Tạp chí Cơ Học T. V, 1983, số 3 (trang 3 – 7)

VỀ CÁC HỆ CƠ HỌC BẢO TOÀN CÓ CHỨA TỌA ĐỘ ẨN SUY RỘNG

NGUYỄN ĐÔNG ANH

Trong cơ học giải tích các phương trình chuẩn tắc Hamilton đã cho phép viết phương trình chuyển động ở dạng rất cô đọng và khó khăn cơ bản đưa về việc giải phương trình Hamilton–Jacobi. Phương pháp quen thuộc là phương pháp tách biến. Đã tìm được trường hợp tổng quát của các hệ cơ học chịu tách biến và các hệ này có rất nhiều ứng dụng trong thực tế. Tuy nhiên dễ dàng nhận thấy rằng các hệ cơ học chịu tách biến không thể bao gồm tất cả các hệ cơ học gặp trong kỹ thuật và nghiên cứu. Vấn đề đặt ra là cần đề nghị phương pháp giải phương trình Hamilton–Jacobi ứng với các hệ cơ học này. Một trong các hướng mở rộng phương pháp tách biến là phương pháp khai triển theo tọa độ ẩn suy rộng trong đó các biến không tách nhau hoàn toàn mà liên hệ với nhau theo một quan hệ nào đấy [1]. Trong bài báo này đề nghị áp dụng phương pháp khai triển theo tọa độ ẩn suy rộng để giải phương trình Hamilton – Jacobi. Để làm ví dụ đã xét chuyển động của thanh trong mặt phẳng quay, trong đó các biến không tách nhau.

§ 1. HỆ CƠ HỌC CHỨA MỘT TỌA ĐỘ ẨN SUY RỘNG

Ta xét hệ cơ học hôlônôm bảo toàn trong không gian tọa độ pha $(q_1, \dots, q_{n+1}$ $p_1, \dots, p_{n+1})$ được đặc trưng bởi hàm Hamilton sau

$$H(t, q_1, \dots, q_{n+1}, p_1, \dots, p_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} A_j(t, q_1, \dots, q_{n+1})p_j^2 + A_o(t, q_1, \dots, q_{n+1}). \quad (1.1)$$

Ta giả thiết rằng đối với hệ cơ học đang xét này tọa độ q_{n+1} là tọa độ ẩn suy rộng cấp hai (xem [1]) và các hàm A_j, A_o có khai triển sau

$$A_j = b_j(t, q_1, \dots, q_n), \quad (1.2)$$
$$A_o = C_o(t, q_1, \dots, q_n)q_{n+1}^2 + a_o(t, q_1, \dots, q_n)q_{n+1} + b_o(t, q_1, \dots, q_n), \quad j = 1, 2, \dots, n+1.$$

Phương trình Hamilton – Jacobi tương ứng sẽ là

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n+1} b_j(t, q_1, \dots, q_n)\left(\frac{\partial S}{\partial q_j}\right)^2 + C_o(t, q_1, \dots, q_n)q_{n+1}^2 +$$
$$+ a_o(t, q_1, \dots, q_n)q_{n+1} + b_o(t, q_1, \dots, q_n) = 0 \quad (1.3)$$

Nghiệm ta tìm ở dạng khai triển theo tọa độ ẩn suy rộng và trong bài báo này chỉ dừng ở khai triển cấp hai

$$S(t, q_1, \dots, q_{n+1}) = \varphi_o(t, q_1, \dots, q_n) + \varphi_1(t, q_1, \dots, q_n)q_{n+1} +$$
$$+ \varphi_2(t, q_1, \dots, q_n)q_{n+1}^2. \quad (1.4)$$

Thay (1.4) vào (1.3) và so sánh các hệ số tương ứng ta có

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + 4b_{n+1}\varphi_2^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i}\right)^2 + C_o = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + 4\varphi_2 b_{n+1}\varphi_1 + \sum_{i=1}^{n} 2b_i \frac{\partial \varphi_o}{\partial q_i}\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_i} + a_o = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_o}{qt} + b_{n+1}\varphi_1^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\frac{\partial \varphi_o}{\partial q_i}\right)^2 + b_o = 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_i} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Điều kiện tương thích của hệ (1.5) cho phép ta xác định các hệ cơ học thỏa mãn phương pháp khai triển trên và dễ dàng lập phương trình cho các hệ số b_j, a_o, b_o, C_o. Tuy nhiên trong thực tế xuất phát trực tiếp từ hệ (1.5) thường tiện lợi hơn. Đối với hệ cơ học một bậc tự do

$$b_i = 0,\ b_{n+1} = b(t),\ C_{n+1} = C(t),\quad a_o = a_o(t),$$
$$b_o = b_o(t),\qquad C_o = C_o(t),\quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.6}$$

hệ (1.5) sẽ có dạng

$$\frac{d\varphi_2}{dt} + 4b(t)\varphi_2^2(t) \qquad = - C_o(t),$$
$$\frac{d\varphi_1}{dt} + 4b(t)\varphi_2(t)\varphi_1(t) = - a_o(t), \tag{1.7}$$
$$\frac{d\varphi_o}{dt} = - b(t)\,\varphi_1^2(t) - b_o(t)$$

và luôn luôn tương thích.

