Tạp chí Cơ học T. V, 1983, số 1 (trang 1 – 5)

VA CHẠM DỌC CỦA 2 THANH ĐÀN HỒI

NGUYỄN THÚC AN – VŨ VĂN NGUYỆN

§1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Áp dụng lý thuyết sóng một chiều để nghiên cứu bài toán về sự va chạm dọc của 2 thanh đầu phẳng đã được một số tác giả quan tâm;

Trong [1] đã nghiên cứu sự va chạm dọc của 2 thanh đàn hồi tự do, tác giả đã nghiên cứu ứng suất trong thanh và hệ số truyền năng lượng giữa các thanh.

Trong [2] đã nghiên cứu sự va chạm của búa vào cọc, tác giả coi bài toán này là bài toán về sự va chạm dọc của 2 thanh.

Ở bài này tác giả xét sự va chạm dọc của 2 thanh đàn hồi đầu phẳng có chú ý đến bộ phận giảm sóc với các điều kiện biên khác nhau ở đầu thanh.

§2. PHƯƠNG TRÌNH CHUYỂN ĐỘNG CỦA THANH VÀ CÁC ĐIỀU KIỆN CỦA BÀI TOÁN

Giả sử thanh thứ nhất có chiều dài là l_1 chuyển động với vận tốc V_1 va chạm dọc vào thanh thứ hai đứng yên có chiều dài là l_2 qua bộ phận giảm sóc gắn ở đầu thanh thứ hai có độ cứng là K_1. Đầu kia của thanh thứ hai có thể là tự do, có thể tựa trên nền cứng, nền đàn hồi hay nền từ biến. Ta chọn gốc tọa độ cố định O_1 trùng với đầu trái của thanh thứ nhất trước khi va chạm và trục O_1X_1 hướng dọc theo thanh từ trái sang phải, chọn gốc tọa độ cố định O_2 trùng với đầu phải của thanh thứ hai và trục O_2X_2 hướng từ phải sang trái. Gốc thời gian kể từ khi 2 thanh bắt đầu va chạm.

Với giả thiết kích thước tiết diện ngang nhỏ so với chiều dài mỗi thanh, lý thuyết sóng một chiều được áp dụng vào bài toán này.

Phương trình chuyển động của các thanh:

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = a_i^2 \frac{\partial^2 U_i}{\partial X_i^2} \tag{2.1}$$

Ở đây a_i – tốc độ truyền sóng trong các thanh; U_i – dịch chuyển của các tiết diện của mỗi thanh, $i = 1, 2$

Nghiệm tổng quát của phương trình (2.1) theo Đa-lăm-be:

$$U_i\left(t, \frac{X_i}{a_i}\right) = \varphi_i\left(t - \frac{X_i}{a_i}\right) - \psi_i\left(t + \frac{X_i}{a_i}\right) \tag{2.2}$$

Điều kiện đầu của bài toán với $t = 0$, ta có:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = V_1,\ \frac{\partial U_1}{\partial X_1} = 0,\ \frac{\partial U_2}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial U_2}{\partial X_2} = 0 \tag{2.3}$$

Điều kiện biên của bài toán tại tiết diện $X_1 = l_1$ và $X_2 = l_2$ ta có:

$$E_1F_1 \frac{\partial U_1}{\partial X_1} = E_2F_2 \frac{\partial U_2}{\partial X_2} = -K_1(U_1 - U_2) \tag{2.4}$$

Tại tiết diện $X_1 = 0$ của thanh thứ nhất tự do ta có:

$$\frac{\partial U_1}{\partial X_1} = 0 \tag{2.5}$$

Tại tiết diện $X_2 = 0$ của thanh thứ hai chịu các điều kiện biên

$$\frac{\partial U_2}{\partial X_2} = -\frac{R}{E_2F_2} + \frac{M}{E_2F_2}\frac{\partial U_2}{\partial t} \tag{2.6a}$$

hay

$$E_2F_2\frac{\partial U_2}{\partial X_2} = KU_2 \tag{2.6b}$$

Hay đầu thanh này gặp lực cản rất lớn không chuyển động được:

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = 0 \tag{2.6c}$$

Ở đây: R là lực chống không đổi ở đầu thanh:

– Hệ số nhớt được coi là hằng số: K_1 – hệ số đàn hồi của bộ phận giảm sóc ở đầu thanh thứ 2; K – hệ số đàn hồi của lực cản đặt lên đầu thanh thứ hai.

