Tạp chí Cơ Học T.V, 1983, số 3 (trang 8 — 17)

VỀ ĐỊNH LÝ TỒN TẠI NGHIỆM BÀI TOÁN BIÊN CỦA LÝ THUYẾT DẺO ĐỐI VỚI QUÁ TRÌNH BIẾN DẠNG CÓ ĐỘ CONG TRUNG BÌNH

ĐÀO HUY BÍCH

Chứng minh định lý tồn tại nghiệm của bài toán biên của lý thuyết dẻo có ý nghĩa quan trọng, nó khẳng định tính đúng đắn của bài toán đặt ra, đồng thời cho phương pháp xác định nghiệm. Vì vậy đã được nhiều tác giả quan tâm theo hai hướng, tùy thuộc vào việc sử dụng mô hình của môi trường dẻo. Theo hướng sử dụng lý thuyết chảy dẻo có các công trình của Côite [2] Clae Giônxơn [1] Camênhiagiơ [3] Umanxki [4],... Theo hướng lý thuyết các quá trình biến dạng đàn dẻo có các công trình chứng minh định lý tồn tại cho quá trình biến dạng đơn giản (Vôrôvich và Craxốpxki [5], Bucôp và Satnhep [6],...), quá trình biến dạng có độ cong nhỏ (Brôpcô [7]), quá trình biến dạng theo qui đạo gấp khúc (Nhêđêxcu — Clêgia [8]).

Trong bài này xét định lý tồn tại nghiệm của bài toán biên của lý thuyết dẻo đối với quá trình biến dạng có độ cong trung bình, chứng minh định lý trong các trường khả dĩ liên tục và mở rộng trong tập hợp được làm đầy của các trường khả dĩ (bao đóng theo chuẩn L_2).

§1. QUÁ TRÌNH BIẾN DẠNG PHỨC TẠP CÓ ĐỘ CONG TRUNG BÌNH

Đối với quá trình này ta đã xây dựng được lý thuyết dẻo tuyến tính hóa phù hợp với các kết quả thực nghiệm, liên hệ giữa vectơ tốc độ thay đổi ứng suất $\dot{\bar{\sigma}}$ và vectơ tốc độ biến dạng $\dot{\bar{\text{Э}}}$ có dạng sau đây [9]:

$$\dot{\bar{\sigma}} = [\Phi'(S) - \sigma_u k(S)] \frac{\bar{\sigma}\,\dot{\bar{\text{Э}}}}{\sigma_u^2} \bar{\sigma} + \sigma_u k(S) \dot{\bar{\text{Э}}}, \tag{1.1}$$

hay là

$$\dot{\bar{\text{Э}}} = \frac{1}{k(S)\sigma_u} \dot{\bar{\sigma}} + \left[\frac{1}{\Phi'(S)} - \frac{1}{k(S)\sigma_u} \right] \frac{\bar{\sigma}\,\dot{\bar{\sigma}}}{\sigma_u^2} \bar{\sigma}, \tag{1.2}$$

trong đó $\Phi'(S) = d\Phi/dS$ và $k(S)$ là các hàm xác định của độ dài cung qui đạo biến dạng s, chúng đặc trưng cho từng loại vật liệu. Viết dưới dạng tenxơ, các hệ thức (1.1), (1.2) cho ta liên hệ giữa tenxơ tốc độ biến dạng và tenxơ tốc độ biến đổi ứng suất:

$$S_{ij} = [\Phi'(S) - \sigma_u k(S)] \frac{S_{mn}\dot{\text{Э}}_{mn}}{\sigma} S_{ij} + \frac{2}{3} k(S)\sigma_u \dot{\text{Э}}_{ij} \tag{1.1'}$$

và

$$\dot{\vartheta}_{ij} = \frac{3}{2}\left[\frac{1}{k(S)\sigma_u}\dot{S}_{ij} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\Phi'(S)} - \frac{1}{k(S)\sigma_u}\right)\frac{S_{mn}\dot{S}_{mn}}{\sigma_u^2}S_{ij}\right] \quad (1.2')$$

Hệ thức (1.1'), (1.2') tuyến tính đối với tốc độ biến dạng và tốc độ thay đổi ứng suất.

Đối với quá trình này ta đã chứng minh được nó thỏa mãn nguyên lý biến phân [10]: ứng với trạng thái thực công suất biến dạng đạt giá trị cực tiểu.

Gọi $\dot{\sigma}^*_{ij}$ là tốc độ thay đổi ứng suất khả dĩ tĩnh học, $\dot{\varepsilon}^*_{ij}$ – tốc độ biến dạng tương ứng với tốc độ thay đổi ứng suất khả dĩ nêu trên (chúng xác định theo hệ thức (1.2')); nói chung $\dot{\varepsilon}^*_{ij}$ không tương thích. $\dot{\varepsilon}^\circ_{ij}$ là tốc độ biến dạng khả dĩ động học, theo (1.1') xác định tốc độ thay đổi ứng suất $\dot{\sigma}^\circ_{ij}$, nói chung $\dot{\sigma}^\circ_{ij}$ không thỏa mãn phương trình cân bằng.

Dùng nguyên lý biến phân Lagrăng đối với tốc độ thay đổi ứng suất khả dĩ tĩnh học $\dot{\sigma}^*_{ij}$ và tốc độ biến dạng khả dĩ động học $\dot{\varepsilon}^\circ_{ij}$ ta đi đến phiếm hàm:

$$I = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\dot{\sigma}^*_{ij}\dot{\varepsilon}^*_{ij} + \frac{1}{2}\dot{\sigma}^\circ_{ij}\dot{\varepsilon}^\circ_{ij} - \dot{\sigma}^*_{ij}\dot{\varepsilon}^\circ_{ij}\right)d\Omega \geqslant 0 \quad (1.3)$$

Việc chứng minh định lý tồn tại nghiệm của bài toán biên lý thuyết dẻo dựa trên nguyên lý Đirìclê: sự tồn tại giá trị cực tiểu tương đương với sự tồn tại cận dưới của phiếm hàm I.

