Định nghĩa : *Thông số λ được gọi là môđun độ cứng của vật thể đàn hồi $\underline{C}$ nếu như tồn tại một tenxơ đối xứng hạng hai $\underline{\omega} \neq 0$ thỏa mãn điều kiện (1.3). Chính tenxơ $\underline{\omega}$ được gọi là trạng thái đàn hồi riêng tương ứng với môđun độ cứng của vật thể $\underline{C}$.*

Định lý 1. *Nếu tenxơ $\underline{\omega} \in \mathcal{S}$ là trạng thái đàn hồi riêng tương ứng với môđun độ cứng λ của vật thể $\underline{C}$ thì với một phép quay bất kỳ $\underline{Q} \in \theta$, tenxơ $\underline{Q} * \underline{\omega}$ cũng là trạng thái đàn hồi riêng tương ứng với chính môđun độ cứng λ của vật thể $\underline{Q} * \underline{C}$*

Chứng minh : Nếu $\underline{C} \cdot \underline{\omega} = \lambda\,\underline{\omega}$

thì

$$(\underline{Q} * \underline{C}) \cdot (\underline{Q} * \underline{C}) = \underline{Q} * (\underline{C} \cdot \underline{\omega}) = \lambda \underline{Q} * \underline{\omega}$$

Chúng ta chỉ xét các vật thể đàn hồi có thế

$$2\,\Phi(\underline{\varepsilon}) = \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon} \cdot \underline{C} \cdot \underline{\varepsilon} \tag{1.4}$$

$$\underline{\sigma} = \partial_{\underline{\varepsilon}}\Phi$$

Toàn bộ công trình dựa trên *cơ sở thừa nhận rằng* dạng song tuyến tính

$$\underline{\alpha} \cdot \underline{\beta} = \underline{\alpha} \cdot \underline{E} \cdot \underline{\beta} = \mathrm{tr}\, \underline{\alpha}\, \underline{\beta}$$

là tích vô hướng xác định *đúng đắn* trong $\mathcal{S}$.

Các tenxơ $\underline{C} \in J$ được coi như là các toán tử tuyến tính $l : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ biến đổi $\mathcal{S}$ về chính nó

$$l\,(\underline{\omega}) = \underline{C} \cdot \underline{\omega}$$

với mọi $\underline{\omega}$.

Sự tồn tại thế đàn hồi (1.4) tương đương với điều kiện sau:

$$\underline{\alpha} \cdot \underline{C} \cdot \underline{\beta} = \underline{\beta} \cdot \underline{C} \cdot \underline{\alpha} \text{ với mọi } \underline{\alpha}, \underline{\beta} \in \mathcal{S}$$

tức là

$$\underline{\alpha} \cdot l\,(\underline{\beta}) = \underline{\beta}\, l(\underline{\alpha})$$

Các phép biến đổi tuyến tính như vậy của không gian Euclide được gọi là các *phép biến đổi đối xứng.*

Bất kỳ một toán tử tuyến tính nào tác động trong không gian hữu hạn chiều đều được xác định một cách duy nhất khi cho biết giá trị của nó tại các phần tử của một hệ cơ sở cố định tùy ý. Để tiện lợi ta lấy hệ cơ sở trực chuẩn trong $\mathcal{S}$:

$$\underline{\omega}_{\mathrm{I}}, \ldots, \underline{\omega}_{\mathrm{VI}} ;\; \underline{\omega}_{\mathrm{K}} \cdot \underline{\omega}_{\mathrm{L}} = \delta_{\mathrm{KL}} = \begin{cases} 0, & \mathrm{K} \neq \mathrm{L} \\ 1, & \mathrm{K} = \mathrm{L} \end{cases} \tag{1.5}$$

trong đó K, L = I,..., VI.