§ 2. HỆ CƠ HỌC CHỨA HAI TỌA ĐỘ ẨN SUY RỘNG

Ta xét hệ cơ học bảo toàn hôlônôm trong không gian tọa độ pha (x, y, $q_1, \ldots, q_n, p_x, p_y, p_1, \ldots, p_n$) được đặc trưng bởi hàm Hamilton sau

$$H(x,\ y,\ q_1, \ldots, q_n, p_x, p_y, p_1, \ldots, p_n) =$$
$$\alpha p_x^2 + \beta p_y^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i^2 + Q(q_1, \ldots, q_n, x, y), \tag{2.1}$$

trong đó α, β, α_i là các hằng dương. Ta sẽ giả thiết rằng x, y là các tọa độ ẩn suy rộng và Q có dạng

$$Q = \sum_{s=-2}^{M} \left[\sum_{i,\,j=0}^{i+j=s} \gamma_{ij}(q_1, \ldots, q_n)x^i x^j \right], \tag{2.2}$$

Phương trình Hamilton–Jacobi tương ứng sẽ là ($h = \text{const}$)

$$\alpha\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \beta\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)^2 +$$

$$+ \sum_{s=0}^{M}\left[\sum_{k,\,j=0}^{k+j=s} \gamma_{kj}(q_1,\ldots,q_n)x^k y^j\right] = h \tag{2.3}$$

Ta dùng phép thế biến

$$x = R\cos\varphi,\ y = -\omega R\sin\varphi,\ q_i = q_i, \tag{2.4}$$

trong đó

$$\omega^2 = \beta/\alpha. \tag{2.5}$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial x} &= \frac{\partial W}{\partial R}\cos\varphi - \frac{\partial W}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{R},\\ \frac{\partial W}{\partial y} &= -\frac{\partial W}{\partial R}\frac{\sin\varphi}{\omega} - \frac{\partial W}{\partial \varphi}\frac{\cos\varphi}{R\omega}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Thay vào phương trình Hamilton–Jacobi ta thu được

$$\left(\frac{\partial W}{\partial R}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2\cdot\frac{1}{R^2} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)^2 +$$

$$+ \sum_{s=-2}^{M} \beta_s(q_1,\ldots,q_n,\varphi)R^s = h, \tag{2.7}$$

với

$$\beta_s(q_1,\ldots,q_n,\varphi) = \sum_{k,\,j=0}^{k+j=s} \gamma_{kj}(q_1,\ldots,q_n)\cos^k\varphi\,[-\sqrt{\beta/\alpha}\,\sin\varphi]^j. \tag{2.8}$$

Nghiệm tìm ở dạng

$$W(R,\varphi,q_1,\ldots,q_n) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu_i(q_1,\ldots,q_n,\varphi)R^i \tag{2.9}$$

trong đó $\mu_i(q_1,\ldots,q_n,\varphi)$ là các hệ số chưa biết. Thay (2.9) vào (2.7) ta thu được hệ phương trình sau :

$$R^{-2} : \left(\frac{\partial\mu_o}{\partial\varphi}\right)^2 + \beta_{-2} = 0,$$

$$R^{-1} : 2\frac{\partial\mu_1}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\mu_o}{\partial\varphi} + \beta_{-1} = 0,$$

$$R^o : \left(\frac{\partial\mu_1}{\partial\varphi}\right)^2 + \mu_1 + \sum_{\gamma=1}^{n}\alpha_\gamma\left(\frac{\partial\mu_o}{\partial q_\gamma}\right)^2 + \beta_o = h,$$

$$R^1 \ : 2\frac{\partial\mu_1}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\mu_2}{\partial\varphi} + 4\mu_1\mu_2 + \sum_{\gamma=1}^{n} 2\alpha_\gamma \frac{\partial\mu_o}{\partial q_\gamma}\cdot\frac{\partial\mu_1}{\partial q_\gamma} + \beta_1 = 0,$$

$$R^2 \ : 2\frac{\partial\mu_1}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\mu_3}{\partial\varphi} + 6\mu_1\mu_3 + 4\mu_2^2 + \left(\frac{\partial\mu_2}{\partial\varphi}\right)^2 +$$

$$+\sum_{\gamma=1}^{n}\alpha_\gamma\left[2\frac{\partial\mu_o}{\partial q_\gamma}\cdot\frac{\partial\mu_2}{\partial q_\gamma} + \left(\frac{\partial\mu_1}{\partial q_\gamma}\right)^2\right] + \beta_2 = 0$$