§2. CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ TỒN TẠI NGHIỆM TRONG CÁC TRƯỜNG KHẢ DĨ LIÊN TỤC

Xét cực tiểu của phiếm hàm I trong lớp các tốc độ biến dạng khả dĩ động học $\dot{\varepsilon}^\circ_{ij}$, khi cho tốc độ thay đổi ứng suất khả dĩ tĩnh học $\dot{\sigma}^*_{ij}$ không đổi.

Giả sử $\dot{\varepsilon}^{\circ\circ}_{ij}$ là tốc độ biến dạng làm cho I cực tiểu và giả sử $\dot{\sigma}^{\circ\circ}_{ij}$ tương ứng là tốc độ hay đổi ứng suất tính theo hệ thức (1.1')

Đặt
$$\dot{\varepsilon}^\circ_{ij} - \dot{\varepsilon}^{\circ\circ}_{ij} = h\dot{\eta}_{ij} = h(\tilde{\dot{\eta}}_{ij} + \dot{\eta}\delta_{ij}), \quad (2.1)$$

$$\dot{\sigma}^\circ_{ij} - \dot{\sigma}^{\circ\circ}_{ij} = h\dot{\xi}_{ij} = h(\tilde{\dot{\xi}}_{ij} + \dot{\xi}\delta_{ij}),$$

trong đó $\dot{\eta}_{ij}$ trường tốc độ tương thích, ứng với tốc độ chuyển dịch bằng không trên S_u.

Theo (1.2') ta tính được

$$\dot{\varepsilon}^\circ_{ij} - \dot{\varepsilon}^{\circ\circ}_{ij} = h\dot{\eta}\delta_{ij} + \frac{3h}{2}\left[\frac{1}{k(S)\sigma_u}\tilde{\dot{\xi}}_{ij} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{\Phi'(S)} - \frac{1}{k(S)\sigma_u}\right)\frac{S_{mn}\tilde{\dot{\xi}}_{mn}}{\sigma_u^2}S_{ij}\right] \quad (2.2)$$

Cực tiểu của I có thể biểu thị bằng bất đẳng thức sau (với $\dot{\sigma}^*_{ij}$ cố định):

$$\int\limits_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\dot{\sigma}^{\circ}_{ij}\,\dot{\varepsilon}^{\circ}_{ij}-\frac{1}{2}\dot{\sigma}^{\circ\circ}_{ij}\,\dot{\varepsilon}^{\circ\circ}_{ij}-\dot{\sigma}^{*}_{ij}(\dot{\varepsilon}^{\circ}_{ij}-\dot{\varepsilon}^{\circ\circ}_{ij})\right]d\Omega\geqslant 0. \qquad (2.3)$$

Đặt các giá trị $\dot{\varepsilon}^{\circ}_{ij}$, $\dot{\varepsilon}^{\circ\circ}_{ij}$, $\dot{\sigma}^{\circ}_{ij}$, $\dot{\sigma}^{\circ\circ}_{ij}$ tính theo (2.1) và (2.2) vào bất đẳng thức (2.3), chú ý đến tính tuyến tính của các hệ thức giữa tốc độ biến dạng và ứng suất, sau một số phép biến đổi ta được

$$\int\limits_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\dot{\sigma}^{\circ\circ}_{ij}h\dot{\eta}_{ij}+\frac{1}{2}\dot{\varepsilon}^{\circ\circ}_{ij}h\dot{\xi}_{ij}+\frac{1}{2}h^2\dot{\xi}_{ij}\dot{\eta}_{ij}-\dot{\sigma}^{*}_{ij}h\dot{\eta}_{ij}\right)d\Omega=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\Big\{\dot{\sigma}^{\circ\circ}_{ij}h\dot{\eta}_{ij}-\dot{\sigma}^{*}_{ij}h\dot{\eta}_{ij}+\frac{9Kh^2}{2}\dot{\eta}^2+\frac{3h^2}{4}\left[\frac{1}{k(S)\sigma_u}\dot{\tilde{\xi}}_{ij}\dot{\tilde{\xi}}_{ij}+\right.$$

$$\left.+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\Phi'(S)}-\frac{1}{k(S)\sigma_u}\right)\left(\frac{S_{ij}\dot{\tilde{\xi}}_{ij}}{\sigma_u}\right)^2\right]\Big\}d\Omega\geqslant 0$$

hay là

$$\int\limits_{\Omega}\left[(\dot{\sigma}^{\circ\circ}_{ij}-\dot{\sigma}^{*}_{ij})h\dot{\eta}_{ij}+\frac{9Kh^2}{2}\dot{\eta}^2+N(h\dot{\tilde{\xi}}_{ij})\right]d\Omega\geqslant 0$$

trong đó

$$N(h\dot{\tilde{\xi}}_{ij})=\frac{3h^2}{4}\left[\frac{1}{k(S)\sigma_u}\dot{\tilde{\xi}}_{ij}\dot{\tilde{\xi}}_{ij}+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\Phi'(S)}-\frac{1}{k(S)\sigma_u}\right)\left(\frac{S_{ij}\dot{\tilde{\xi}}_{ij}}{\sigma_u}\right)^2\right].$$

Như đã biết $k(S)>0$, $\Phi'(S)>0$, $\sigma_u>0$ nên $N(h\dot{\tilde{\xi}}_{ij})$ là dạng toàn phương không âm đối với $\dot{\tilde{\xi}}_{ij}$. Quả vậy

$$N(h\dot{\tilde{\xi}}_{ij})=\frac{9h^2}{8\Phi'(S)}\left(\frac{S_{ij}\dot{\tilde{\xi}}_{ij}}{\sigma_u}\right)^2+\frac{9h^2}{8k(S)\sigma_u^3}\left[\frac{2}{3}\sigma_u^2\dot{\tilde{\xi}}_{ij}\dot{\tilde{\xi}}_{ij}-(S_{ij}\dot{\tilde{\xi}}_{ij})^2\right]=$$

$$=\frac{9h^2}{8\Phi'(S)}\left(\frac{S_{ij}\dot{\tilde{\xi}}_{ij}}{\sigma_u}\right)^2+\frac{9h^2}{8k(S)\sigma_u^3}\left[(S_{mn}S_{mn})(\dot{\tilde{\xi}}_{ij}\dot{\tilde{\xi}}_{ij})-(S_{ij}\dot{\tilde{\xi}}_{ij})^2\right],$$

số hạng thứ hai dương theo công thức Svac.