(ở đây và sau này chúng ta đánh dấu các cơ sở trong $\mathcal{S}$ bằng các chữ cái *la tinh* in; *không lấy tổng theo các chỉ số lặp*). Khi viết một tenxơ $\underline{\alpha} \in \mathcal{S}$ bất kỳ trong hệ cơ sở này ta có:

$$\underline{\alpha} = \alpha_{\mathrm{I}}\, \underline{\omega}_{\mathrm{I}} + \ldots + \alpha_{\mathrm{VI}}\, \underline{\omega}_{\mathrm{VI}},\; \alpha_{\mathrm{K}} = \underline{\alpha} \cdot \underline{\omega}_{\mathrm{K}}.$$

Bây giờ ta có:

$$\begin{aligned} \underline{C} \cdot \underline{\alpha} &= \alpha_{\mathrm{I}} \cdot \underline{C} \cdot \underline{\omega}_{\mathrm{I}} + \ldots + \alpha_{\mathrm{VI}} \cdot \underline{C} \cdot \underline{\omega}_{\mathrm{VI}} = \\ &= [(\underline{C} \cdot \underline{\omega}_{\mathrm{I}}) \otimes \underline{\omega}_{\mathrm{I}} + \ldots + (\underline{C} \cdot \underline{\omega}_{\mathrm{VI}}) \otimes \underline{\omega}_{\mathrm{VI}}] \cdot \underline{\alpha} \end{aligned}$$

với mọi $\underline{\alpha} \in \mathcal{S}$. Từ đó suy ra *đồng nhất thức cơ bản*:

$$\underline{C} = (\underline{C} \cdot \underline{\omega}_{\mathrm{I}}) \otimes \underline{\omega}_{\mathrm{I}} + \ldots + (\underline{C} \cdot \underline{\omega}_{\mathrm{VI}}) \otimes \underline{\omega}_{\mathrm{VI}} \tag{1.6}$$

với mọi tenxơ $\underline{C} \in J$ và mọi hệ cơ sở trực chuẩn $\underline{\omega}_{\mathrm{K}} \in \mathcal{S}$, K = I,..., VI.

Đồng nhất thức (1.6) tương đương với kết luận sau: với mọi hệ cơ sở trực chuẩn (1.5)

$$\underline{E} = \underline{\omega}_{\mathrm{I}} \otimes \underline{\omega}_{\mathrm{I}} + \ldots + \underline{\omega}_{\mathrm{VI}} \otimes \underline{\omega}_{\mathrm{VI}} \tag{1.7}$$

Trong lý thuyết về các ánh xạ đối xứng của các không gian Euclide, các *ánh xạ chiếu* đóng vai trò chính. Ta sẽ tìm biểu thức tenxơ của chúng. Xét không gian con $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ và phần bù trực giao $\mathcal{P}^{\perp}$ của nó. Công thức $\mathcal{S} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\perp}$ có nghĩa là với mọi tenxơ $\underline{\alpha} \in \mathcal{S}$ chỉ tồn tại hai tenxơ $\underline{\alpha}_{\mathcal{P}}$, $\underline{\alpha}_{\mathcal{P}}^{\perp}$ sao cho

$$\underline{\alpha} = \underline{\alpha}_{\mathcal{P}} + \underline{\alpha}_{\mathcal{P}}^{\perp},\; \underline{\alpha}_{\mathcal{P}} \cdot \underline{\alpha}_{\mathcal{P}}^{\perp} = 0,\; \underline{\alpha}_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}$$

Tenxơ $\underline{\alpha}_{\mathcal{P}}$ thường được gọi là *hình chiếu trực giao* của tenxơ $\underline{\alpha}$ xuống không gian con $\mathcal{P}$. Xét tenxơ $\underline{P} \in J$ được xác định đơn trị theo quy tắc

$$\underline{P} \cdot \underline{\alpha} = \underline{\alpha}_{\mathcal{P}} \quad \text{với mọi } \underline{\alpha} \in \mathcal{S}$$

Tenxơ này được gọi là *ánh xạ chiếu trực giao xuống không gian con $\mathcal{P}$*. Dễ dàng chỉ ra $\underline{P}$ ở dạng hiện. Giả sử $L = \dim \mathcal{P} \leqslant 6$, ta lấy hệ cơ sở trực chuẩn $\underline{\omega}_I, \ldots, \underline{\omega}_{VI}$ sao cho L tenxơ $\underline{\omega}_{K+1}, \ldots, \underline{\omega}_{K+L}$ nằm trong $\mathcal{P}$. Khi đó

$$\underline{P} \cdot \underline{\omega}_{K+1} = \underline{\omega}_{K+1}, \ldots, \underline{P} \cdot \underline{\omega}_{K+L} = \underline{\omega}_{K+L}$$

và

$$\underline{P} \cdot \underline{\omega}_T = 0 \quad \text{với mọi } \underline{\omega}_T \notin \mathcal{P}$$