. . . .

$$R^m \ : \sum_{i,j=0}^{i+j=m+2} ij\mu_i\mu_j + \sum_{i,j=0}^{i+j=m+2}\frac{\partial\mu_i}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\mu_j}{\partial\varphi} +$$

$$+\sum_{i,j=0}^{i+j=m}\sum_{\gamma=1}^{n}\alpha_\gamma\frac{\partial\mu_i}{\partial q_\gamma}\frac{\partial\mu_j}{\partial q_\gamma} + \beta_m = 0,$$

$$m = 1, 2, \ldots$$

$$\beta_m = 0 \text{ khi } m > M. \tag{2.10}$$

Như vậy ta đã lập được hệ phương trình cho các hệ số chưa biết μ_i, các phương trình này là tách nhau và cho phép xác định tuần tự tất cả μ_i. Có thể chỉ ra trường hợp khi hệ (2.10) cho nghiệm ngắt đuôi dạng

$$W(R,\varphi,q_1,\ldots,q_n) = \sum_{i=0}^{m}\mu_i(q_1,\ldots,q_n,\varphi)R^i.$$

§ 3. VÍ DỤ

Ta xét chuyển động của thanh trong mặt phẳng quay [2]. Thanh chuyển động trong mặt phẳng tự quay với vận tốc góc ω quanh trục ngang thuộc mặt phẳng. Theo [2] hàm Hamilton sẽ là

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \frac{1}{k^2}p_2^2 + p_3^2\right) - \frac{1}{2}\omega^2 q_3^2 - g\sin\omega t q_3 - \frac{1}{2}k^2\omega^2\sin^2 q_2, \tag{3.1}$$

Ở đây ta có q_3 là tọa độ ẩn. Hệ phương trình (1.5) sẽ là

$$\frac{d\varphi_2}{dt} + 2\varphi_2^2(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} + \frac{1}{2k^2}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} - \frac{\omega^2}{2} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + 2\varphi_2\varphi_1 + \frac{\partial\varphi_o}{\partial q_1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1} + \frac{1}{2k^2}\frac{\partial\varphi_o}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2} - g\sin\omega t = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi_o}{\partial t} + \frac{1}{2}\varphi_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_o}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{2k^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right)^2 - \frac{k^2\omega^2}{2}\sin q_2 = 0. \tag{3.2}$$

Tích phân hệ (3.2) ta thu được

$$\varphi_2 = \frac{\omega}{2},\ \varphi_1 = \lambda_1 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega}(\sin\omega t - \cos\omega t),$$

$$\varphi_0 = -\frac{1}{2}\int_0^t \left[\lambda_1 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega}(\sin\omega t - \cos\omega t)\right]^2 dt + \lambda_2 q_1 +$$

$$+ k\int_0^{q_2} \sqrt{\lambda_3^2 + k^2\omega^2\sin^2 q_2}\, dq_2 + \frac{1}{2}(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\, t. \qquad (3.3)$$

Thay (3.3) vào (1.4) ta được nghiệm của phương trình Hamilton – Jacobi (1.3) là

$$S = \frac{1}{2}\omega q_3^2 + \left[\lambda_1 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega}(\sin\omega t - \cos\omega t)\right] q_3 + \frac{1}{2}(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\, t -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^t \left[\lambda_1 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega}(\sin\omega t - \cos\omega t)\right]^2 dt + \lambda_2 q_1 +$$

$$+ k\int_0^{q_2} \sqrt{\lambda_3^2 + k^2\omega^2\sin^2 q_2}\, dq_2. \qquad (3.4)$$

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3 = \text{const}.$$

Kết quả này đã nhận được trong [2] bằng phương pháp khác. Ta chú ý rằng trong (3.4) các tọa độ q_1, q_2, q_3 liên hệ với nhau phức tạp hơn quan hệ tách biến

Địa chỉ
Viện Cơ học, Viện KHVN

Nhận ngày 15-11-1982

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. NGUYỄN ĐÔNG ANH. Khảo sát phương trình FPK bằng phương pháp khai triển theo tọa độ ẩn suy rộng. TC Cơ học, số 3 – 4, 1979.
2. PARS. Động lực học giải tích (tiếng Nga) M., 1973.

РЕЗЮМЕ

О КОНСЕРВАТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ, СОДЕРЖАЩИХ ОБОБЩЕННЫЕ ЦИКЛИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

В работе предлагается метод решения уравнений Гамильтона Якоби для механических консервативных систем, содержащих обобщенные циклические координаты.