Khi đó bằng cách chọn đại lượng đủ nhỏ h thích hợp ta có thể làm cho số hạng thứ hai và thứ ba của biểu thức dưới dấu tích phân (số hạng nhỏ bậc cao) nhỏ tùy ý so với số hạng thứ nhất. Điều này dẫn đến

$$\int\limits_{\Omega}(\dot{\sigma}^{\circ\circ}_{ij}-\dot{\sigma}^{*}_{ij})\dot{\eta}_{ij}d\Omega=0 \qquad (2.4)$$

với mọi tốc độ biến dạng tương thích $\dot{\eta}_{ij}$, ứng với tốc độ chuyển dịch bằng không trên S_u. Theo nguyên lý biến phân Lagrăng, từ hệ thức vừa nhận được $\dot{\sigma}^{\circ\circ}_{ij}-\dot{\sigma}^{*}_{ij}$ đóng vai trò biến phân của tốc độ thay đổi ứng suất, ứng với sự thay đổi của lực mặt trên $S\sigma$ bằng không. Do đó $\dot{\sigma}_{ij}^{\circ}$ là tốc độ thay đổi ứng suất khả dĩ tĩnh học. Vì tốc độ thay đổi ứng suất này thỏa mãn mọi phương trình cân bằng và điều kiện biên, nên nó chính là nghiệm $\dot{\sigma}_{ij}$ của bài toán biên.

§ 3. MỞ RỘNG CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ TỒN TẠI NGHIỆM BÀI TOÁN BIÊN TRONG TẬP HỢP ĐƯỢC LÀM ĐẦY CỦA CÁC TRƯỜNG KHẢ DĨ (bao đóng theo chuẩn l_2).

Nếu chỉ giới hạn ở lớp các trường khả dĩ liên tục (trơn), có thể phiếm hàm I không đạt cận dưới trong đó. Vì vậy ta làm đầy theo chuẩn L_2 các trường khả dĩ thuần nhất $\dot{\Sigma}_{ij}^{*}$, $\dot{e}_{ij}^{\circ}$ (thỏa mãn phương trình cân bằng và điều kiện biên bằng không), trong đó trường khả dĩ bất kỳ có thể biểu diễn dưới dạng :

$$\dot{\sigma}_{ij}^{*} = \dot{\sum}_{ij}^{*} + \underline{\dot{\sigma}}_{ij}^{*} , \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{\circ} = \dot{e}_{ij}^{\circ} + \underline{\dot{\varepsilon}}_{ij}^{\circ}$$

với $\underline{\dot{\sigma}}_{ij}^{*}$, $\underline{\dot{\varepsilon}}_{ij}$ là trường riêng cố định nào đây. Khi đó đối với tập $\dot{u}_i^{\circ}$ (trên S_u, $W = 0$) ta lấy bao đóng theo chuẩn W_2^1:

$$\|\dot{\bar{u}}\|_{W_2^1} = \int_{\Omega} \Big[\sum_{i,j} (\dot{u}_{i,j})^2 + \sum_{i} (\dot{u}_i)^2 \Big] d\Omega. \tag{3.1}$$

Dùng các bất đẳng thức đã biết

$$\int_{\Omega} \sum_{i} \dot{u}_i^2 d\Omega \leqslant C_1 \int_{\Omega} \sum_{i,j} (\dot{u}_{i,j})^2 d\Omega,$$

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j} (\dot{u}_{i,j})^2 d\Omega \leqslant C_2 \int_{\Omega} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) d\Omega =$$

$$= C_2 \int_{\Omega} \dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} \, d\Omega, \tag{3.2}$$

có thể chỉ ra rằng nếu dãy $(\dot{u}_i^{\circ})_n$ hội tụ về $\dot{u}_i^{\circ}$ trong W_2^1, thì dãy tương ứng $(\dot{e}_{ij}^{\circ})_n$ hội tụ về $\dot{e}_{ij}^{\circ}$ trong L_2 và ngược lại.

Bất đẳng thức (3.2) thỏa mãn nếu miền Ω là mặt liên tục từng khúc, giới nội, vi phân được, không có điểm lùi. Ngoài ra nếu trên toàn biên của Ω cho lực (S_σ) thì tốc độ khả dĩ còn phải thỏa mãn thêm điều kiện

$$\int_{\Omega} \dot{\bar{u}} d\Omega = 0, \quad \int_{\Omega} \dot{\bar{u}} \times \bar{r} \, d\Omega = 0,$$

khi đó (3.2) vẫn còn có ý nghĩa.