§ 3. XÁC ĐỊNH CÁC HÀM SÓNG

Để xác định ứng suất, vận tốc... ở trong thanh ta cần biết các hàm sóng:

$$\varphi_1'\left(t - \frac{X_1}{a_1}\right),\ \psi_1'\left(t + \frac{X_1}{a_1}\right),\ \psi_2'\left(t - \frac{X_2}{a_2}\right),\ \psi_2'\left(t + \frac{X_2}{a_2}\right)$$

tại các tiết diện của thanh ở mỗi thời điểm.

Khi thanh thứ nhất chưa va chạm vào thanh thứ hai theo điều kiện (2.3) của bài toán đặt ở trên ta có nhận xét ở trong thanh thứ hai các sóng $\varphi_2'\left(t - \frac{X_2}{a_2}\right)$ và $\psi_2'\left(t + \frac{X_2}{a_2}\right)$ chưa xuất hiện, còn ở thanh thứ nhất ta có:

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} = \varphi_1'\left(-\frac{X_1}{a_1}\right) + \psi_1'\left(\frac{X_1}{a_1}\right) = V_1 \tag{a}$$

mặt khác

$$\frac{\partial U_1}{\partial X_1} = \frac{1}{a_1}\left[-\varphi_1'\left(-\frac{X_1}{a_1}\right) + \psi_1'\left(\frac{X_1}{a_1}\right)\right] = 0$$

Suy ra:

$$\varphi_1'\left(-\frac{X_1}{a_1}\right) = \psi_1'\left(\frac{X_1}{a_1}\right) \tag{b}$$

Kết hợp giữa các hệ thức (a) và (b) ta có:

$$\varphi_1'\left(-\frac{X_1}{a_1}\right) = \psi_1'\left(\frac{X_1}{a_1}\right) = \frac{V_1}{2} \tag{c}$$

Lý luận tương tự ta có:

$$\varphi_2'\left(-\frac{X_2}{a_2}\right) = \psi_2'\left(\frac{X_2}{a_2}\right) = 0 \tag{d}$$

Từ (c) và (d) ta có:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1^{*}(Z_1) &= \frac{V_1}{2}\\ \varphi_1^{*}(Z_2) &= 0\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

với $$-l_1/a_1 < Z_1 < l_1/a_1\,;\; -l_2/a_2 < Z_2 < l_2/a_2$$

khi 2 thanh bắt đầu va chạm thì sóng $\psi_2^{*}\left(t + \dfrac{l_2}{a_2}\right)$ bắt đầu xuất hiện tại đầu thanh thứ hai ($x_2 = l_2$), còn sóng $\psi_1^{*}\left(t + \dfrac{l_1}{a_1}\right)$ tại đầu thanh thứ nhất ($x_1 = l_1$) cũng sẽ khác với nó trước khi va chạm.

Theo điều kiện (2.4) ta có:

$$\psi_1^{*}\left(t + \frac{l_1}{a_1}\right) = \varphi_1\left(t - \frac{l_1}{a_1}\right) + C_2\left[-\varphi_2^{*}\left(t - \frac{l_2}{a_2}\right) + \psi_2\left(t + \frac{l_2}{a_2}\right)\right] \tag{3.2}$$

$$\psi_2^{*\prime}\left(t + \frac{l_2}{a_2}\right) + (1 - C_2)C_1\psi_2^{*}\left(t + \frac{l_2}{a_2}\right) =$$

$$= 2C_1\varphi_1^{*}\left(t - \frac{l_1}{a_1}\right) - (1 + C_2)C_1\varphi_2^{*}\left(t - \frac{l_2}{a_2}\right) + \varphi_2^{*\prime}\left(t - \frac{l_2}{a_2}\right) \tag{3.3}$$

