Tạp chí Cơ học T.V, 1983, số 1 (trang 22 – 29)

MỞ RỘNG ĐỊNH LÝ LEVI-SIVITA CHO CÁC PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC POANGCARE-TRETAEV

PHẠM HUYỄN

Trong [1] Levi – Sivita phát biểu định lý theo đó có thể tìm được họ các nghiệm riêng của phương trình chính tắc Hamintơn của các hệ hôlônôm. Định lý này đã được mở rộng cho các hệ gyrôscôpic hôlônôm trong [2]. Chúng tôi muốn phát triển định lý cho hệ các phương trình chính tắc Poangcarê – Trêtaep áp dụng được cho cả các hệ không hôlônôm.

§ 1.

Xét hệ cơ học xác định trong các biến $x_1, x_2 \dots x_n$ với các liên kết.

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dot{x}_j + a_i = 0 \quad (i = l+1, \dots, n), \tag{1.1}$$

trong đó có thể có $k - l \geqslant 0$ liên kết không hôlônôm $\eta_\nu = 0$ $(\nu = l+1, \dots, k)$.

Giả thử các lực tác dụng có hàm lực U, ta có các phương trình chính tắc Poăngcare – Trêtaep dưới dạng

$$\frac{dy_\alpha}{dt} = -X_\alpha H + \sum_{\beta=1}^{l}\left(C_{o\alpha\beta} + \sum_{S=1}^{l}\frac{\partial H}{\partial y_s}C_{s\alpha\beta}\right)y_\beta + \tag{1.2}$$

$$+ \sum_{\nu=l+1}^{k}\left(C_{o\alpha\nu} + \sum_{S=1}^{l}\frac{\partial H}{\partial y_S}C_{S\alpha\nu}\right)y_\nu^\circ;$$

$$\frac{dx_i}{dt} - X_o x_i + \sum_{\alpha=1}^{l}\frac{\partial H}{\partial y_\alpha}X_\alpha x_i; \quad (\alpha = 1, \dots, l;\ i = 1, \dots, n),$$

trong đó $H = T - U$ là hàm Hamintơn, $y_\alpha = \dfrac{\partial T}{\partial \eta_\alpha}$ – các xung tương ứng với tham số chuyển động thực η_α, còn $y_\nu^\circ = \dfrac{\partial T^\circ}{\partial \eta_\nu}$, T° động năng của hệ hôlômôm tương ứng [3].

Không mất tính tổng quát, ta giả thử xét trường hợp $C_{\circ\alpha\beta} = 0$, $C_{\circ\alpha\nu} = 0$.

Khi đó, hàm $f(x_i, y_\alpha)$ không phụ thuộc t sẽ được gọi là hệ thức bất biến đối với các phương trình chính tắc (1.2), nếu đạo hàm toàn phần theo t của hàm dựa theo (1.2) bằng không cùng với hàm đó, tức là $f = 0$ thì

$$\frac{df}{dt} \equiv \sum_{\alpha=1}^{l} \frac{\partial H}{\partial y_\alpha} X_\alpha f + \sum_{\alpha=1}^{l} \dot{y}_\alpha \frac{\partial f}{\partial y_\alpha} = \tag{1.3}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{l}\left(\frac{\partial H}{\partial y_\alpha} X_\alpha f - X_\alpha H \frac{\partial f}{\partial y_\alpha}\right) + \sum_{\alpha,\beta=1}^{l} \frac{\partial H}{\partial y_\alpha}\frac{\partial f}{\partial y_\beta}\left(\sum_{S=1}^{l} C_{\alpha\beta S}\, y_S + \sum_{\nu=l+1}^{k} C_{\alpha\beta\nu}\, y_\nu^\circ\right) = 0$$

Hai hàm $f_u(x_i, y_\alpha)$, $f_v(x_i, y_\alpha)$ được gọi là đối hợp nhau, nếu chúng có các hệ thức

$$\sum_{\alpha=1}^{l}\left(\frac{\partial f_u}{\partial y_\alpha} X_\alpha f_v - \frac{\partial f_v}{\partial y_\alpha} X_\alpha f_u\right) + \tag{1.4}$$

$$+ \sum_{\alpha,\beta=1}^{l} \frac{\partial f_u}{\partial y_\alpha}\frac{\partial f_v}{\partial y_\beta}\left(\sum_{S=1}^{l} C_{\alpha\beta S}\, y_S + \sum_{\nu=l+1}^{k} C_{\alpha\beta\nu}\, y_\nu^\circ\right) = 0$$

Theo (1.3) ta thấy, mọi tích phân đầu của hệ đều là hệ thức bất biến và là hàm đối hợp của hàm Hamintơn.