Ký hiệu $E^{\circ}(\Omega)$ là không gian Hinbe nhận được bằng bao đóng không gian trường khả dĩ thuần nhất $\dot{e}_{ij}^{\circ}$ theo chuẩn :

$$\|\dot{\bar{u}}\|_{E^o} = (\dot{\bar{u}}, \dot{\bar{u}})_{E^o} = \int_\Omega \dot{\varepsilon}_{ij}(\dot{\bar{u}}) \dot{\varepsilon}_{ij}(\dot{\bar{u}}) d\Omega \qquad (3.3)$$

Tương tự xác định không gian Hinbe $\Sigma^*(\Omega)$ đối với trường khả dĩ thuần nhất $\dot{\Sigma}^*_{ij}$

Nhờ bất đẳng thức (3.2) ta có thể chỉ ra các chuẩn (3.1) và (3.3) tương đương nhau. Gọi $\Sigma^*_1 = \Sigma^* + \sigma^*$, $E^o_1 = E^o + \bar{\varepsilon}^o$ là tập các trường khả dĩ tĩnh và động tương ứng. Nói chung lấy lớp hàm xét ở bài toán này thuộc không gian $L_2(\Sigma^*_1 \subset L_2, E^o_1 \subset L_2)$. Giả thiết rằng các giá trị $\sigma_{ij}(x, t_o)$, $\varepsilon_{ij}(x, t_o)$, $t_o \in [0, T]$ cho trước trong miền Ω như thế nào đấy sao cho $\Phi'(s)$, $k(s)\sigma_u$ là những hàm giới nội, đo được trong Ω. Khi đó từ việc $\dot{\sigma}^*_{ij} \in L_2$, $\dot{\varepsilon}^o_{ij} \in L_2$ và từ các hệ thức (1.1'), (1.2') suy ra

$$\dot{\varepsilon}^*_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}(\dot{\sigma}^*_{mn}) \in L_2, \quad \dot{\sigma}^o_{ji} = \dot{\sigma}_{ij}(\dot{\varepsilon}^o_{mn}) \in L_2 .$$

Do đó phiếm hàm (1.3) xác định trên $\Sigma^* \times E^o$ và chú ý đến (1.1'), (1.2') có thể biểu diễn dưới dạng

$$I(\dot{\sigma}^*_{ij}, \dot{\varepsilon}^o_{ij}) = I_1(\dot{\sigma}^*_{ij}) + I_2(\dot{\varepsilon}^o_{ij}) - (\dot{\sigma}^*_{ij}, \dot{\varepsilon}^o_{ij})_{L_2} . \qquad (3.4)$$

trong đó

$$I_1(\dot{\sigma}^*_{ij}) = \frac{1}{2} \int_\Omega \dot{\sigma}^*_{ij} \dot{\varepsilon}^*_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} \int_\Omega (\dot{S}^*_{ij} \dot{\ni}^*_{ij} + 3\dot{\sigma}^* \dot{\varepsilon}^*) d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Omega (\dot{\bar{\sigma}}^* \dot{\bar{\ni}}^* + 3\dot{\sigma}^* \dot{\varepsilon}^*) d\Omega = \frac{1}{2} \int_\Omega \Big\{ \dot{\bar{\sigma}}^* \Big[\frac{1}{k(S)\sigma_u} \dot{\bar{\sigma}}^* +$$

$$+ \left(\frac{1}{\Phi'(S)} - \frac{1}{k(S)\sigma_u} \right) \frac{\overline{\sigma \dot{\sigma}^*}}{\sigma_u^2} \bar{\sigma} \Big] + \frac{\dot{\sigma}^{*2}}{K} \Big\} d\Omega, \qquad (3.5)$$

$$I_2(\dot{\varepsilon}^o_{ij}) = \frac{1}{2} \int_\Omega \dot{\sigma}^o_{ij} \dot{\varepsilon}^o_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} \int_\Omega (\dot{\bar{\sigma}}^o \dot{\bar{\ni}}^o + 3\dot{\sigma}^o \dot{\varepsilon}^o) d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2} \int_\Omega \Big\{ \dot{\bar{\ni}}^o \Big[k(S)\sigma_u \dot{\bar{\ni}}^o + (\Phi'(S) - k(S)\sigma_u) \frac{\overline{\sigma \dot{\ni}^o}}{\sigma_u^2} \bar{\sigma} \Big] + 9K\dot{\varepsilon}^{o2} \Big\} d\Omega, \qquad (3.6)$$

$$(\dot{\sigma}^*_{ij}, \dot{\varepsilon}^o_{ij})_{L_2} = \int_\Omega \dot{\sigma}^*_{ij} \dot{\varepsilon}^o_{ij} d\Omega. \qquad (3.7)$$

Để chứng minh phiếm hàm I đạt cận dưới ta xét một số tính chất của nó.

a) Phiếm hàm I liên tục.

Trước hết xét $I_1(\dot{\sigma}^*_{ij})$, nó liên tục nếu

$$I_1(\dot{\sigma}^*_{ij1}) - I_1(\dot{\sigma}^*_{ij2}) \to 0 \text{ khi } \dot{\sigma}^*_{ij1} \to \dot{\sigma}^*_{ij2}$$

Quả vậy,

$$|I_1(\overset{\cdot}{\sigma}{}^*_{ij1}) - I_1(\overset{\cdot}{\sigma}{}^*_{ij2})| = \Big|\frac{1}{2}\int_\Omega \Big\{ \frac{1}{k(S)\sigma_u}(\bar{\dot\sigma}{}^*_1\bar{\dot\sigma}{}^*_1 - \bar{\dot\sigma}{}^*_2\bar{\dot\sigma}{}^*_2) +$$

$$+\left[\frac{1}{\Phi'(S)} - \frac{1}{k(S)\sigma_u}\right]\left[\left(\frac{\bar\sigma\,\bar{\dot\sigma}{}^*_1}{\sigma_u}\right)^2 - \left(\frac{\bar\sigma\,\bar{\dot\sigma}{}^*_2}{\sigma_u}\right)^2\right] + \frac{\dot\sigma{}^{*2}_1 - \dot\sigma{}^{*2}_2}{K}\Big\}\, d\Omega\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{k(S)\sigma_u}\|\bar{\dot\sigma}{}^*_1 + \bar{\dot\sigma}{}^*_2\|\,\|\bar{\dot\sigma}{}^*_1 - \bar{\dot\sigma}{}^*_2\| + \left|\frac{1}{\Phi'(S)} - \frac{1}{k(S)\sigma_u}\right|\,\|\bar{\dot\sigma}{}^*_1 +$$