Theo đồng nhất thức (1.6) ta nhận được:

$$\underline{P} = \underline{\omega}_{K+1} \otimes \underline{\omega}_{K+1} + \ldots + \underline{\omega}_{K+L} \otimes \underline{\omega}_{K+L} \tag{1.8}$$

Thứ nguyên của $\mathcal{P}$ bằng số lượng các thành phần trong biểu diễn (1.8).

$$\dim \mathcal{P} = P_{ijij}$$

Hai ánh xạ chiếu $\underline{P}_1$ xuống $\mathcal{P}_1$ và $\underline{P}_2$ xuống $\mathcal{P}_2$ được gọi là *trực giao*, nếu các không gian con $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ trực giao nhau.

Hệ các ánh xạ chiếu trực giao nhau từng đôi một $\underline{P}_1, \ldots, \underline{P}_\rho$ được gọi là khai triển của đơn vị nếu

$$\underline{E} = \underline{P}_1 + \ldots + \underline{P}_\rho \tag{1.9}$$

Phép khai triển không gian ra tổng trực tiếp của các không gian con trực giao nhau từng đôi một

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{P}_\rho \tag{1.10}$$

trong đó

$$\mathcal{P}_\alpha = \mathrm{I_m}\, \underline{P}_\alpha, \ \alpha = 1, \ldots, \rho$$

tương ứng với phép khai triển của đơn vị (1.9). Và ngược lại, phép khai triển đơn vị (1.9) với $\underline{P}_\alpha$ là các ánh xạ chiếu trực giao xuống $\mathcal{P}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, \rho$ tương ứng với khai triển (1.10), trong đó $\mathcal{P}_\alpha \perp \mathcal{P}_\beta$ khi $\alpha \neq \beta$.

Bây giờ ta đã sẵn sàng phát biểu định lý chính – định lý phổ của lý thuyết về các ánh xạ đối xứng của các không gian Euclide được áp dụng cho trường hợp của chúng ta. (Ở đây và sau này chúng ta sẽ sử dụng các chỉ số Hy lạp cho các khai triển (1.9), (1.10) và cho tất cả các khai triển tương ứng với chúng; không lấy tổng theo các chỉ số Hy lạp lặp).

Định lý 2: *Với mọi vật thể đàn hồi $\underline{C}$ tồn tại chỉ một khai triển trực giao của không gian các tenxơ đối xứng hạng hai*

$$\mathcal{S} = \mathcal{P}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{P}_\rho, \mathcal{P}_\alpha \perp \mathcal{P}_\beta \tag{1.11}$$

với $\alpha \neq \beta$, $\rho \leqslant 6$ và chỉ một tổ hợp các thông số khác nhau từng đôi một $\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho$; $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$ với $\alpha \neq \beta$ sao cho

$$\underline{C} = \lambda_1 \underline{P}_1 + \ldots + \lambda_\rho \underline{P}_\rho \tag{1.12}$$

trong đó $\underline{P}_\alpha$ là ánh xạ chiếu trực giao xuống $\mathcal{P}_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, \rho$.

Chứng minh: Với thuật ngữ hơi khác ở đây, chứng minh định lý này đã có trong nhiều tài liệu, chẳng hạn trong [1], [2], [3].

Các không gian con $\mathcal{P}_\alpha$ sau này đóng vai trò cơ bản và có một ý nghĩa vật lý hoàn toàn rõ ràng. Chúng bao gồm tất cả các trạng thái đàn hồi riêng với môđun độ cứng λ_α, $\alpha = 1, \ldots, \rho$. Thật vậy, với mọi $\underline{\omega} \in \mathcal{P}_\alpha$ ta có

$$\underline{C} \cdot \underline{\omega} = (\lambda_1 \underline{P}_1 + \ldots + \lambda_\rho \underline{P}_\rho) \cdot \underline{\omega} = \lambda_\alpha \underline{\omega}$$