Ta có định lý Levi – Sivita mở rộng sau : *Nếu các phương trình chính tắc (1.2) có m hệ thức bất biến (hay tích phân đầu) đối hợp nhau và có thể giải được cho m biến $y_1, \ldots, y_m$, thì (1.2) còn có thể có $k + l - 2m$ hệ thức bất biến nữa. Nếu các hệ thức bất biến mới tìm được này giải được cho các $y_{m+1}, \ldots, y_l$ còn lại và một số biến x_i nào đó, thì bài toán tích phân hệ (1.2) được đưa về bài toán tích phân hệ phương trình vi phân của số biến x_i còn lại. Nếu trong số các hệ thức bất biến có các tích phân đầu, thì nghiệm của hệ phương trình vi phân này chứa cả các hằng số của các tích phân đầu đó.*

Thực vậy, giả thử có m hệ thức bất biến thỏa mãn điều kiện định lý, mà sau khi giải cho m biến $y_1, \ldots, y_m$ ta đưa được về dạng

$$f_u' = y_u - \varphi_u(x_1, \ldots, x_n;\ y_{m+1}, \ldots, y_l) = 0, \quad (u = 1, \ldots, m) \tag{1.5}$$

Điều kiện bất biến và đối hợp cho ta các hệ thức :

$$X_u H + \sum_{S=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial y_S} X_S \varphi_u + \sum_{j=m+1}^{l}\left(\frac{\partial H}{\partial y_j} X_j \varphi_u - \frac{\partial \varphi_u}{\partial y_j} X_j H\right) -$$

$$- \sum_{S=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial y_S}\left[\sum_{\beta=1}^{l} C_{Su\beta}\, y_\beta + \sum_{\nu=l+1}^{k} C_{Su\nu}\, y_\nu^\circ - \sum_{j=m+1}^{l} \frac{\partial \varphi_u}{\partial y_j}\left(\sum_{\beta=1}^{l} C_{Sj\beta}\, y_\beta + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{\nu=l+1}^{k} C_{Sj\nu}\, y_\nu^\circ\right)\right] - \sum_{i=m+1}^{l} \frac{\partial H}{\partial y_i}\left[\sum_{\beta=1}^{l} C_{iu\beta}\, y_\beta + \sum_{\nu=l+1}^{k} C_{iu\nu}\, y_\nu^\circ - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=m+1}^{l} \frac{\partial \varphi_u}{\partial y_j}\left(\sum_{\beta=1}^{l} C_{ij\beta}\, y_\beta + \sum_{\nu=l+1}^{k} C_{ij\nu}\, y_\nu^\circ\right)\right] = 0, \quad (u = 1, \ldots, m) \tag{1.6}$$

$$X_v \varphi_u - X_u \varphi_v + \sum_{i=m+1}^{l} \left(\frac{\partial \varphi_u}{\partial y_i} X_i \varphi_v - \frac{\partial \varphi_v}{\partial y_i} X_i \varphi_u \right) +$$

$$+ \sum_{S=1}^{l} C_{uvS}\, y_S + \sum_{\nu=l+1}^{k} C_{uv\nu} y_\nu^0 - \sum_{i=m+1}^{l} \frac{\partial \varphi_v}{\partial y_i} \left(\sum_{S=1}^{l} C_{uiS}\, y_S + \sum_{\nu=l+1}^{k} C_{ui\nu}\, y_\nu^0 \right) -$$

$$- \sum_{i=m+1}^{l} \frac{\partial \varphi_u}{\partial y_i} \left(\sum_{S=1}^{l} C_{ivS}\, y_S + \sum_{\nu=l+1}^{k} C_{iv\nu}\, y_\nu^0 \right) + \tag{1.7}$$

$$+ \sum_{i,j=m+1}^{l} \frac{\partial \varphi_u}{\partial y_i} \frac{\partial \varphi_v}{\partial y_j} \left(\sum_{S=1}^{l} C_{ijS}\, y_S + \sum_{\nu=l+1}^{k} C_{ij\nu}\, y_\nu^0 \right) = 0, \ (u, v = 1, \ldots, m)$$