$$+\bar{\dot\sigma}{}^*_2\|\,\|\bar{\dot\sigma}{}^*_1 - \bar{\dot\sigma}{}^*_2\| + \frac{1}{K}\,|\dot\sigma{}^*_1 + \dot\sigma{}^*_2|\,|\dot\sigma{}^*_1 - \dot\sigma{}^*_2|\Big\} \to 0$$

$$\text{khi } \dot\sigma{}^*_{ij1} \to \dot\sigma{}^*_{ij2}.$$

Do đó $I_1(\dot\sigma{}^*_{ij})$ liên tục, tương tự $I_2(\dot\varepsilon{}^o_{ij})$ liên tục, $(\dot\sigma{}^*_{ij}, \dot\varepsilon{}^o_{ij})$ liên tục do tích vô hướng.

Theo nguyên lý biến phân ta có

$$I(\dot\sigma{}^*_{ij}, \dot\varepsilon{}^o_{ij}) \geqslant 0$$

Với các trường khả dĩ liên tục, các trường này trù mật trong Σ^*_1 và E^o_1 và phiếm hàm I liên tục, nên bất đẳng thức tồn tại với mọi

$$\dot\sigma{}^*_{ij} \in \Sigma^*,\ \dot\varepsilon{}^o_{ij} \in E^o.$$

b) Phiếm hàm (1,3) lồi tuyệt đối,
túc là

$$I(\alpha\dot\sigma{}^*_{ij1} + \beta\dot\sigma{}^*_{ij2}, \alpha\dot\varepsilon{}^o_{ij1} + \beta\dot\varepsilon{}^o_{ij2}) < \alpha I(\dot\sigma{}^*_{ij1}, \dot\varepsilon{}^o_{ij1}) + \beta I(\dot\sigma{}^*_{ij2}, \dot\varepsilon{}^o_{ij2});$$

$$0 < \alpha < 1;\ \alpha + \beta = 1;\ \dot\sigma{}^*_{ij1}, \dot\sigma{}^*_{ij2} \in \Sigma^*;\ \dot\varepsilon{}^o_{ij1}, \dot\varepsilon{}^o_{ij2} \in E^o.$$

Từ hệ thức (3.5) thấy rằng $I_1(\dot\sigma{}^*_{ij})$ là dạng toàn phương xác định dương đối với $\dot\sigma{}^*_{ij}$, vì vậy $I_1(\dot\sigma{}^*_{ij})$ lồi tuyệt đối.

Xét $I_2(\dot\varepsilon{}^o_{ij})$, theo (3.6) ta có

$$I_2(\dot\varepsilon{}^o_{ij}) = \frac{1}{2}\int_\Omega \{[k(S)\sigma_u + (\Phi'(S) - k(S)\sigma_u)\cos^2\theta^o]\,V^{o2}_u + 9K\dot\varepsilon^{o2}\}\,d\Omega =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \{[k(S)\sigma_u(1 - \cos^2\theta^o) + \Phi'(S)\cos^2\theta^o]\,V^{o2}_u + 9K\dot\varepsilon^{o2}\}\,d\Omega,$$

$I_2(\dot\varepsilon{}^o_{ij})$ cũng xác định dương, suy ra I_2 lồi tuyệt đối.

Cuối cùng xét $(\dot\sigma{}^*_{ij}, \dot\varepsilon{}^o_{ij})_{L_2}$, ta có

$$(\alpha\dot{\sigma}^*_{ij1} + \beta\dot{\sigma}^*_{ij2}, \alpha\dot{\varepsilon}^\circ_{ij1} + \beta\dot{\varepsilon}^\circ_{ij2})_{L_2} = \alpha(\dot{\sigma}^*_{ij1}, \dot{\varepsilon}^\circ_{ij1})_{L_2} +$$

$$+ \beta(\dot{\sigma}^*_{ij2}, \dot{\varepsilon}^*_{ij2})_{L_2} - \alpha\beta(\dot{\sigma}^*_{ij1} - \dot{\sigma}^*_{ij2}, \dot{\varepsilon}^\circ_{ij1} - \dot{\varepsilon}^\circ_{ij2})_{L_2}.$$

$\dot{\sigma}^*_{ij1} - \dot{\sigma}^*_{ij2} = \dot{\sum}^*_{ij}$ là tốc độ thay đổi ứng suất khả dĩ tĩnh học, thỏa mãn phương trình cân bằng và điều kiện biên thuần nhất trên $S\sigma$

$$\left(\frac{\partial \dot{\sum}^*_{ij}}{\partial x_j} = 0,\ \dot{\sum}^*_{ij} n_j = 0 \text{ trên } S\sigma\right),\ \text{còn } \dot{\varepsilon}^\circ_{ij1} - \dot{\varepsilon}^\circ_{ij2} = \dot{e}^\circ_{ij}$$

là tốc độ biến dạng khả dĩ động học thỏa mãn điều kiện biên thuần nhất trên S_u ($\dot{u}^\circ_i = 0$ trên S_u).

Vì vậy

$$(\dot{\sigma}^*_{ij1} - \dot{\sigma}^*_{ij2}, \dot{\varepsilon}^\circ_{ij1} - \dot{\varepsilon}^\circ_{ij2})_{L_2} = \int_\Omega \dot{\sum}^*_{ij} \dot{e}^\circ_{ij} d\Omega = \int_\Omega \dot{\sum}^*_{ij} \frac{\partial \dot{u}^\circ_i}{\partial x_j} d\Omega =$$

$$= \int_S \dot{\sum}^*_{ij} n_j \dot{u}^\circ_i dS - \int_\Omega \dot{u}^\circ_i \frac{\partial \dot{\sum}^*_{ij}}{\partial x_j} d\Omega = 0. \quad (3.8)$$

Do đó phiếm hàm $I(\dot{\sigma}^*_{ij}, \dot{\varepsilon}^\circ_{ij})$ lồi tuyệt đối.

c) Phiếm hàm (1.3) có vi phân tuyến tính theo Gatô.