Các ánh xạ chiếu $\underline{P}_\alpha$ trong công thức (1.12) được gọi là các ánh xạ chiếu *vật chất*, các không gian con $\mathcal{P}_\alpha$ là các không gian con *vật chất*, còn các khai triển (1.11), (1.12) là các khai triển *vật chất* tương ứng với vật thể $\underline{C}$. Sau khi viết hệ phương trình

$$\begin{aligned}
\underline{E} &= \underline{P}_1 + \ldots + \underline{P}_\rho \\
\underline{C} &= \lambda_1 \underline{P}_1 + \ldots + \lambda_\rho \underline{P}_\rho \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\underline{C}^{(\rho-1)} &= \lambda_1^{\rho-1} \underline{P}_1 + \ldots + \lambda_\rho^{\rho-1} \underline{P}_\rho
\end{aligned}$$

với định thức Vandermonde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & . & . & . & . & 1 \\ \lambda_1 & . & . & . & . & \lambda_\rho \\ . & . & . & . & . & . \\ \lambda_1^{\rho-1} & . & . & . & . & \lambda_\rho^{\rho-1} \end{vmatrix} = \prod_{\rho \geqslant \alpha > \beta \geqslant 1} (\lambda_\alpha - \lambda_\beta) \neq 0$$

chúng ta sẽ nhận được các biểu thức hiện [1]

$$\underline{P}_\alpha = \frac{(\underline{C} - \lambda_1 \underline{E}) \circ \ldots \circ (\underline{C} - \lambda_{\alpha-1} \underline{E}) \circ (\underline{C} - \lambda_{\alpha+1} \underline{E}) \circ \ldots \circ (\underline{C} - \lambda_\rho \underline{E})}{(\lambda_\alpha - \lambda_1) \ldots (\lambda_\alpha - \lambda_{\alpha-1}) (\lambda_\alpha - \lambda_{\alpha+1}) \ldots (\lambda_\alpha - \lambda_\rho)}, \quad (1.13)$$

$$\alpha = 1, \ldots, \rho.$$

Ta cũng lưu ý các công thức

$$\lambda_\alpha = \underline{C} \cdot \underline{P}_\alpha; \; \alpha = 1, \ldots \rho.$$

Các môđun độ cứng λ_α là các nghiệm của phương trình đặc trưng.
Ở đây phương trình đặc trưng đó có dạng:

$$\mathrm{DET}\,(\underline{C} - \lambda \underline{E}) = \lambda^6 + a_1(\underline{C})\,\lambda^5 + \ldots + a_5(\underline{C})\,\lambda + a_6(\underline{C}) = 0, \qquad (1.14)$$

trong đó : $\mathrm{DET}\,\underline{A} \equiv \det(A_{KL})$; $A_{KL} = \underline{v}_K \cdot \underline{A} \cdot \underline{v}_L = A_{LK}$ là ma trận 6×6 ứng với tenxơ $\underline{A}$ và một hệ cơ sở trực chuẩn cố định tùy ý $\underline{v}_I, \ldots, \underline{v}_{VI}$ trong $\mathcal{S}$. Việc lựa chọn hệ cơ sở này không ảnh hưởng tới các hệ số $a_i(\underline{C})$. Số

$$q_\alpha = \dim \mathcal{P}_\alpha = \underline{P}_{(\alpha)abab}$$

là bội của nghiệm λ_α của phương trình (1.14).

Chúng ta đã trình bày định lý phổ ở dạng tổng quát nhất, cách làm đó có thể không quen thuộc lắm. Có thể dẫn ra các cách phát biểu khác tương đương. Theo quan niệm của chúng tôi, định lý đó có vai trò trung tâm trong việc mô tả các tính chất của vật thể đàn hồi. Do đó, dưới đây chúng tôi nêu lên ba mệnh đề tương đương với định lý 2:

1. Với mọi vật thể đàn hồi $\underline{C}$ tồn tại ít nhất một hệ trực chuẩn trong $\mathcal{S}$:

$$\underline{\omega}_I, \ldots, \underline{\omega}_{VI} \; ; \; \underline{\omega}_K \cdot \underline{\omega}_L = \delta_{KL}$$

bao gồm các trạng thái đàn hồi riêng :

$$\underline{C} \cdot \underline{\omega}_K = \lambda_K \underline{\omega}_K \; ; \; K = I, \ldots, VI \qquad (1.15)$$

2. Với mọi vật thể đàn hồi $\underline{C}$ tồn tại ít nhất một hệ cơ sở trực chuẩn (1.15) và 6 thông số $\lambda_I, \ldots, \lambda_{VI}$ sao cho

$$\underline{C} = \lambda_I \underline{\omega}_I \otimes \underline{\omega}_I + \ldots + \lambda_{VI} \underline{\omega}_{VI} \otimes \underline{\omega}_{VI} \qquad (1.16)$$

3. Với mọi vật thể đàn hồi $\underline{C}$ tồn tại ít nhất một hệ cơ sở trực chuẩn (1.15) sao cho ma trận $C_{KL} \equiv \underline{\omega}_K \cdot \underline{C} \cdot \underline{\omega}_L$ có dạng đường chéo.