Xét hàm K là biểu thức của hàm H khi thay (1.5) vào

$$K(x_1, \ldots, x_n ; y_{m+1}, \ldots, y_l) = H(x_1 \ldots, x_n ; \varphi_1, \ldots, \varphi_m ; y_{m+1}, \ldots, y_l) \tag{1.8}$$

ta được

$$X_u K = X_u H + \sum_{S=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial y_S} X_u \varphi_S ; \ X_j K = X_j H + \sum_{S=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial y_S} X_j \varphi_S ; \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial K}{\partial y_j} = \frac{\partial H}{\partial y_j} + \sum_{S=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial y_S} \frac{\partial \varphi_S}{\partial y_j} \ (u = 1, \ldots, m ; j = m + 1, \ldots, l)$$

Thay (1.9) vào (1.6) rồi tính đến điều kiện (1.7), ta biến đổi được (1.6) về dạng

$$X_u K + \sum_{j=m+1}^{l} \left(\frac{\partial K}{\partial y_j} X_j \varphi_u - \frac{\partial \varphi_u}{\partial y_j} X_j K \right) - \sum_{i=m+1}^{l} \frac{\partial K}{\partial y_i} \left[\sum_{\beta=1}^{l} C_{iu\beta}\, y_\beta + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=l+1}^{k} C_{iu\nu}\, y_\nu^0 - \sum_{j=m+1}^{l} \frac{\partial \varphi_u}{\partial y_j} \left(\sum_{\beta=1}^{l} C_{ij\beta}\, y_\beta + \sum_{\nu=l+1}^{k} C_{ij\nu}\, y_\nu^0 \right) \right] = 0, \tag{1.10}$$

$$(u = 1, \ldots, m)$$

Ta chứng minh, ngoài (1.5), các phương trình chính tắc còn có các hệ thức bất biến

$$\frac{\partial K}{\partial y_j} = 0, \ X_j K = 0, \ X_\nu K = 0, \ (j = m + 1, \ldots, l ; \nu = l + 1, \ldots, k) \tag{1.11}$$

Muốn vậy, lấy đạo hàm toàn phần theo t của $\frac{\partial K}{\partial y_j}$ theo phương trình chính tắc, **rồi thay (1.9) vào, ta được**

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial y_j}=\sum_{i=m+1}^{l}\left(\frac{\partial K}{\partial y_i}X_i\frac{\partial K}{\partial y_j}-\frac{\partial^2 K}{\partial y_i\partial y_j}X_iK\right)+$$

$$+\sum_{i,k=m+1}^{l}\frac{\partial K}{\partial y_k}\frac{\partial^2 K}{\partial y_i\partial y_j}\left(\sum_{i=1}^{l}C_{kis}y_s+\sum_{\nu=l+1}^{k}C_{ki\nu}y_\nu^\circ\right)+ \tag{1.12}$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial y_\alpha}\left\{X_\alpha\frac{\partial K}{\partial y_j}+\sum_{i=m+1}^{l}\frac{\partial^2 K}{\partial y_i\partial y_j}\left[\sum_{S=1}^{l}C_{\alpha is}y_s+\sum_{\nu=l+1}^{k}C_{\alpha i\nu}y_\nu^\circ-\right.\right.$$

$$\left.-\sum_{k=m+1}^{l}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_k}\left(\sum_{S=1}^{l}C_{kis}y_s+\sum_{\nu=l+1}^{k}C_{ki\nu}y_\nu^\circ\right)\right]-$$

$$\left.-\sum_{i=m+1}^{l}\left(\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_i}X_i\frac{\partial K}{\partial y_j}-\frac{\partial^2 K}{\partial y_i\partial y_j}X_i\varphi_\alpha\right)\right\},\ (j=m+1,\dots,l)$$

Đồng thời lấy đạo hàm riêng theo y_j của (1.10) rồi thay vào (1.12), ta được

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial y_j}=\sum_{i=m+1}^{l}\left(\frac{\partial K}{\partial y_i}X_i\frac{\partial K}{\partial y_j}-\frac{\partial^2 K}{\partial y_i\partial y_j}X_iK\right)+$$

$$+\sum_{i,k=m+1}^{l}\frac{\partial K}{\partial y_k}\frac{\partial^2 K}{\partial y_i\partial y_j}\left(\sum_{S=1}^{l}C_{kis}y_s+\sum_{\nu=l+1}^{k}C_{ki\nu}y_\nu^\circ\right)- \tag{1.13}$$