Việc tính vi phân Gatô của phiếm hàm được tiến hành trong không gian $\Sigma^* \times E_\circ$ nhưng vì $\underline{\sigma}^*$ và $\underline{\varepsilon}^\circ$ cố định, nên có thể tiến hành như sau :

Xét hai trường $\dot{\sigma}^{**}_{ij}, \dot{\varepsilon}^{\circ\circ}_{ij}$ và $\dot{\sigma}^*_{ij}, \dot{\varepsilon}^\circ_{ij}$, trong đó

$$\dot{\sigma}^{**}_{ij} = \dot{\sigma}^*_{ij} + h\,\xi_{ij},\quad \dot{\varepsilon}^{\circ\circ}_{ij} = \dot{\varepsilon}^\circ_{ij} + h\,\eta_{ij},$$

khi đó ξ_{ij} là tốc độ thay đổi ứng suất khả dĩ tĩnh học, thỏa mãn phương trình cân bằng và điều kiện biên thuần nhất trên S_σ, còn η_{ij} là tốc độ biến dạng khả dĩ động học, tương ứng với vận tốc chuyển dịch bằng không trên S_u.

Theo định nghĩa vi phân Gatô ta có

$$DI(\dot{\sigma}^*_{ij}, \dot{\varepsilon}^\circ_{ij}, \xi_{ij}, \eta_{ij}) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[I(\dot{\sigma}^{**}_{ij}, \dot{\varepsilon}^{\circ\circ}_{ij}) - I(\dot{\sigma}^*_{ij}, \dot{\varepsilon}^\circ_{ij})\right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[I(\dot{\sigma}^*_{ij} + h\,\xi_{ij}, \dot{\varepsilon}^\circ_{ij} + h\,\eta_{ij}) - I(\dot{\sigma}^*_{ij}, \dot{\varepsilon}^\circ_{ij})\right]. \quad (3.9)$$

Để cho đơn giản ta viết dưới dạng vecto $\dot{\bar{\sigma}}^{**} = \dot{\bar{\sigma}}^* + h\dot{\bar{\xi}}$, trong đó $\dot{\bar{\sigma}}^{**}$, $\dot{\bar{\xi}}$ tương ứng với tenxơ độ lệch $\dot{S}^{**}_{ij}$ và $\tilde{\xi}_{ij}$, còn $\dot{\sigma}^{**} = \dot{\sigma}^* + h\dot{\xi}$ trong đó $\dot{\xi} = \frac{1}{3}\,\xi_{ii}$. Tương tự ta có $\dot{\bar{\ni}}^{\circ\circ} = \dot{\bar{\ni}}^\circ + h\dot{\bar{\eta}}$, $\dot{\varepsilon}^{\circ\circ} = \dot{\varepsilon}^\circ + h\dot{\eta}$.

Theo (1.1') và (1.2') ta có

$$\dot{\bar{\text{Э}}}^{**} = \dot{\bar{\text{Э}}}^{*} + h\left[\frac{1}{k(S)\sigma_u}\dot{\bar{\xi}}^{*} + \left(\frac{1}{\Phi'(S)} - \frac{1}{k(S)\sigma_u}\right)\frac{\bar{\sigma}\,\dot{\bar{\xi}}}{\sigma_u^2}\,\bar{\sigma}\right],$$

$$\dot{\bar{\sigma}}^{\circ\circ} = \dot{\bar{\sigma}}^{\circ} + h\left[k(S)\sigma_u\dot{\bar{\eta}} + (\Phi'(S) - k(S)\sigma_u)\,\frac{\bar{\sigma}\,\dot{\bar{\eta}}}{\sigma_u^2}\,\bar{\sigma}\right].$$

Đặt các biểu thức này vào (3.9) ta nhận được

$$DI = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\dot{\sigma}_{ij}^{**}\dot{\varepsilon}_{ij}^{**} + \frac{1}{2}\dot{\sigma}_{ij}^{\circ\circ}\dot{\varepsilon}_{ij}^{\circ\circ} - \dot{\sigma}_{ij}^{**}\dot{\varepsilon}_{ij}^{\circ\circ}\right)d\Omega - \right.$$

$$\left. - \int_\Omega\left(\frac{1}{2}\dot{\sigma}_{ij}^{*}\dot{\varepsilon}_{ij}^{*} + \frac{1}{2}\dot{\sigma}_{ij}^{\circ}\dot{\varepsilon}_{ij}^{\circ} - \dot{\sigma}_{ij}^{*}\dot{\varepsilon}_{ij}^{\circ}\right)d\Omega\right\} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left\{\int_\Omega\left[\frac{1}{2}.(\dot{\bar{\sigma}}^{**}\dot{\bar{\text{Э}}}^{**} + 3\dot{\sigma}^{**}\dot{\varepsilon}^{**} - \dot{\bar{\sigma}}^{*}\dot{\bar{\text{Э}}}^{*} - 3\dot{\sigma}^{*}\dot{\varepsilon}^{*}) + \frac{1}{2}(\dot{\bar{\sigma}}^{\circ\circ}\dot{\bar{\text{Э}}}^{\circ\circ} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + 3\dot{\sigma}^{\circ\circ}\dot{\varepsilon}^{\circ\circ} - \dot{\bar{\sigma}}^{\circ}\dot{\bar{\text{Э}}}^{\circ} - 3\dot{\sigma}^{\circ}\dot{\varepsilon}^{\circ}) - (\dot{\bar{\sigma}}^{**}\dot{\bar{\text{Э}}}^{\circ\circ} + 3\dot{\sigma}^{**}\dot{\varepsilon}^{\circ\circ} - \dot{\bar{\sigma}}^{*}\dot{\bar{\text{Э}}}^{\circ} - 3\dot{\sigma}^{*}\dot{\varepsilon}^{\circ})\right]d\Omega\right\} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\int_\Omega\left\{\frac{1}{2}\left[2h\,\dot{\bar{\text{Э}}}^{*}\dot{\bar{\xi}}^{(1)} + \right.\right.\right.$$