Ở đây:

$$C_1 = -\frac{a_2K_1}{E_2F_2},\quad C_2 = \frac{a_1E_2F_2}{a_2E_1F_1},$$

E_1, F_1 và E_2, F_2 là môđun đàn hồi và diện tích tiết diện ngang của thanh 1 và thanh 2

Đặt $Z_2 = t + \dfrac{l_2}{a_2}$, $\alpha = C_1(1 - C_2)$

Phương trình (3.3) được viết:

$$\psi_2^{*\prime}(z_2) + \alpha\psi_2^{*}(z_2) = 2C_1\varphi_1^{*}\left(z_2 - \frac{l_1}{a_1} - \frac{l_2}{a_2}\right) +$$

$$+ \varphi_2^{*\prime}\left(z_2 - \frac{2l_2}{a_2}\right) - C_1(1 + C_2)\varphi_2^{*}\left(z_2 - \frac{2l_2}{a_2}\right) \tag{3.4}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (3.3) có dạng:

$$\psi_2^{*}(z_2) = C_ie^{-\alpha z_2} + e^{-\alpha z_2}\int e^{\alpha z_2}\Big[2C_1\varphi_1^{*}\left(z_2 - \frac{l_1}{a_1} - \frac{l_2}{a_2}\right) +$$

$$+ \varphi_2^{*\prime}\left(z_2 - \frac{2l_2}{a_2}\right) - C_1(1 + C_2)\varphi_2^{*}\left(z_2 - \frac{2l_2}{a_2}\right)\Big]dz_2 \tag{3.5}$$

Ở đây hằng số C_i được xác định dựa vào tính liên tục của hàm sóng $\psi_2^{*}(Z_2)$ tại $t = \dfrac{2nl}{a_1}$ với n là số tự nhiên và với giả thiết

$$T_1 = \frac{2l_1}{a_1} < T_2 = \frac{2l_2}{a_2}$$

Do đó xác định được sóng $\psi_2^{*}\left(t + \dfrac{l_2}{a_2}\right)$. Suy ra xác định được sóng $\psi_2^{*}\left(t + \dfrac{x_2}{a}\right)$ ở trong thanh thứ 2. Mặt khác thay giá trị $\psi_2^{*}\left(t + \dfrac{l_2}{a_2}\right)$ vào (3.2) ta có $\psi_1^{*}\left(t + \dfrac{l_1}{a_1}\right)$ và ta có sóng $\psi_1^{*}\left(t + \dfrac{x_1}{a_1}\right)$ ở trong thanh thứ nhất.

Từ điều kiện biên (2.5): $\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \frac{1}{a_1}[-\varphi_1'(t) + \psi_1'(t)] = 0$ ta xác định được sóng $\varphi_1'(t) = \psi_1'(t)$ (3.6), từ đó tìm ra được hàm sóng $\varphi_1'\left(t - \frac{x_1}{a_1}\right)$ ở mỗi tiết diện của thanh thứ nhất trong các miền.

Từ điều kiện biên (2.6a) tại đầu thanh thứ hai ($x_2 = 0$) ngoài lực cản là hằng số R, còn chịu lực cản tỷ lệ bậc nhất với vận tốc, hệ số tỷ lệ được coi là hằng số:

Ta có $\frac{\partial U_2}{\partial X_2} = -\frac{R}{E_2F_2} + \frac{\mu}{E_2F_2}\frac{\partial U_2}{\partial t}$, rút ra:

$$\varphi_2'(t) = \frac{a_2R}{E_2F_2 + \mu a_2} + \frac{E_2F_2 - \mu a_2}{E_2F_2 + \mu a_2}\psi_2'(t) \tag{3.7}$$

Hàm $\psi_2'(t)$ đã biết, từ đó tìm được sóng $\varphi_2'\left(t - \frac{x_2}{a_2}\right)$ tại mỗi tiết diện của thanh thứ hai ở mỗi miền.