$$-\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial y_\alpha}\left\{\sum_{k=m+1}^{l}\left(\frac{\partial K}{\partial y_k}X_k\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_j}-\frac{\partial^2\varphi_\alpha}{\partial y_j\partial y_k}X_kK\right)-\right.$$

$$-\sum_{i=m+1}^{l}\frac{\partial K}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\sum_{\beta=1}^{l}C_{i\alpha\beta}y_\beta+\sum_{\nu=l+1}^{k}C_{i\alpha\nu}\frac{\partial y_\nu^\circ}{\partial y_j}-\sum_{k=m+1}^{l}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_k}\left(\sum_{\beta=1}^{l}C_{ik\beta}y_\beta+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sum_{\nu=l+1}^{k}C_{ik\nu}y_\nu^\circ\right)\right]\right\},\ (j=m+1,\dots,l)$$

Cũng vậy, áp lần lượt các toán tử X_j và X_ν vào hệ thức (1.10) rồi thay các biểu thức thu được vào các đạo hàm toàn phần theo t của X_jK và $X_\nu K$ từ (1.11), ta được

$$
\begin{aligned}
\frac{dX_jK}{dt} = {} & \sum_{i=m+1}^{l}\left(\frac{\partial K}{\partial y_i}X_iX_jK - \frac{\partial X_jK}{\partial y_i}X_iK\right) + \sum_{i,k=m+1}^{l}\frac{\partial K}{\partial y_i}\frac{\partial X_jK}{\partial y_k}\left(\sum_{S=1}^{l}C_{iks}y_s + \right. \\
& \left. + \sum_{\nu=l+1}^{k}C_{ik\nu}y_\nu^0\right) - \sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial y_\alpha}\left\{\sum_{i=m+1}^{l}\left(\frac{\partial K}{\partial y_i}X_iX_j\varphi_\alpha - \frac{\partial X_j\varphi_\alpha}{\partial y_i}X_iK\right) + \sum_{u=1}^{m}\left(C_{j\alpha u} - \right.\right. \\
& \left. - \sum_{i=m+1}^{l}C_{jiu}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_i}\right)X_uK + \sum_{k=m+1}^{l}\left(C_{j\alpha k} - \sum_{i=m+1}^{l}C_{jik}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_i}\right)X_kK + \sum_{\nu=l+1}^{k}\left(C_{j\alpha\nu} - \right. \\
& \left. - \sum_{i=m+1}^{l}C_{ji\nu}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_i}\right)X_\nu K + \sum_{i=m+1}^{l}\frac{\partial K}{\partial y_i}\left[\sum_{u=1}^{m}C_{jiu}X_u\varphi_\alpha + \sum_{k=m+1}^{l}C_{jik}X_k\varphi_\alpha - \right. \\
& - \sum_{\nu=l+1}^{k}C_{ju\nu}X_\nu\varphi_\alpha - X_j\left(\sum_{s=1}^{l}C_{i\alpha s}y_s + \sum_{\nu=l+1}^{k}C_{i\alpha\nu}y_\nu^0 - \sum_{k=m+1}^{l}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_k}\left(\sum_{s=1}^{l}C_{iks}y_s + \right.\right. \\
& \left.\left.\left.\left. + \sum_{\nu=l+1}^{k}C_{ik\nu}y_\nu^0\right)\right)\right]\right\}, \ (j = m+1, \ldots, l) \qquad (1.14
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dX_\nu K}{dt} = {} & \sum_{i=m+1}^{l}\left(\frac{\partial K}{\partial y_i}X_iX_\nu K - \frac{\partial X_\nu K}{\partial y_i}X_iK\right) + \sum_{i,k=m+1}^{l}\frac{\partial K}{\partial y_i}\frac{\partial X_jK}{\partial y_k}\left(\sum_{s=1}^{l}C_{iks}y_s + \right. \\
& \left. + \sum_{\nu=l+1}^{k}C_{ik\nu}y_\nu^0\right) - \sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial H}{\partial y_\alpha}\left\{\sum_{i=m+1}^{l}\left(\frac{\partial K}{\partial y_i}X_iX_\nu\varphi_\alpha - \frac{\partial X_\nu\varphi_\alpha}{\partial y_i}X_iK\right) + \sum_{u=1}^{m}\left(C_{\nu\alpha u} - \right.\right. \\
& \left. - \sum_{i=m+1}^{l}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_i}C_{jiu}\right)X_uK + \sum_{k=m+1}^{l}\left(C_{\nu\alpha k} - \sum_{i=m+1}^{l}C_{\nu ik}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_i}\right)X_kK + \sum_{\mu=l+1}^{k}\left(C_{\nu\alpha\mu} - \right. \\
& \left. - \sum_{i=m+1}^{l}C_{\nu i\mu}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_i}\right)X_\mu K + \sum_{i=m+1}^{l}\frac{\partial K}{\partial y_i}\left[\sum_{u=1}^{m}C_{\nu iu}X_u\varphi_\alpha + \sum_{k=m+1}^{l}C_{\nu ik}X_k\varphi_\alpha - \right. \\
& - \sum_{\mu=l+1}^{k}C_{\nu i\mu}X_\mu\varphi_\alpha - X_\nu\left(\sum_{s=1}^{l}C_{i\alpha s}y_s + \sum_{\mu=l+1}^{k}C_{i\alpha\mu}y_\mu^0 - \sum_{k=m+1}^{l}\frac{\partial\varphi_\alpha}{\partial y_k}\left(\sum_{s=1}^{l}C_{iks}y_s + \right.\right. \\
& \left.\left.\left.\left. + \sum_{\mu=l+1}^{k}C_{ik\mu}y_\mu^0\right)\right)\right]\right\} \ (\nu = l+1, \ldots, k)
\end{aligned}
$$