$$+ h^2\left(\frac{1}{k(S)\sigma_u}\dot{\bar{\xi}} + \left[\frac{1}{\Phi'(S)} - \frac{1}{k(S)\sigma_u}\right]\frac{\bar{\sigma}\,\dot{\bar{\xi}}}{\sigma_u^2}\,\bar{\sigma}\right)\dot{\bar{\xi}} + 2h3\dot{\varepsilon}^{*}\dot{\xi} + h^2\frac{\dot{\xi}^2}{K}\Big] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[2h\dot{\bar{\sigma}}^{\circ}\dot{\bar{\eta}} + h^2\left(k(S)\sigma_u\dot{\bar{\eta}} + [\Phi'(S) - k(S)\sigma_u]\frac{\bar{\sigma}\,\dot{\bar{\eta}}}{\sigma_u^2}\,\bar{\sigma}\right)\dot{\bar{\eta}} + \right.$$

$$\left.\left.\left. + 2h3\dot{\sigma}^{\circ}\dot{\eta} + 9Kh^2\dot{\eta}^2\right] - [h(\dot{\bar{\sigma}}^{*}\dot{\bar{\eta}} + 3\dot{\sigma}^{*}\dot{\eta}) + h(\dot{\bar{\text{Э}}}^{\circ}\dot{\bar{\xi}} + 3\dot{\varepsilon}^{\circ}\dot{\xi}) + h^2(\dot{\bar{\xi}}\dot{\bar{\eta}} + 3\dot{\xi}\dot{\eta})]\right\}d\Omega\right\}.$$

Cho $h \to 0$ tất cả các số hạng chứa h^2 dần tới không, vì vậy

$$DI = \int_\Omega[(\dot{\bar{\text{Э}}}^{*}\dot{\bar{\xi}} + 3\dot{\varepsilon}^{*}\dot{\xi}) - (\dot{\bar{\text{Э}}}^{\circ}\dot{\bar{\xi}} + 3\dot{\varepsilon}^{\circ}\dot{\xi}) + (\dot{\bar{\sigma}}^{\circ}\dot{\bar{\eta}} + 3\dot{\sigma}^{\circ}\dot{\eta}) - (\dot{\bar{\sigma}}^{*}\dot{\bar{\eta}} + 3\dot{\sigma}^{*}\dot{\eta})]d\Omega =$$

$$= \int_\Omega(\dot{\varepsilon}_{ij}^{*}\dot{\xi}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^{\circ}\dot{\xi}_{ij} + \dot{\sigma}_{ij}^{\circ}\dot{\eta}_{ij} - \dot{\sigma}_{ij}^{*}\dot{\eta}_{ij})d\Omega = \int_\Omega\{(\dot{\varepsilon}_{ij}[\dot{\sigma}_{mn}^{*}] - \dot{\varepsilon}_{ij}^{\circ})\dot{\xi}_{ij} +$$

$$+ (\dot{\sigma}_{ij}[\dot{\varepsilon}_{mn}^{\circ}] - \dot{\sigma}_{ij}^{*})\dot{\eta}_{ij}\}d\Omega. \qquad (3.10)$$

Khi cố định tốc độ thay đổi ứng suất khả dĩ tĩnh học ($\dot{\xi}_{ij} = 0$), theo điều kiện đạt cận dưới từ (3.10) suy ra được hệ thức (2.4)

---

(1) Ta có $\left[\frac{1}{k(S)\sigma_u}\dot{\bar{\xi}} + \left(\frac{1}{\Phi'(S)} - \frac{1}{k(S)\sigma_u}\right)\frac{\bar{\sigma}\,\dot{\bar{\xi}}}{\sigma_u^2}\,\bar{\sigma}\right]\dot{\bar{\sigma}}^{*} = \dot{\bar{\text{Э}}}^{*}\dot{\bar{\xi}}$

3) Phiếm hàm (1.9) tăng,

: là

$$I(\sigma^*_{ij}, \varepsilon^\circ_{ij}) \to \infty \text{ khi } \| \sigma^*_{ij} \| + \| \varepsilon^\circ_{ij} \| \to \infty$$

$$I(\dot\sigma^*_{ij}, \dot\varepsilon^\circ_{ij}) = I(\underline{\sigma}^*_{ij} + \dot\Sigma^*_{ij}, \underline{\varepsilon}^\circ_{ij} + \dot e^\circ_{ij}) \to \infty$$

i $\| \dot\Sigma^*_{ij} \| + \| \dot e^\circ_{ij} \| \to \infty$

có

$(\underline{\sigma}^*_{ij} + \dot\Sigma^*_{ij}, \underline{\varepsilon}^\circ_{ij} + \dot e^\circ_{ij}) = I_1(\underline{\sigma}^*_{ij} + \dot\Sigma^*_{ij}) + I_2(\underline{\varepsilon}^\circ_{ij} + \dot e^\circ_{ij}) - (\underline{\sigma}^*_{ij} + \dot\Sigma^*_{ij}, \underline{\varepsilon}^\circ_{ij} + \dot e^\circ_{ij})_{L_2}$

I_2 là các dạng toàn phương xác định dương đối với σ^*_{ij} và ε°_{ij}, vì vậy chúng chứa các hạng là dạng toàn phương xác định dương đối với $\dot\Sigma^*_{ij}$, $\dot e^\circ_{ij}$, các số hạng còn lại hoặc là u thức tuyến tính đối với $\dot\Sigma^*_{ij}$, $\dot e^\circ_{ij}$, hoặc không đổi.