Nếu hệ số nhớt $\mu = 0$, thì đầu thanh thứ hai ($x_2 = 0$) chỉ chịu lực cản là hằng ta có:

$$\varphi_2'(t) = \frac{Ra_2}{E_2F_2} + \psi_2'(t) \tag{3.7a}$$

Từ đó ta xác định được sóng $\varphi_2'\left(t - \frac{x_2}{a_2}\right)$ chạy dọc theo thanh thứ hai.

Nếu hệ số nhớt $\mu = 0$ và $R = 0$, thì đầu thanh thứ hai ($x_2 = 0$) tự do. Từ (3.6) ta có:

$$\varphi_2'(t) = \psi_2'(t) \tag{3.7b}$$

Do đó ta xác định được sóng $\varphi_2'\left(t - \frac{x_2}{a_2}\right)$ chạy dọc theo thanh ở mỗi miền.

Từ (2.6) ở đầu thanh thứ hai ($x_2 = 0$) chịu lực cản đàn hồi với hệ số tỷ lệ K được coi là hằng số:

$$E_2F_2\frac{\partial U_2}{\partial X_2} = KU_2$$

Rút ra:

$$\varphi_2'(t) + \lambda\varphi_2(t) = \psi_2'(t) - \lambda\psi_2(t), \tag{3.8}$$

với $\lambda = \frac{Ka_2}{E_2F_2}$

Nghiệm tổng quát của phương trình có dạng:

$$\varphi_2(t) = C_je^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\int e^{\lambda t}[\psi_2'(t) - \lambda\psi_2(t)]dt \tag{3.9}$$

Ở đây các hằng số C_j được xác định dựa vào tính liên tục của dịch chuyển tại đầu thanh $x_2 = 0$; ở các thời điểm $t = \frac{2l_1}{a_1} + \frac{l_2}{a_2}$... Từ đó xác định được sóng $\varphi_2'\left(t - \frac{x_2}{a_2}\right)$ chạy dọc theo thanh thứ hai.

Từ (2.6c) tại đầu thanh thứ hai ($x_2 = 0$) chịu lực cản rất lớn, thanh không dịch chuyển được:

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} = 0, \text{ rút ra } \varphi_2'(t) = -\psi_2'(t)$$

Do đó có thể xác định được sóng $\varphi_2'\left(t - \frac{x_2}{a_2}\right)$ chạy dọc theo thanh thứ hai. Sau khi xác định được sóng $\varphi_1'\left(t - \frac{x_1}{a_1}\right)$, $\psi_1'\left(t + \frac{x_1}{a_1}\right)$, $\varphi_2'\left(t - \frac{x_2}{a_2}\right)$ và $\psi_2'\left(t + \frac{x_2}{a_2}\right)$ ta xác định được ứng suất, vận tốc, dịch chuyển tại mỗi tiết diện của thanh và thời gian va chạm.

§4. KẾT LUẬN

Về mặt cơ học cũng như về mặt kỹ thuật, mô hình bài toán xét ở đây tổng quát hơn so với mô hình các bài toán đã được nghiên cứu ở [1] và [2]...

Địa chỉ:
Đại học Thủy lợi

Nhận ngày 2-6-1982

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. БЕЛЯЕВ Ю. В. Применение теории удара стержней к анализу работы машин ударного действия. Труды семинара по вибрационной технике, 1964.
2. ИНОСОВ В. Л., ЗАЙНКОФ Я. Ф., АНДРЕЕВА Л. В. Определение напряже. ния в свае при ударном погружении на основе волновой теории. Л. И. том XIII, 12, 1977.
3. КИЛЬЧЕВСКИЙ Н. А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Киев, 1976.
4. NGUYỄN THÚC AN, VŨ VĂN NGUYỆN. Sự va chạm của vật rắn vào thanh đàn hồi tiết diện thay đổi, Tạp chí cơ học, số 1, 1981

РЕЗЮМЕ

ПРОДОЛЬНЫЙ УДАР ДВУХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

В данной статье изучается вопрос о продольном ударе двух упругих стержней с прокладкой п底различными граничными условиями на концах второго стержня. Были определены напряжения, скорости и перемещения в каждом сечении стержней.