Các biểu thức (1.13) và (1.14) chứng tỏ vế phải của chúng bằng không cùng với (1.5) và (1.11) tức theo định lý Levi–Sivita ta còn có $k + l - 2m$ bất biến (1.11) nữa.

Để chứng minh có thể đưa bài toán tích phân hệ phương trình chính tắc về hệ phương trình với số biến ít hơn, ta chú ý rằng K là dạng toàn phương xác định dương của $y_{m+1}, \ldots, y_l$, nên các phương trình tuyến tính $\frac{\partial K}{\partial y_j} = 0$ giải được cho các biến đó. Đem thay các biểu thức của $y_1, \ldots, y_l$ vào các hệ thức còn lại của (1.11), ta được một số hệ thức giữa các biến x_i, mà theo định lý Levi–Sivita, chúng giải được cho một số, giả thử cho n-p biến cuối cùng. Khi đó ta được

$$y_s = y_s(x_1, \ldots, x_p)\,;\; x_r = x_r(x_1, \ldots, x_p) \qquad (1.15)$$
$$(s = 1, \ldots, l\,;\; r = p + 1, \ldots, n)$$

Đem thay (1.15) vào các phương trình chính tắc, l phương trình đầu tiên và n-p phương trình cuối cùng biến thành đồng nhất thức, các phương trình còn lại là các phương trình vi phân của p biến x_i còn lại. Nên điều khẳng định đã được chứng minh. Giải hệ phương trình có số hàm ẩn ít hơn này, rồi thay vào (1.15), ta được một họ các nghiệm riêng của phương trình chính tắc chứa p hằng số tích phân xác định theo điều kiện ban đầu.

Nếu trong số các hệ thức bất biến có các tích phân đầu, thì (1.15) còn chứa các hằng số của các tích phân đầu. Nên nghiệm riêng tương ứng với họ vừa nêu chứa cả các hằng số của các tích phân này nữa.

Vậy định lý Levi–Sivita đã được chứng minh cho phương trình chính tắc Poăngcarê–Trêtaep áp dụng được cho cả các hệ không hôlônôm.

§ 2. THÍ DỤ.

Xe trượt Traplugyn trên mặt phẳng ngang có các phương trình chính tắc.

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{\alpha}{m(\gamma^2 - \beta^2)}(y_1 + \beta y_2)(\beta y_1 + \gamma^2 y_2),$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{\alpha}{m(\gamma^2 - \beta^2)}(y_1 + \beta y_2), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{m(\gamma^2 - \beta^2)}(y_1 + \beta y_2),$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{m(\gamma^2 - \beta^2)}(\beta y_1 + \gamma^2 y_2)\cos\varphi, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{m(\gamma^2 - \beta^2)}(\beta y_1 + \gamma^2 y_2)\sin\varphi$$

Các phương trình này có tích phân năng lượng

$$H \equiv \frac{1}{2m(\gamma^2 - \beta^2)}(y_1^2 + 2\beta y_1 y_2 + \gamma^2 y_2^2) = \text{const}$$

và tích phân tuyến tính

$$f \equiv \frac{y_2}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}} \sin\frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}} + \frac{y_1 + \beta y_2}{\gamma^2 - \beta^2}\cos\frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}} = C = \text{const}$$