Ta xét

$(\underline{\sigma}^*_{ij} + \dot\Sigma^*_{ij}, \underline{\varepsilon}^\circ_{ij} + \dot e^\circ_{ij})_{L_2} = -[(\underline{\sigma}^*_{ij}, \underline{\varepsilon}^\circ_{ij})_{L_2} + (\dot\Sigma^*_{ij}, \underline{\varepsilon}^\circ_{ij})_{L_2} + (\underline{\sigma}^*_{ij}, \dot e^\circ_{ij})_{L_2} + (\dot\Sigma^*_{ij}, \dot e^\circ_{ij})_{L_2}]$

hạng sau cùng bằng không, vì $\dot\Sigma^*_{ij}, \dot e^\circ_{ij}$ là các trường khả dĩ, thỏa mãn phương trình cân ng và điều kiện biên thuần nhất (xem (3.8)); các số hạng còn lại tuyến tính đối với $_{ij}$ và $\dot e^\circ_{ij}$.

Vì vậy $I(\sigma^*_{ij}, \varepsilon^\circ_{ij})$ dẫn tới vô cùng, nếu $\| \dot\Sigma^*_{ij} \| + \| \dot e^\circ_{ij} \|$ dẫn tới vô cùng, tức là $\sigma^*_{ij}, \dot e^\circ_{ij})$ là phiếm hàm tăng.

Tóm lại $I(\dot\Sigma^*_{ij}, \dot e^\circ_{ij})$ xác định trong không gian Hinbe $\Sigma^* \times E^\circ \subset L_2 \times L_2$ có tính n tục, lồi tuyệt đối, tăng và có vi phân tuyến tính theo Gatô.

Khi đó theo Vainbec [11] có thể suy ra những điều sau đây:

1. Với mọi $\dot\Sigma^*_{ij} \in \Sigma^*$ cố định, tồn tại phần tử $e^{\circ\circ}_{ij}[\dot\Sigma^*_{ij}]$ của không gian E°, tại đó t cận dưới

$$I(\dot\Sigma^*_{ij}, e^{\circ\circ}_{ij}[\dot\Sigma^*_{ij}]) = \inf_{\varepsilon^\circ_{ij} \in E^\circ_1} I(\sigma^*_{ij}, \varepsilon^\circ_{ij}).$$

2. Với mọi $\dot e^\circ_{ij} \in E^\circ$ cố định, tồn tại phần tử $\dot\Sigma^{**}_{ij}[\dot e_{ij}]$ của không gian Σ^*, tại đạt cận dưới

$$I(\dot\Sigma^{**}_{ij}[e^\circ_{ij}], e^\circ_{ij}) = \inf_{\sigma^*_{ij} \in \Sigma^*_1} I(\dot\sigma^*_{ij}, \varepsilon^\circ_{ij})$$

3. Tồn tại phần tử $\dot{\Sigma}^m_{ij}$, $\dot{e}^m_{ij}$ của không gian $\Sigma^* \times E^o$, tại đó đạt cận dưới

$$I(\dot{\Sigma}^m_{ij}, \dot{e}^m_{ij}) = \inf_{\substack{\dot{\sigma}^*_{ij} \in \Sigma^*_1 \\ \dot{e}^o_{ij} \in E^o_1}} I(\dot{\sigma}^*_{ij}, \dot{e}^o_{ij})$$

và trong mỗi trường hợp cận dưới đạt được ở điểm duy nhất.

Đối với phiếm hàm lồi, vi phân được theo Gatô, điều kiện cần và đủ để đạt được cận dưới là vi phân của nó bằng không.

Trên đây ta đã chứng minh sự tồn tại nghiệm của bài toán biên lý thuyết dẻo các quá trình biến dạng có độ cong trung bình bằng sự tồn tại cận dưới của phiếm hàm năng lượng I.

Địa chỉ :
Trường Đại học Tổng hợp Hà nội

Nhận ngày 16-6-1982

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. CLAES JOHNSON. Existence theorems for plasticity problems. J. Math. pures et appliqeés, v. 55, No. 4, 1976.
2. КОЙТЕР В. Т. Общие теоремы теории упруго-пластических сред. ИЛ. 1961.
3. КАМЕНЯРЖ Я. А. О существовании поля скоростей изменения напряжений в упрочняющейся упруго-пластической среде. ПММ, Т. 38, № 6, 1974.
4. УМАНСКИЙ С. Э. О сходимости метода переменных параметров упругости. ПММ, Т.44, № 3, 1980.
5. ВОРОВИЧ И. И., КРАСОВСКИЙ Ю. П. О методе упругих решений. ДАН, СССР, Т. 126, № 4, 1959.
6. БЫКОВ Д. Л., ШАЧНЕВ В. А. Об одном обобщении метода упругих решений. ПММ, Т. 33, № 2, 1969.
7. БРОВКО Г. Л. Анализ постановки и метода решения краевых задач теории упруго-пластических процессов малой кривизны. Автореферат канд. дисс. 1977.
8. НЕДЖЕСКУ-КЛЕЖА С. О теореме существования для упруго-пластических процессов с точкой излома. МГУ, 1976.
9. ДАО ЗУЙ БИК. Модификация соотношений упруго-пластических процессов средней кривизны. Вестник МГУ, № 5, 1981.
10. ДАО ЗУЙ БИК. Минимальные принципы для теории пластичности с использованием гипотезы локальной определенности. Вестник МГУ, (в печати).
11. ВАЙНБЕРГ М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов. М., 1972.

РЕЗЮМЕ

О ТЕОРЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ

В статье рассмотрены доказательство теоремы существования решения краевой задачи теории упруго-пластических процессов деформирования средней кривизны в поле непрерывных возможных скоростей и обобщение доказательства в пополненном множестве возможных полей.