Công thức (1.12) (hoặc (1.16)) được gọi là công thức cấu trúc cơ bản của vật thể đàn hồi. Một tập trực chuẩn bất kỳ của các trạng thái riêng $\underline{\omega}_K$, $K = I, \ldots, VI$ của tenxơ $\underline{C}$ được gọi là rêpe tenxơ vật chất của nó.

Chúng ta hãy lựa chọn một thứ tự nào đó cho các thành phần trong (1.11), chẳng hạn thành phần $\lambda_\alpha \underline{P}_\alpha$ được viết trước thành phần $\lambda_\beta \underline{P}_\beta$ (không lấy tổng) nếu $q_\alpha < q_\beta$. Ta vẫn giữ thứ tự trên cả khi $q_\alpha = q_\beta$ nếu $\lambda_\alpha > \lambda_\beta$. Lúc này tất cả λ_α và $\underline{P}_\alpha$ (tất nhiên kể cả ρ – số lượng các thành phần) đều là các giá trị của những hàm nào đó của đối số $\underline{C}$ trên J. Điều đó cũng sẽ được chúng ta lưu ý đến khi phát biểu định lý sau.

Định lý 3 : *Các thông số $\lambda_1, \ldots, \lambda_\rho$ ứng với vật thể đàn hồi $\underline{C}$ theo công thức cấu trúc (1.12) là các hằng số đàn hồi vật chất, còn các ánh xạ chiếu vật chất, $\underline{P}_1, \ldots, \underline{P}_\rho$ là các tenxơ vật chất tương ứng với $\underline{C}$.*

Chứng minh: Tính bất biến của tenxơ độ cứng :

$$\lambda_\alpha(\underline{Q} * \underline{C}) = \lambda_\alpha(\underline{C}), \alpha = 1, \ldots, \rho$$

suy ra từ định lý 1. Tính đẳng hướng của P_α :

$$\underline{P}_\alpha(\underline{Q} * \underline{C}) = \underline{Q} * \underline{P}_\alpha(\underline{C})$$

suy ra ngay từ các công thức hiện (1.13).

Các không gian trạng thái riêng đối với vật thể $\underline{Q} * \underline{C}$ theo định lý 1 sẽ là các ảnh của không gian trạng thái riêng của vật $\underline{C}$ ở phép quay $\underline{Q}$.

Cuối cùng, chúng tôi đưa thêm một khái niệm có ích nữa. Sự phân tích số 6 = dim $\mathcal{S}$ ra các số hạng nguyên dương $q_1, \ldots, q_\rho$ (hoặc nếu tiện, ra các sơ đồ Young [4]) tương ứng với sự khai triển vật chất của không gian $\mathcal{S}$ (1.11). Chúng ta viết sự phân tích đó ở dạng:

$$< q_1 + \ldots + q_\rho >, q_1 \leqslant \ldots \leqslant q_\rho$$

và gọi là chỉ số cấu trúc thứ nhất của vật thể $\underline{C}$. Chỉ số cấu trúc thứ nhất tất nhiên sẽ như nhau đối với các vật thể làm từ một loại vật liệu, nó là đặc tính của vật liệu.

Nhận ngày 18/7/1983

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. МАЛЬЦЕВ А. И. Основы линейной алгебры, Гостехиздат, М. 1956
2. ХАЛМОШ П. Конечномерные векторные пространства, Физматгиз, М. 1963
3. ГАНТМАХЕР Ф. Р. Теория матриц, Наука, М. 1966.
4. ЛЮБАРСКИЙ Г. Я. Теория групп и её применения в физике, Физматгиз. М. 1958.

РЕЗЮМЕ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА УПРУГИХ ТЕЛ
I. СОБСТВЕННЫЕ УПРУГИЕ СОСТОЯНИЯ

Предложен новый способ описания закона Гука, основанный на понятии собственного упругого состояния тела. Все собственные упругие состояния данного тела описывает теорема 2. Получены формулы выражающие тензор жесткости тела через собственные упругие состояния.