Giải tích phân cuối cùng cho y_1, ta được

$$y_1 = \frac{1}{\cos\frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}}}\left[C(\gamma^2 - \beta^2) - y_2\left(\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}\,\sin\frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}} + \beta\cos\frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}}\right)\right]$$

Thay biểu thức của y_1 vào hàm H, ta được

$$K = \frac{1}{2m(\gamma^2 - \beta^2)} \left\{ \frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}}} \left[C(\gamma^2 - \beta^2) - y_2 \left(\sqrt{\gamma^2 - \beta^2} \sin \frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \beta\cos \frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 + \beta^2}} \right)\right]^2 + \frac{2\beta y_2}{\cos \frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}}} \left[C(\gamma^2 - \beta^2) - y_2 \left(\sqrt{\gamma^2 - \beta^2} \sin \frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}} + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \beta\cos \frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}} \right)\right] + \gamma^2 y_2^2 \right\}$$

Nên, theo (1.11), suy ra các hệ thức bất biến mới

$$\frac{\partial K}{\partial y_2} = \frac{1}{m(\gamma^2 - \beta^2)} \left\{ \frac{-1}{\cos^2 \frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}}} \left[C(\gamma^2 - \beta^2) - y_2 \left(\sqrt{\gamma^2 - \beta^2} \sin \frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \beta\cos \frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \rho^2}} \right)\right] \left(\sqrt{\gamma^2 - \beta^2} \sin \frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}} + \beta\cos \frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}} \right) + \frac{\beta}{\cos \frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}}} \times$$

$$\left. \times \left[C(\gamma^2 - \beta^2) - 2y_2 \left(\sqrt{\gamma^2 - \beta^2} \sin \frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}} + \beta\cos \frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}} \right) \right] + \gamma^2 y_2 \right\};$$

$$X_2 K \equiv 0; \quad X_3 K \equiv 0$$

và tính được

$$y_1 = C(\gamma^2 - \beta^2)\cos \frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}} - \beta C \sqrt{\gamma^2 - \beta^2} \sin \frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}},$$

$$y_2 = \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}\, C \sin \frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}}.$$

Thay vào các phương trình chính tắc, ba phương trình cuối cho ta

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{m} \cos \frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}}; \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{\cos\varphi}{m} \left(\beta\cos \frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\gamma^2 - \beta^2} \sin \frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}} \right);$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{C\sin\varphi}{m} \left(\beta\cos \frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}} + \sqrt{\gamma^2 - \beta^2} \sin \frac{\alpha\varphi}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}} \right)$$

Với các điều kiện ban đầu bằng không, ta tìm được

$$\varphi = \frac{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}}{\alpha} \operatorname{arcsinth} \left(\frac{C\alpha t}{m\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}} \right)$$

Thay biểu thức của φ vào các phương trình xác định ξ, η, ta được các phương trình quĩ đạo của điểm tiếp xúc với mặt phẳng. Lời giải này trùng với lời giải thu được bằng cách tích phân trực tiếp phương trình vi phân chuyển động [4].

Địa chỉ
Đại học Tổng hợp Hà nội

Nhận ngày 20-12-1981

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. LEVI-CIVITA. Sulla determinazione di soluzioni particolari di un systeme canonico, quando se ne conose qualche integrale o relatione invarianto. Rend. Acc. Lincei, vol. 10, 1901.

2. CAPODANNO P. Sur deux extensions d'un theorem de Levi—Civita aux systemes gyroscopiques et quelque applications. Journal de Mécanique, vol. 17, N° 3.

3. ФАМ ГУЕН. Об одной форме уравнений движения, пригодных как для голономных, так и для неголономных механических систем. ПММ, Т. 32 вып. 6, 1968.

4. НЕЙМАРК Ю. И., ФУФАЕВ Н.А. Динамика неголономных систем. Изд Наука, 1967.

RÉSUMÉ

SUR LE THEORÈME DE LEVI-CIVITA POUR LES ÉQUATIONS CANONIQUES DE POINCARÉ-CETAEV

Dans cet article, le théorème de Levi—Civita est demontré pour le cas des équations canoniques de Poincaré—Cetaev appliquées aux systèmes holonomes et aussi aux systèmes nonholonomes.

Un exemple est consideré sur un système nonholonome classique.